

A MAXWELL-EGYENLETEK INTEGRÁLIS ALAKJA IDŐBEN VÁLTOZÓ FELÜLETEK ESETÉN – I. RÉSZ

Gnädig Péter
ELTE Fizikai Intézet

A klasszikus elektrodinamika törvényeinek matematikai megfogalmazásával ismerkedő egyetemi hallgatók előtt jól ismert, hogy ezek a törvények kétféleképpen, differenciális és integrális formában is megadhatóak. Emlékeztetőül (a vákuumbeli esetre szorítkozva):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

illetve

$$\oint_F \mathbf{E} \, d\mathbf{F} = \int_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho \, dV, \quad (1')$$

$$\oint_F \mathbf{B} \, d\mathbf{F} = 0, \quad (2')$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{F}, \quad (3')$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \, d\mathbf{F} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \, d\mathbf{F}. \quad (4')$$

A fenti integrálokban F egy tetszőleges V térfogatot határoló *zárt* felület, Γ pedig egy tetszőleges S felület *zárt* határgörbéje. (A zárt felület normálvektorait „kifelé” irányítjuk, az S felület irányítása önkényes, de a Γ görbe irányítotttsága a jobbkézsabálynak megfelelő kell legyen.)

Két – a továbbiak szempontjából fontos – dolgot kell még figyelembe vennünk:

1. A (3') és (4') integrálokban szereplő S felület időben állandó, rögzített helyzetű kell legyen, így az idő szerinti deriválás bevihető az integráljel alá:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{F} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{F} \quad \text{és} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \, d\mathbf{F} = \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{F}.$$

2. A (4') jobb oldalán szereplő két integrált *ugyanazon* S felületre végzendő el. (S egyébként a Γ határgörbére illeszkedő *tetszőleges* felület lehet.) A

$$\mathbf{j} \text{ és } \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

vektormezők külön-külön *nem forrásmentesek*, csupán az összegük divergenciamentes; lásd (1)-et és a töltésmegmaradást kifejező

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

kontinuitási egyenletet! Ha például az eltolási áramot és a töltések áramát *más-más* felületre számítanánk ki, nyilván hibás eredményt kapnánk! Egy ismert példa erre a fokozatosan feltöltődő, emiatt változó elektromos térrel jellemezhető síkkondenzátor (1. ábra). Ha a kondenzátortól messze akarjuk meghatározni az indukált mágneses mezőt, és – hibásan – az elektromos áram járulékát az S_1 , az eltolási áramét pedig az S_2 felületre számítjuk, mindkét integrál nulla lesz, jóllehet az indukált mágneses mező vonalintegrálja *nem tűnik el!*

Az (1)-(4) és az (1')-(4') egyenletrendszer (az említett feltételek teljesülése esetén) matematikailag ekvivalens, mint az a vektoranalízis nevezetes integráltételei, a

$$\oint_F \mathbf{w}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{F} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{r}) \, dV \quad (6)$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel és a

$$\oint_T \mathbf{w}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{w}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{F} \quad (7)$$

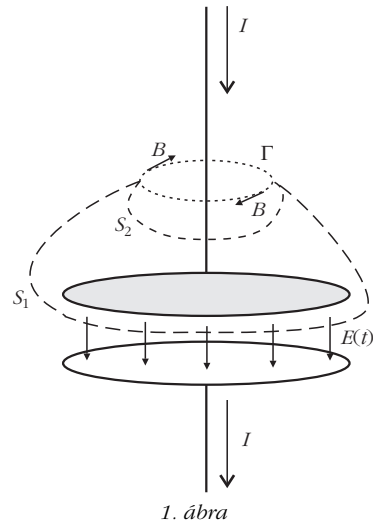
Stokes-tétel segítségével könnyen belátható.¹

A Maxwell-egyenletek differenciális megfogalmazása az elektrodinamika teljes leírását adja, matematikai alakja azonban (a vektoranalízis egész apparátusának alkalmazása miatt) nem túl szemléletes és nem könnyű. Az integrális megfogalmazás sokkal szemléletesebb, akár középiskolásoknak is elmagyarázható, alkalmazása azonban csak az erősen szimmetrikus esetekben válik egyszerűvé. (Ilyen például egy ponttöltés gömbszimmetrikus, vagy egy nagyon hosszú, egyenletesen töltött, egyenes szigetelő szál hengerszimmetrikus elektrosztatikus tere, valamint az áramjárta, egyenes vezető mágneses tere.)

Mozgási indukció

Felmerül a kérdés, alkalmazhatók-e (és ha igen, milyen módon) az integrális Maxwell-egyenletek olyan esetekben is, amikor az F felület – és vele együtt an-

¹ Az integrális egyenletek a határfeltételek kezelésénél látszólag gazdagabb jelentéssel bírnak, amennyiben csak a hagyományos matematikai analízis eszköztárára szorítkozunk. Felületi töltéssűrűség vagy felületi áramok fellépte esetén is érvényesek a differenciális egyenletek, amennyiben a szinguláris mennyiségeket (a fizikai realitásnak megfelelően) egy nagyon vékony rétegben szétkentnek gondoljuk, vagy ha a disztribúcióelmélet (Dirac-delta és társai) alkalmazásától se riadunk vissza.



nak esetleges határgörbéje – mozog, tehát *időben változik*. Ezt a kérdést az indokolja, hogy a különböző alkalmazásokban (például egy villanymotor forgórészénél) ténylegesen megvalósítható a mágneses térben mozgó zárt görbe, illetve az arra illeszkedő – időben változó helyzetű és alakú – felület.

Az (1') és (2') egyenletek nyilván ebben az esetben is érvényesek maradnak, mert bennük semmi nem utal az időbeli változásra, azok egy adott időpillanatban értendők. Nem ilyen egyszerű a helyzet a másik két egyenlettel!

Az indukciótörvény (3') alakja nyilván *nem igaz*, ennek belátásához lássunk egy ellenpéldát. Mozogjon az S felület inhomogén, sztatikus mágneses mezőben, és az elektromos térerősség legyen nulla! A mágneses fluxus időben változik, az elektromos mező körintegrálja pedig nulla!

Vajon lehet-e úgy módosítani (például valamilyen járulékos tagok hozzáadásával) az indukciótörvény integrális alakját, hogy az időben változó felületek esetén is egyenértékű legyen a (3) differenciális alakkal, tényleg helyesen írja le a megfigyelhető jelenségeket? A választ már körülbelül 180 évvel ezelőtt megadta *M. Faraday*, amikor megfogalmazta az indukció törvényét:

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (8)$$

ahol a Φ mágneses fluxus időbeli változását akár a mágneses indukcióvektor időfüggése (nyugalmi indukció), akár a felületet és az azt határoló görbe elmozdulása (mozgási indukció) okozhatja. Annak kiderítésére, hogy az indukált feszültség (amelyet műszerrel lehet mérni) hogyan függ össze az elektromágneses térerősségekkel, további 60 évet kellett várni. *H. Lorentz* fogalmazta meg a ma ismert alakban, hogy egy Q töltésű, \mathbf{v} sebességgel mozgó töltött részecskére

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (9)$$

erő, az úgynevezett *Lorentz-erő* hat, és az indukált feszültség (egységnyi töltés esetén) ezen erő körintegrálja. Ennek megfelelően a harmadik Maxwell-egyenlet integrális alakja

$$\oint_{\Gamma(t)} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} = \quad (3'')$$

$$= - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F},$$

ahol $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ az integrációs kontúr egyes pontjainak sebessége, és a $\Gamma(t)$, valamint az $S(t)$ jelölések az integrálási tartományok időbeli változását hangsúlyozzák.

Bebizonyítjuk, hogy a harmadik Maxwell-egyenlet – immár helyesen alkalmazott – (3'') integrális alakja és a (3) differenciális alak egymással egyenértékű, matematikailag ekvivalens. Ehhez felhasználjuk az alábbi matematikai azonosságot, melynek bizonyítása a *Függelékben* található:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F} =$$

$$= \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{F} + \oint_{\Gamma(t)} [\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} + \quad (10)$$

$$+ \int_{S(t)} [\text{div } \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F},$$

ahol $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ tetszőleges (megfelelő deriválhatósági tulajdonságokkal rendelkező) vektormező, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ pedig a felület pontjainak sebességét jelöli. (Megjegyezzük, hogy a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ vektorok megadása nem egyértelmű, a felületi pontok átparaméterezésének megfelelő mozgás erejéig határozatlan. Egy adott módon mozgó felületnél a felületi pontok sebességéhez szabadon hozzáadhatunk egy olyan $\mathbf{v}^*(\mathbf{r}, t)$ sebességmezőt, amely mindenhol merőleges a felület normálisára, a határgörbénél pedig annak érintőjével párhuzamos. Ez a „határozatlanság” azonban (10)-ben nem jelenik meg, ott \mathbf{v}^* nem ad járulékot.)

Alkalmazzuk (10)-et a $\mathbf{w} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vektormezőre, és használjuk ki, hogy $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ forrásmentes, vagyis $\text{div } \mathbf{B} \equiv 0$. Ekkor (3'') így írható:

$$\oint_{\Gamma(t)} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} =$$

$$= - \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{F} - \oint_{\Gamma(t)} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r},$$

azaz

$$\oint_{\Gamma(t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{F},$$

tehát (a Stokes-tétel szerint)

$$\int_{S(t)} \left[\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] d\mathbf{F} \equiv 0,$$

ami valóban egyenértékű (3)-mal.

A (3'') egyenlet fizikai interpretációjához a következőket érdemes megfontolni.

(i) Látható, hogy a Faraday-féle indukciótörvény (8) alakjából (ha azt tetszőleges, akár mozgó felületekre is érvényesnek fogadjuk el) matematikai lépésekkel eljuthatunk a Lorentz-erő (9) képletéhez, mintegy „levezethetjük azt”. (A levezetés szót nem kell nagyon komolyan venni, mindössze arról van szó, hogy az említett fizikai törvények nem függetlenek egymástól.)

(ii) A (3'') egyenlet úgy is értelmezhető, mint az indukciótörvény azon alakja, amelyet a $\Gamma(t)$ kontúrral együttmozgó megfigyelők írnának fel (a fénysebességhez képest) kis sebességű mozgások esetén. Az együttmozgó megfigyelők fogalma természetesen csak lokálisan, egy-egy ívelemdarabkára értelmezhető, hiszen a $\Gamma(t)$ görbe darabkái általában különböző nagyságú és különböző irányú sebességgel rendelkeznek. A térerősségek transzformációs szabálya kis sebességek (Galilei-transzformáció) esetén:

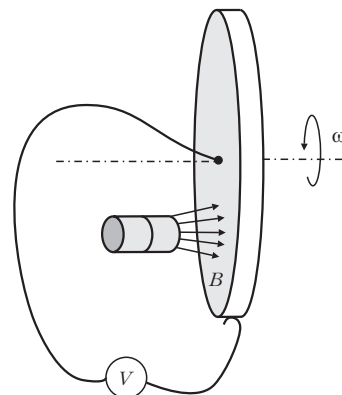
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

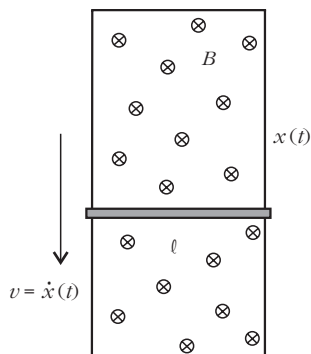
ha a \mathcal{K}' koordináta-rendszer \mathbf{v} sebességgel mozog a \mathcal{K} rendszerhez képest. Ez leolvasható például a relativisztikus transzformációs képletek $v \ll c$ közelítésben érvényes alakjából.

A voltmérő által mutatott feszültség (ami az egysegnyi nagyságú töltésnek a kontúr menti körbemozgatásához szükséges munkával egyenlő) a kontúr kis részekre osztása után az egyes ívelemdarabkákkal együttmozgó megfigyelők által észlelt \mathbf{E}' elektromos térerősség és az álló vonaldarabka $d\mathbf{r}$ differenciáljának szorzatösszegeként is megkapható. Ez a körfeszültség jelenik meg például a Kirchhoff-egyenletekben, amikor azokkal (kvázistacionárius közelítésben) bonyolultabb áramkörökben folyó áramerősségeket számoljuk. Hangsúlyozni kell, hogy ezen – az alkalmazások szempontjából igen fontos – interpretáció csak $v \ll c$ esetben és időben nem túl gyorsan változó (kvázistacionárius) terekre érvényes, míg maga a (3'') egyenlet közelítésmentes, egzaktul igaz.

(iii) Az indukciótörvény (8) alakja csak akkor adja biztosan helyesen a voltmérővel is mérhető indukált

2. ábra





3. ábra

feszültséget, ha a törvényben szereplő zárt görbe pontjait egy vezető test (például egy rézdrót) mindig ugyanazon anyagi részei képezik. Ha a zárt görbét – például csúszóérintkező alkalmazásával – időben változóan más és más anyagdarabkák valósítják meg, akkor az integrális törvény néha jó, néha viszont hibás eredményre vezet (lásd például az alább következő két példát)!

Tekintsük például (R. Feynman: *Mai Fizika*, VI. kötet alapján) a 2. ábrán látható elrendezést! Az egyenes ω szögsebességgel forgó rézkorong közelében egy állandó mágneset helyezünk el. A korong tengelyéhez és a kerületéhez csúszóérintkezőkön keresztül galvanométert csatlakoztatunk. A műszer indukált feszültséget jelez, hiszen a Lorentz-erő sugárirányban „hajtja” az elektronokat, jóllehet a mágneses fluxus (tetszőlegesen választott felületre) nyilvánvalóan időben állandó!

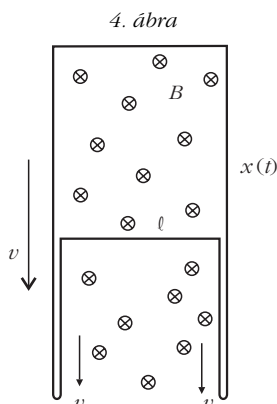
Egy másik példában, a párhuzamos síneken, a sínek síkjára merőleges, homogén, időben állandó mágneses mezőben csúszó rúd esetében (3. ábra) az indukált feszültség nagyságát, akár a Lorentz-erő segítségével, a középiskolából ismert

$$U = B \cdot \ell \cdot v$$

képletből számoljuk, akár pedig a fluxusváltozásból:

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} [B \cdot \ell \cdot x(t)] = B \cdot \ell \frac{dx(t)}{dt} = B \cdot \ell \cdot v$$

helyes eredményt kapjuk. (Az indukciótörvényben szereplő előjellel itt most azért nem kellett törődni, mert csupán a feszültség nagyságát akartuk meghatározni.)



4. ábra

Mi lehet az oka, hogy az egyik csúszóérintkezős esetben hibás, a másiknál pedig helyes eredményt kapunk az – ilyenkor nem feltétlenül megbízható – integrális törvényből? A párhuzamos síneken csúszó rúd esetében – egy kis trükkkel – csúszásmentes, zárt áramkör alakítható ki (4. ábra). A rúdhoz és a sínekhez erősített hajlékony vezetékben a Lorentz-erő nem ad járulékot az indukált feszültséghez, mert $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ merőleges $d\mathbf{r}$ -re.

Ha ugyanezt a „trükköt” próbáljuk alkalmazni a forgó rézkorongnál, és például az 5. ábrán látható zárt, csúszóérintkező nélküli vezetékkel kapcsoljuk a voltmérőre, egy olyan körülölelt területet kapunk, amelynek nagysága a vezeték forgatása közben *csökken*, emiatt a mágneses fluxus időben változik, összhangban az indukált feszültség *nem nulla* értékével.

A gerjesztési törvény – mozgó felületek esetén

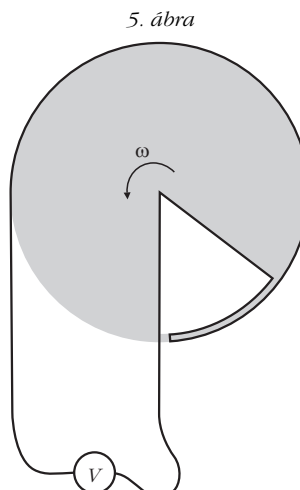
Térjünk most rá megfontolásaink legfontosabb részére, annak vizsgálatára, hogy megfogalmazható-e a negyedik Maxwell-egyenlet (a gerjesztési törvény) integrális alakban akkor, ha a felület (és vele együtt annak határoló görbéje) időben változik. Ha igen, az biztosan nem (4')-vel megegyező alakú lesz, hanem – a felület mozgása következtében – további járulékos tagok megjelenésére számíthatunk.

Induljunk ki a biztosan érvényes differenciális alakból, vagyis (4)-ből, és integráljuk annak mindkét oldalát egy tetszőlegesen választott $S(t)$ felületre, melyet a $\Gamma(t)$ zárt görbe határol:

$$\int_{S(t)} \text{rot } \mathbf{B} \, d\mathbf{F} = \mu_0 \int_{S(t)} \mathbf{j} \, d\mathbf{F} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{F}. \quad (11)$$

(A vektorterek hely- és időfüggését a tömörség kedvéért nem írtuk ki, de értelemszerűen minden vektormező \mathbf{r} és t függvénye.)

A (11) egyenlet bal oldala (a Stokes-tétel felhasználásával) vonalintegrállá alakítható, a jobb oldal pedig (10) értelmében kifejezhető az elektromos fluxus időderiváltjával:



5. ábra

$$\oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S(t)} \mathbf{j} \, d\mathbf{F} + \mu_0 \epsilon_0 \left[\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{E} \, d\mathbf{F} - \oint_{\Gamma(t)} (\mathbf{E} \times \mathbf{v}) \, d\mathbf{r} - \int_{S(t)} \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{F} \right]. \quad (12)$$

A fenti képletben \mathbf{v} a felület pontjainak sebessége, ami természetesen szintén \mathbf{r} és t függvénye.

Rendezzük a vonal- és felületi integrálokat az egyenlet bal és jobb oldalára, használjuk ki, hogy $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$:

$$\oint_{\Gamma(t)} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S(t)} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{F} + \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \, d\mathbf{F}. \quad (13)$$

(Kihasználtuk, hogy $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, ahol c a vákuumbeli fénysebesség.)

Az áramsűrűség kifejezhető a töltéshordozók $\mathbf{v}_{\text{töltés}}$ sebességével is:

$$\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v}_{\text{töltés}},$$

és így a gerjesztési törvény végül a

$$\oint_{\Gamma(t)} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{\text{felület}} \times \mathbf{E} \right) d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S(t)} \rho (\mathbf{v}_{\text{töltés}} - \mathbf{v}_{\text{felület}}) \, d\mathbf{F} + \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \, d\mathbf{F} \quad (4'')$$

alakot ölti. (A jelölések egyértelművé tétele kedvéért a felületi pontok eddig \mathbf{v} -vel jelölt sebességét $\mathbf{v}_{\text{felület}}$ módon írtuk fel.)

A (4'') egyenlet egyes tagjai – a gerjesztési törvénynél megtanultak mintájára – jól interpretálhatók.

(i) A bal oldalon \mathbf{B} mellett megjelent a Lorentz-erő elektromos megfelelője is; egységnyi nagyságú mágneses töltéssel rendelkező monopólusra (ha létezne ilyen) éppen ekkor erő hatna, ha elektromos merőben $\mathbf{v}_{\text{felület}}$ sebességgel mozog.

Másként is interpretálhatjuk a (4'') egyenlet bal oldalán a zárójelben szereplő vektort: ilyen \mathbf{B}' mágneses indukciót érzékel az a megfigyelő, aki a $\Gamma(t)$ görbe egyes ívelemdarabkáival együtt mozog. (Ez az interpretáció ismét csak Galilei-transzformációs közelítésben, tehát $v \ll c$ esetben igaz, míg a (4'') egyenlet tetszőleges sebességekre egzaktul teljesül.) Első pillanatban zavarba ejtő lehet, hogy miért nem hagyjuk el az $1/c^2$ -tel arányos, tehát kicsinek vélhető tagot ebben a „nem-relativisztikus” határesetben. Ne feledjük azonban, hogy \mathbf{E} nagyságától függően ez a tag még kicsiny sebességeknél is számottevő értéket vehet fel.

(ii) A jobb oldal első integrálja a töltött részecskék mozgásából adódó áramot veszi figyelembe, de azokból csak a mozgó felületen időegységenként ténylegesen átlépő töltéseket számítja, emiatt szerepel a képletben a töltések és a felület *relatív* sebessége.

(iii) A jobb oldal utolsó tagja az elektromos fluxus időderiváltja, ez felel meg az eltolási áramnak a differenciális leírásban.

Cikkünk II. részében néhány egyszerű és bonyolultabb példát mutatunk majd be az indukciótörvény és a gerjesztési törvény időben változó felületeknél történő alkalmazására. Addig is gondolkodhat rajta az Olvasó: elképzelhető-e, hogy egy mágneses tétől mentes elektrosztatikus mezőben – ami, mint jól tudjuk, konzervatív – egy egyenletes sebességgel mozgó megfigyelő körfeszültséget észleljen, vagyis azt tapasztalja, hogy az elektromos mező *nem* konzervatív?

Függelék

Az *F-1. ábrán* látható $S(t)$ felület egyes pontjai kicsiny Δt idő alatt $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \Delta t$ vektorral mozdulnak odébb, így az egész felület az $S(t+\Delta t)$ alakzatba, $\Gamma(t)$ határgörbéje pedig a $\Gamma(t+\Delta t)$ görbébe megy át.

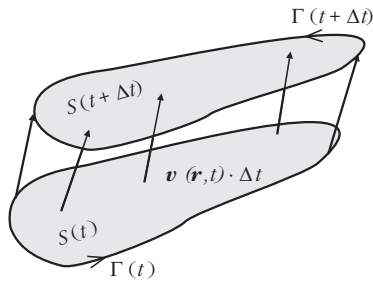
Feladatunk annak vizsgálata, hogy egy adott $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ vektormező $S(t)$ -re vett

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F}$$

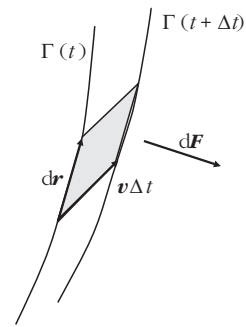
fluxusa milyen gyorsan változik időben, vagyis mekkora az idő szerinti deriváltja.

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\approx \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t+\Delta t) \, d\mathbf{F} - \int_{S(t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F}}{\Delta t} = \\ &= \frac{\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t+\Delta t) \, d\mathbf{F} - \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F}}{\Delta t} + \\ &+ \frac{\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F} - \int_{S(t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F}}{\Delta t} \approx \\ &\approx \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \, d\mathbf{F} + \frac{\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F} - \int_{S(t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{F}}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Az utolsó sor második tagjában két – egymáshoz közeli felületre integráljuk a $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ vektormezőt. Az elrendezés egy metszetét az *F-2. ábra* mutatja. (Az ábrán feltüntettük a zárt térrészről kifelé mutató felületi normálvektorokat is.) Ha a számlálóban szereplő integrálokat kiegészítjük a két felület határvonalai-



F-1. ábra



F-3. ábra

ra illeszkedő III. jelzésű „szalagra” történő integrállal, akkor egy zárt felületre képezett integrálhoz jutunk, amelyet a Gauss–Osztrogradszij-tétel segítségével térfogati integrállá alakíthatunk.

$$\begin{aligned} & \frac{\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F} - \int_{S(t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F}}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \oint_{\text{I. + II. + III.}} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\text{III.}} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F} = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) dV - \frac{1}{\Delta t} \int_{\text{III.}} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F}. \end{aligned}$$

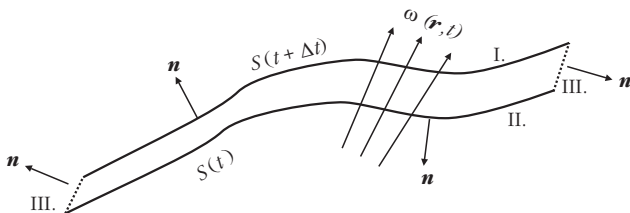
Mivel a térfogati integrálban a térfogatelem

$$dV = v_{\perp} \cdot \Delta t \cdot |d\mathbf{F}| = (\mathbf{v} \mathbf{n}) \cdot \Delta t \cdot |d\mathbf{F}| = \Delta t (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}),$$

fennáll, hogy

$$\frac{1}{\Delta t} \int \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) dV \approx \int_{S(t)} (\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{w}) d\mathbf{F}.$$

F-2. ábra



Hátra van még a „szalagra” vett felületi integrál kiértékelése. A felületelem az F-3. ábrán látható jelölésekkel így írható fel

$$d\mathbf{F} = \mathbf{v} \Delta t \times d\mathbf{r}.$$

Eszerint

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\Delta t} \int_{\text{III.}} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F} \approx \\ & \approx - \frac{1}{\Delta t} \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{w} (\mathbf{v} \Delta t \times d\mathbf{r}) = \oint_{\Gamma(t)} (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy fennáll:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F} = \\ & = \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{F} + \oint_{\Gamma(t)} [\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} + \\ & + \int_{S(t)} [\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{F}. \end{aligned}$$

(Ha a felületi pontok elmozdulása a felület normálisára merőleges, illetve ha a határgörbe pontjainak elmozdulása a görbe érintőjével párhuzamos, akkor ezek a fenti egyenlet jobb oldalának második és harmadik tagjában *nem* adnak járulékot. Ez természetes, hiszen az említett $\mathbf{v} \cdot \Delta t$ vektorok csupán átparameterezést jelentenek, és nem járnak együtt a felület vagy a határgörbe tényleges elmozdulásával.)