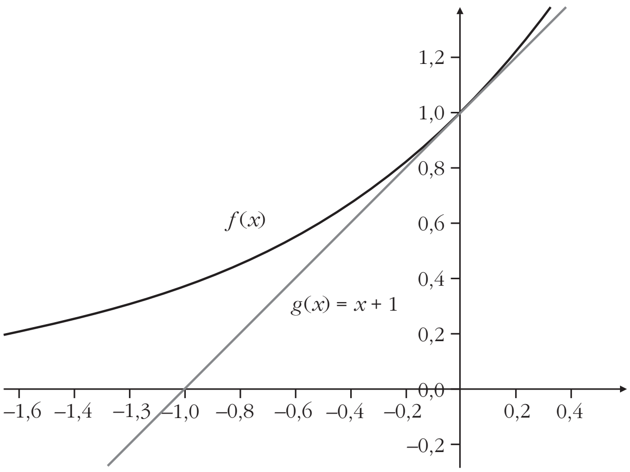
AZ EULER-FÉLE SZÁM VIZSGÁLATA

Simon Péter
PTE TTK Fizikai Intézet
Leőwey Klára Gimnázium, Pécs

A középiskolai tanulók a 11. évfolyam elején ismerkednek meg matematikaórán a törtkitevőjű hatványozással, majd az 1-nél kisebb, illetve 1-nél nagyobb hatványalapú exponenciális függvénnyel. Bár sem a közép-, sem az emelt szintű matematikaérettségin nem követelmény, mégis a legtöbb tankönyvben, illetve feladatgyűjteményben szerepel olyan feladat, amely e-alapú hatványt, vagy természetes alapú logaritmust tartalmaz. Érdekes, hogy ezekben a matematika-tankönyvekben igazából csak annyit tudunk meg erről az Euler-féle e-számról, hogy értéke körülbelül 2,718, irracionális szám, esetleg azt is, hogy transzcendens, mint a π. A tanév elején a legtöbb diák még igen érdeklődő, ennyi információ nem elégíti ki, faggatja tanárát, hogy mégis mi ez az e szám, mire jó. A felkészült matematikatanár legtöbbször még annyival szokta kiegészíteni a tankönyvi kevéske információt, hogy az e szám a fizikában majd elő fog fordulni, bizonyos természeti folyamatok leírásánál fontos. A diákok kíváncsisága persze ezzel a hírrel sem lett kielégítve. A második félévben fizikaórán valóban előfordulhat az Euler-féle szám. A középszintű fizikaérettségin követelmény a bomlási törvény ismerete, emelt szinten egyszerű feladatok megoldásakor használni is kell. Bár nem követelmény, de a bomlási törvényt a bomlási állandó segítségével is felírhatjuk. Ekkor ismét előkerülhet az e alapú hatvány vagy logaritmus. A diákok többsége addigra már rég elfelejtette a tanév eleji igen csekély ismeretet, és ekkor a fizikatanár legtöbbször csak annyit mond, hogy „hát ezt matekból tanultátok, e = 2,718…”.

Ez a rövid írás arra vállalkozik, hogy ötletet adjon arra, hogyan lehet az Euler-féle számot elemi matematikai eszközökkel közelebb hozni diákjainkhoz. Többféle megközelítés létezik. Mi most azt az utat járjuk végig, amelyik a függvények vizsgálatát használja, hiszen a fizikai folyamatok leírásakor is függvényeket használunk.



1. ábra. A keresett $f(x) = e^x$ (0, 1) pontjához húzott érintő a $g(x) = x+1$.

Az *e* szám megtalálása

Vizsgáljuk az $f(x) = a^x$ exponenciális függvényt! Keressük meg azt az $a = e$ alapot, amely mellett az $f(x) = e^x$ függvény grafikonja (0, 1) pontjához húzott érintő meredeksége: $m = 1$ (*1. ábra*). Ha találunk egy ilyen e alapot, akkor az azt is jelenti, hogy az $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (0, 1) pontjához húzott érintő $g(x)$ meredeksége megegyezik az $f(x)$ függvény $x = 0$ helyen felvett helyettesítési értékével ($e^0 = 1$).

Ez azt is jelenti, hogy kicsiny x értékre ($x \ll 1$) $e^x \approx 1+x$. Ezt a közelítést tekintsük egyenlőségnek, majd vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát. Rendezés után a keresett e szám 10-es alapú logaritmusát kapjuk:

$$\lg e = \frac{\lg(1+x)}{x}.$$

Innen e értékét már könnyedén megkapjuk:

$$e = 10^{\frac{\lg(1+x)}{x}}.$$

Most már csak annyi a dolgunk, hogy egyre kisebb x értékek mellett, számológép segítségével egyre pontosabban megkapjuk e értékét. Próbálkozásainkat az *1. táblázatba* foglaltuk.

1. táblázat

Az Euler-féle szám egyre pontosabb meghatározása

x	$e = 10^{(\lg[1+x])/x}$	x	$e = 10^{(\lg[1+x])/x}$
1	2	0,001	2,71692…
0,1	2,59374…	0,0001	2,71814…
0,01	2,70481…	0,00001	2,71826…

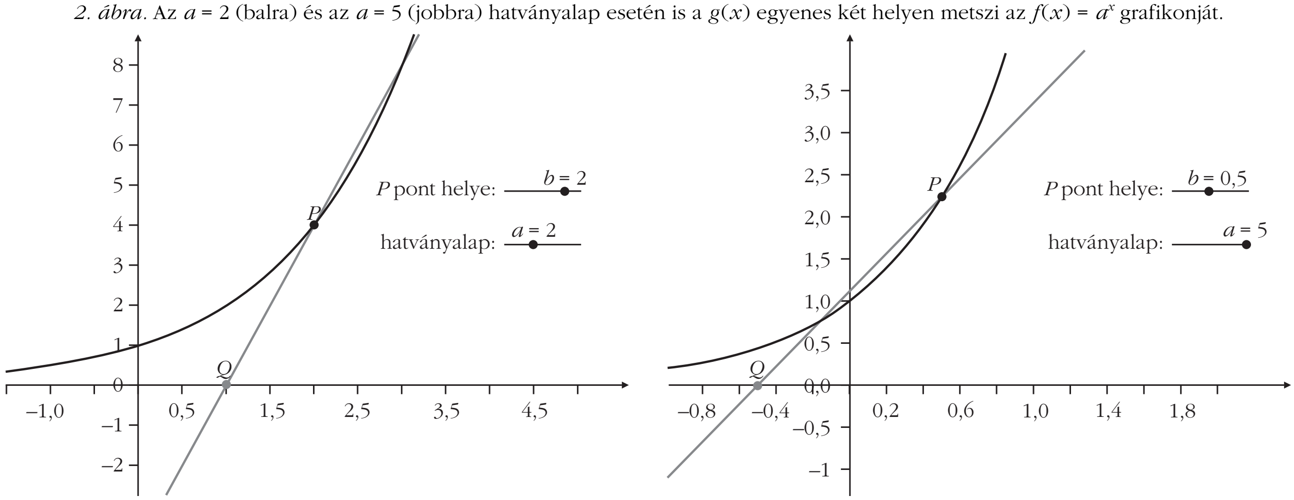
Igen hamar, viszonylag pontosan sikerült meghatároznunk a keresett e számot. 10 jegy pontosan az értéke: $e = 2{,}718\,281\,828$.

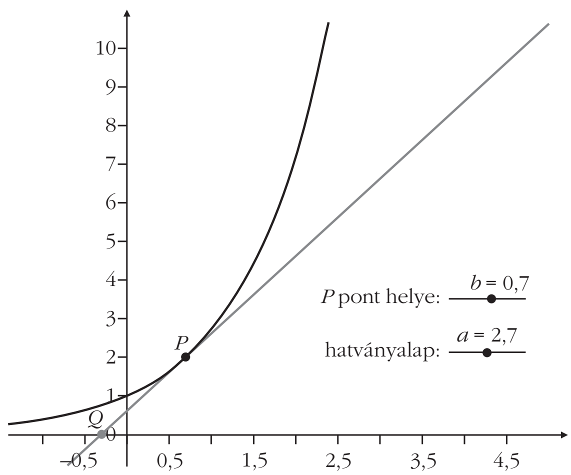
Az e^x függvény sajátossága

Igen, a fenti módon előállított e szám olyan, hogy az $f(x) = e^x$ exponenciális függvény (0, 1) pontjához húzott érintő meredeksége megegyezik az $f(x)$ függvény $x = 0$ helyen felvett helyettesítési értékével ($e^0 = 1$). Viszont az e^x függvény ennél többet is tud.

Határozzuk meg az e^x függvény grafikonja bármely (a, e^a) pontjához húzott érintő meredekségét. Gondolatban toljuk el a függvény képét a negatív x-irányba a-val és számítsuk ki a meredekséget az $x = 0$ helyen! Az $e^{(x+a)}$ függvény meredeksége az $x = 0$ helyen ugyanannyi, mint az e^x meredeksége az $x = 0$ helyen (azaz 1), szorozva e^a-val. (Itt azt használtuk fel, hogy az a-val való balra tolás egyenértékű a függvényértékek e^a-val való szorzásával.) Ezzel beláttuk, hogy e^x meredeksége az $x = a$ helyen éppen e^a-val egyenlő. Ez azt is jelenti, hogy az $f(x) = e^x$ exponenciális függvény grafikonja bármely pontjához húzott érintő meredeksége megegyezik az adott helyen felvett helyettesítési értékkel. Ezt könnyen tudjuk szemléltetni az internetről ingyenesen letölthető GeoGebra dinamikus matematikai szoftver segítségével. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $f(x) = a^x$ függvényt úgy, hogy a csúszka segítségé-

2. ábra. Az $a = 2$ (balra) és az $a = 5$ (jobbra) hatványalap esetén is a $g(x)$ egyenes két helyen metszi az $f(x) = a^x$ grafikonját.





3. ábra. Ha a hatványalap a = 2,7, akkor az exponenciális függvény bármely pontjához húzott érintő meredeksége megegyezik az adott helyen felvett helyettesítési értékkel.

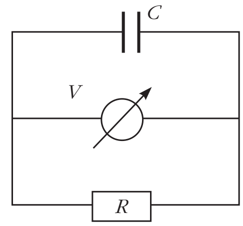
vel az a értékét 1 és 5 között tudjuk változtatni 0,1-es lépésekkel (*2. ábra*). Ezen exponenciális függvény grafikonján kijelölünk egy P pontot: $P(b, a^b)$. A P pontot úgy tudom mozgatni az $f(x)$ grafikonján, hogy egy újabb csúszka segítségével változtathatom b értékét −2-től 3-ig. Egy másik, a Q pont abszcisszája legyen 1-gyel kevesebb a P ponténál, és ordinátája legyen nulla: $Q(b-1, 0)$. Illesszünk a P és Q pontokra egy egyenest. Az így definiált $g(x)$ függvény képe olyan egyenes, amelynek meredeksége megegyezik a P pont második koordinátájával. A csúszka segítségével mozgassuk a P pontot az exponenciális függvény grafikonja mentén. Szépen megmutatható, ha $1 < a < 2{,}7$, vagy $2{,}7 < a$, akkor a $g(x)$ egyenes két helyen metszi az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény grafikonját. Érdemes a csúszka segítségével a P pontot, és így vele együtt a P és Q pontokra illeszkedő egyenest is végigmozgatni a megadott tartományon ($-2 < b < 3$).

Amennyiben a hatványalapot a = 2,7-re állítjuk be, láthatjuk, hogy a $g(x)$ függvény által leírt egyenes egy pontban érinti az exponenciális függvény képét, akárhova is mozgatjuk a P pontot (*3. ábra*). Ez persze nem egy egzakt bizonyítás, de nagyon élvezhető szemléltetés.

Mérjük meg az *e*-számot!

Most egy olyan fizikai jelenséget fogunk megvizsgálni, amelyben egy fizikai mennyiség pillanatnyi változási sebessége arányos a vizsgált fizikai mennyiség pillanatnyi értékével. A vizsgálat során mérést is végzünk, és a mért adatok elemzésével igyekszünk meghatározni az Euler-féle e-számot.

A C kapacitású kondenzátor kivezetéseit kössük U feszültségre. Ekkor a lemezein $Q = C \cdot U$ elektromos töltés jelenik meg. Természetesen az egyiken $+Q$, a másikon $-Q$. Ezután a rajzon látható kapcsolás alapján (*4. ábra*) süssük ki a feltöltött kondenzátort az R ellenálláson keresztül.



4. ábra. RC-kör az Euler-féle szám mérésére.

Egy multiméter beiktatásával nyomon követhetjük a kondenzátor feszültségének időbeli csökkenését. Az

$$U = \frac{1}{C} \cdot Q$$

összefüggés alapján belátható, hogy a kondenzátor feszültségének csökkenését az ellenálláson átáramló töltés okozza:

$$\Delta U = -\frac{1}{C} \cdot \Delta Q.$$

Az R ellenálláson kicsi Δt idő alatt áthaladó ΔQ elektromos töltést kifejezhetjük az állandónak tekinthető I áramerősséggel: $\Delta Q = I \cdot \Delta t$. Ezt felhasználva:

$$\Delta U = -\frac{1}{C} \cdot I \cdot \Delta t.$$

Osszuk mindkét oldalt Δt-vel, majd az így nyert egyenlet oldalát alakítsuk át:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{1}{C} \cdot I = -\frac{1}{C} \cdot \frac{U}{R} = -\frac{1}{C \cdot R} \cdot U.$$

A kondenzátor feszültségének időbeli változási sebessége arányos a kondenzátor pillanatnyi feszültségével. Tehát találtunk egy olyan folyamatot, amelyben egy mennyiség időbeli változási sebessége arányos a változó mennyiség pillanatnyi értékével. Első látásra igen vonzó ötletnek tűnhet úgy megválasztani a kondenzátor és az ellenállás értékét, hogy a $C \cdot R$ szorzat 1 legyen. Ekkor formálisan a

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot U$$

egyenlethez jutnánk. Az egyenletben szereplő mínusz előjel azt jelzi, hogy a kondenzátor U feszültsége időben csökken, az $U(t)$ görbe meredeksége nem 1-szerese, hanem −1-szerese a felvett értéknek, ezért az $U(t)$ exponenciális függvény kitevőjében is megjelenik egy mínusz jel:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t}.$$

Csakhogy ez a folyamat nagyon gyors lenne, nehéz lenne megfigyelni. (A kondenzátor feszültsége 1 másodperc alatt az e-ed részére csökkenne.) Lassítsuk a folyamatot! A kisülés idejét $C \cdot R$-szeresére növeljük, az exponenciális függvényt a t-tengely mentén a $C \cdot R$-szeresére nyújtjuk. Emiatt a feszültség-idő függvény a következő módon változik:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}. \qquad (1)$$

2. táblázat

A kisülő kondenzátor feszültségének csökkenés az idő függvényében

t (s)	U (V)	t (s)	U (V)	t (s)	U (V)
0	8,77	50	6,95	100	5,49
5	8,57	55	6,78	105	5,36
10	8,39	60	6,62	110	5,24
15	8,21	65	6,46	115	5,12
20	8,00	70	6,32	120	5,00
25	7,81	75	6,17	125	4,88
30	7,62	80	6,03	130	4,77
35	7,49	85	5,89	135	4,66
40	7,29	90	5,75	140	4,54
45	7,10	95	5,62	145	4,43

Valósítsuk meg a kisülési folyamatot! A feszültségmérő műszer kijelzőjét vegyük filmre a folyamat során, majd a felvételt megtekintve 5 másodpercenként olvassuk le a kondenzátorfeszültség értékét. A mért adatokat a *2. táblázatba* foglaltam, majd a kisülő kondenzátor feszültségét ábrázoltam az idő függvényében.

A kisülő kondenzátor feszültsége szigorúan monoton módon csökken az idő függvényében. Az is feltűnik, hogy a csökkenés üteme lassul a folyamat során (*5. ábra*). A csökkenés sebessége feleződik a vizsgált körülbelül 2,5 percben. Amennyiben a kondenzátor feszültsége exponenciálisan csökken az időben, akkor az

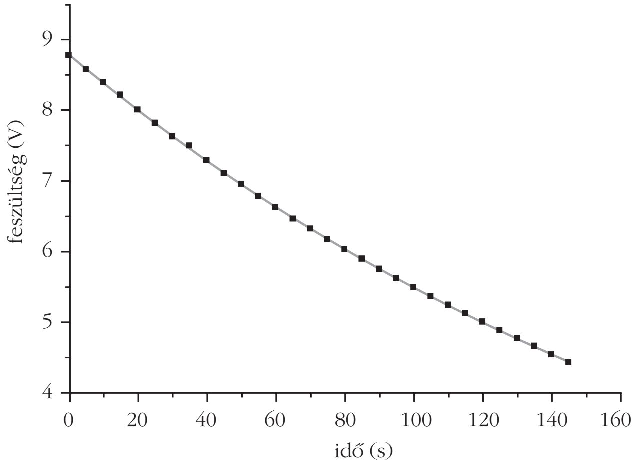
$$\lg\left(\frac{U(t)}{U_0}\right)$$

lineárisan függ az időtől. Készítsük el a *3. táblázatot,* majd az új grafikont.

3. táblázat

A kondenzátor relatív feszültségcsökkenésének logaritmusa az idő függvényében

t (s)	$\lg(U/U_0)$	t (s)	$\lg(U/U_0)$	t (s)	$\lg(U/U_0)$
0	0,0	50	–0,101	100	–0,203
5	–0,01	55	–0,112	105	–0,214
10	–0,019	60	–0,122	110	–0,224
15	–0,029	65	–0,132	115	–0,234
20	–0,04	70	–0,142	120	–0,244
25	–0,05	75	–0,152	125	–0,255
30	–0,061	80	–0,162	130	–0,264
35	–0,069	85	–0,173	135	–0,275
40	–0,08	90	–0,183	140	–0,286
45	–0,092	95	–0,193	145	–0,297



5. ábra. A kondenzátor feszültsége exponenciálisan csökken kisülés közben.

A *6. ábra* szerint az értékpárok által meghatározott pontokra egyenes illeszthető, amelynek meredeksége

$$m = -0{,}00205\ 1/\mathrm{s}\ (\pm 0{,}45\%).$$

A (1) egyenletet rendezve, majd mindkét oldal logaritmusát véve, a következőt kapjuk:

$$\lg\left(\frac{U}{U_0}\right) = -\frac{\lg e}{R \cdot C} \cdot t,$$

amelynek meredeksége

$$m = -\frac{\lg e}{R \cdot C}.$$

Az e-szám kifejezhető az m meredekséggel:

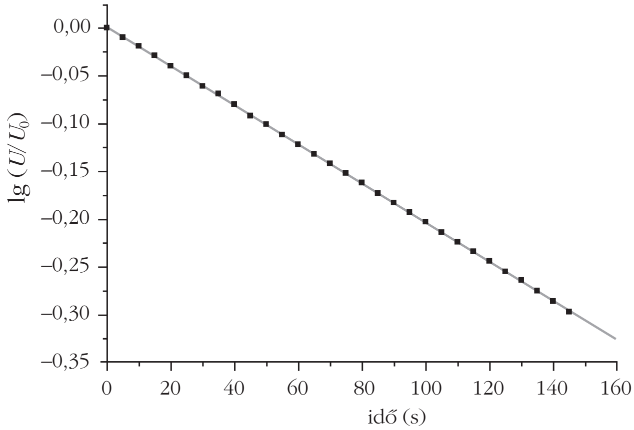
$$\lg e = -m \cdot R \cdot C.$$

A mérés során használt ellenállás értéke R = 82 kΩ, a kondenzátor kapacitása C = 2200 μF. Behelyettesítés után:

$$e = 10^{-m \cdot R \cdot C} = 2{,}34.$$

Ez körülbelül 14%-kal kisebb az Euler-féle szám valódi értékénél.

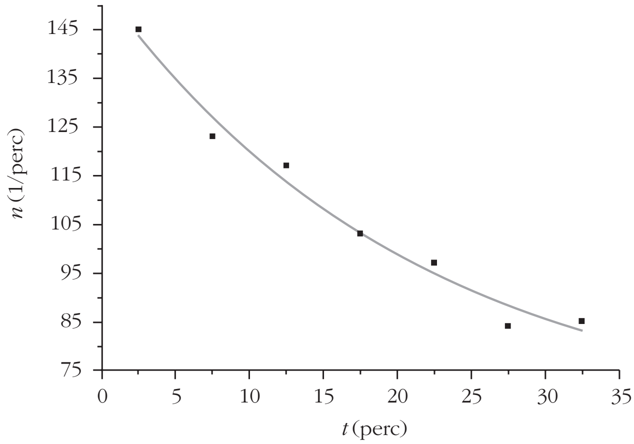
6. ábra. A kisülő kondenzátor relatív feszültségének logaritmusa lineárisan függ az eltelt időtől.



4. táblázat

A beütésszám-intenzitás csökkenése az idő függvényében

t (perc)	n (beütés/perc)
2,5	145
7,5	123
12,5	117
17,5	103
22,5	97
27,5	84
32,5	85



7. ábra. A háttértől megtisztított, radioaktív bomlásból származó beütésszám-intenzitás exponenciálisan csökken az idő függvényében.

Radioaktív bomlás vizsgálata

A radioaktív bomlás véletlenszerű jelenség. Azt nem tudjuk megmondani, hogy melyik atommag mikor fog elbomlani, de megállapítható, hogy egy atommag mekkora valószínűséggel bomlik el a következő 1 másodpercben. Ez a fizikai mennyiség a λ-val jelölt bomlási állandó, mértékegysége 1/s. Ennek alapján felírhatjuk a radioaktív magok ΔN számának változását Δt idő alatt:

$$\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t.$$

Azt látjuk, hogy a radioaktív magok száma olyan mennyiség, aminek változása arányos annak pillanatnyi értékével. A korábban vizsgált kondenzátor feszültsége kisülés közben hasonló tulajdonságú mennyiség volt. Az ott leírtak analógiájaként megállapíthatjuk a radioaktív magok számának időfüggését:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \qquad (2)$$

A radioaktív bomlást a legtöbb középiskola szertárában megtalálható Geiger–Müller-számláló segítségével tanulmányozhatjuk, és a mért adatok segítségével a bomlási állandó meghatározható. Radioaktív mintát igen könnyedén előállíthatunk, például a következő módon: egy porszívó csövét néhány réteg gézzel kössük be. Üzemeltessük a gépet fél-egy órán keresztül egy rosszul szellőző helyiségben, például egy pincében. Ügyeljünk arra, hogy ne a padlóról szívjuk fel a port, hanem a porszívó csövét körülbelül 1 méter magasan tartva áramoltassuk át rajta a helyiség levegőjét. Amíg a porszívó dolgozik a pincében, addig a tanteremben megmérjük a háttérsugárzást. Több mérés átlagát véve a háttérsugárzás 27 (± 5) beütés/perc-nek adódott. A porszívót kikapcsolva, meglepődve tapasztaljuk, hogy a rajta átáramoltatott levegő mennyi port hagyott a gézen, a fehér anyagon egy kör alakú fekete folt jelent meg. Most helyezzük a radioaktív mintánkat a GM-cső ablaka alá. Ismét mérjük a beütésszámot egyperces intervallumokban, majd a háttér értékeit levonva, az adatokat foglaljuk táblázatba. Az így nyert adatok igen nagy fluktuációt mutatnak, gyakorlatilag feldolgozhatatlanok. Emiatt célszerű az adatokat 5 perces intervallumokra mozgóátlagolni, azaz az egymást követő 5 perces időintervallumokra vegyük az adatok átlagát, és azt a középső időponthoz rendeljük hozzá (*4. táblázat*)!

A beütésszám-idő függvény grafikonját (*7. ábra*) szigorúan monoton csökkenőnek kell látnunk. Azonban amikor az aktivitás már annyira csökken, hogy a bomlás miatt várható beütésszám-csökkenés kisebb lesz a beütésszámok statisztikus szórásánál, ez a monoton csökkenés megszűnhet. Erre látunk példát a 32,5 percnél mért értéknél.

Érdemes a másodpercenkénti beütésszámok természetes alapú logaritmusát is ábrázolni (*8. ábra*) az idő függvényében.

Az $\ln(n) - t$ összetartozó értékei által meghatározott pontokra egy egyenes illeszthető:

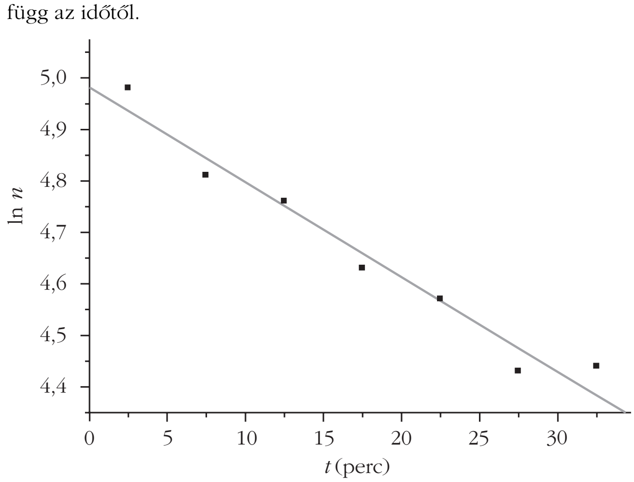
$$\ln n = m \cdot t + \ln n_0,$$

amelynek meredeksége:

$$m = -0{,}01836 \text{ 1/perc } (\pm\, 0{,}002 \text{ 1/perc}).$$

Léteznek egyenesek illesztésére alkalmas programok (például Origin, Excel), amelyek a paraméterértékek mellé a standard hibát is megadják. Az Origin prog-

8. ábra. A 7. ábrán szereplő beütésszámok logaritmusa lineárisan függ az időtől.



ramot használtam. Vegyük a (2) egyenlet mindkét oldalának természetes alapú logaritmusát, majd azt rendezve kapjuk:

$$\ln N = -\lambda \cdot t + \ln N_0 .$$

Miután az *n* beütésszám arányos a radioaktív magok *N* számával, a két idő szerinti lineáris függvénykapcsolat meredeksége egyenlő:

$$\lambda = -m = 0{,}01836 \ \text{1/perc} \ (\pm\, 0{,}002 \ \text{1/perc}).$$

A bomlási állandó ismeretében meghatározható a radioaktív mintánk felezési ideje:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 38 \ \text{perc} \ (\pm 3 \ \text{perc}).$$

Ez természetesen a radioaktív mintánk effektív felezési ideje, ami több anyag (a radon és leányelemei; polónium, bizmut, ólom) együttes aktivitásának jellemzője. Más alkalommal elvégzett mérés nagyságrendileg hasonló, de nagy valószínűséggel más eredményt adna.

A radonproblémáról részletesen lehet olvasni *Piláth Károly* tanár úr interneten elérhető diáin [1].

✧

Ebben az írásban arra vállalkoztunk, hogy az iskolában háttérbe szorult, mégis időnként felbukkanó Euler-féle *e*-szám természetét jobban megvilágítsuk. Elemi matematikai eszközök segítségével függvénytani értelmezést kerestünk és találtunk, hiszen a fizikai alkalmazások ezt igénylik.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm *Sükösd Csabának* (BME) és *Vigh Máténak* (ELTE) a cikk elkészítése során nyújtott segítségüket.

Irodalom

1. https://indico.cern.ch/getFile.py/access?contribId=40&sessionId=1&resId=1&materialId=slides&confId=253187