

A FÖLDFELSZÍN FORGÁSA EGY ÁLTALÁNOS PONTBAN

– kiegészítés a Coriolis-hatás tárgyalásához

Woynarovich Ferenc
MTA, Wigner FK, SZFI

Nemrégiben *Fizika és földrajz határán – tanítható-e a Coriolis-erő?* címmel cikk jelent meg a *Fizikai Szemlében* [1]. Ebben a szerző bemutatja, hogyan lehet a tehetetlenségi erők fogalmának a bevezetése nélkül szemléltetni és kvantitatív vizsgálat tárgyává tenni a tehetetlenül mozgó testek eltérülését forgó koordináta-rendszerben. A cikkben a szerző a legegyszerűbb esettel foglalkozik: a forgástengelytől arra merőlegesen induló, a nyugvó rendszerben egyenesen és egyenletesen mozgó pont forgó rendszerben kirajzolt pályáját elemzi. Ez a leírás, miközben jól szemlélteti a dolog lényegét, a Föld felszínén közvetlenül csak a pólusok közelében alkalmazható, hiszen a földfelszín egy általános pontjához rögzített koordináta-rendszer mozgása sokkal összetettebb annál, mintha valamelyik saroknál lenne. Ezért, ha szeretnénk megérteni és megértetni, hogyan működik mindez egy $0 < \varphi < \pi/2$ szélességi körön, tehát a forgástengelytől távol, arra nem is merőleges síkban, további megfontolásokra és magyarázatokra van szükség.

A kérdés a szögsebesség vektorjellegét ismerve, és a vektoriális szorzat tulajdonságait kihasználva könnyen tárgyalható, de a középiskolások nem tanulnak sem a vektoriális szorzatról, sem a szögsebesség vektor voltáról, ezért olyan leírást kell találni, amely ezeket az eszközöket nem használja. A probléma analóg azzal, hogyan tárgyalható elemi módszerekkel a Fou-

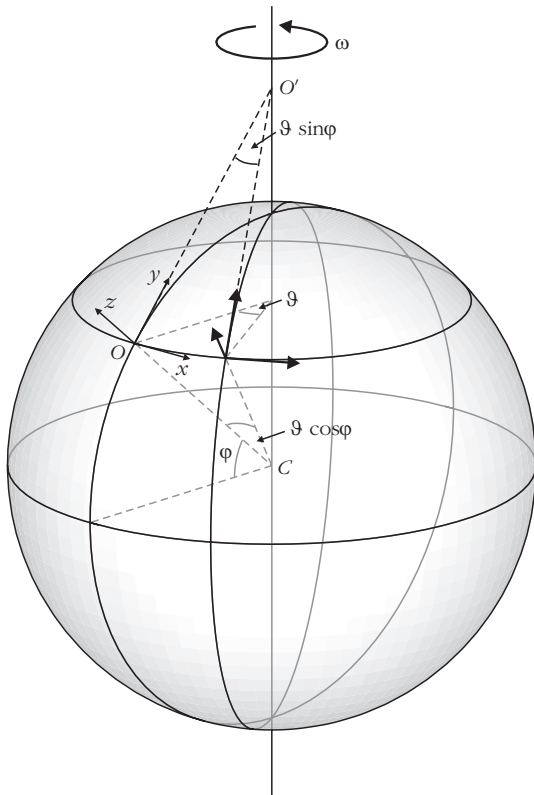
cault-inga síkjának forgása: az is nagyon szemléletes a pólusokon, de nem triviális a pólusoktól távol. Erre egy lehetséges értelmezést ad az „érintő kúp konstrukció” [2], amely arra épül, hogy az inga mozgása a Föld elfordulása során – a gömb felszínén értelmezhető módon – önmagával „párhuzamosan” tolódik el.

Jelen munkában egészen más oldalról, de [1] elemzéséhez jól illeszthető módon közelítünk a kérdéshez: kiválasztjuk a Föld forgásából adódó mozgás azon komponensét, amely lokálisan egy adott pont körüli forgásként érzékelhető.

Amíg a pólusok közelében a földfelszín mozgása egyetlen ω szögsebességű forgás, addig egy általános helyzetű pont környezetében a felszín mozgása három részből tehető össze:

- i. az adott szélességi körön való körmozgás,
- ii. a horizont $\omega \sin \varphi$ szögsebességű forgása,
- iii. a horizont síkjának egy $\omega \cos \varphi$ szögsebességű „elbillenése”.

Ez jól szemléltethető az 1. ábra segítségével. A φ szélességi körön elhelyezkedő O ponthoz illesztett koordináta-rendszer x , y és z tengelye rendre keletre, északra és a zenit felé mutat. Miközben a Föld a tengelye körül ϑ szöggel elfordul, az O pont a pályáján $\vartheta R \cos \varphi$ ívet fut be. Eközben az y tengely mindvégig a tőle $R \cos \varphi$ távolságra levő O' pont felé mutat, ezért a koordináta-rendszer $\vartheta \sin \varphi$ szöggel elfordul az egyébként $\vartheta \cos \varphi$ szöggel kimozduló z tengely körül. Nyil-



1. ábra

ván analóg összefüggések igazak a megfelelő szögsebességekre is.

Bár mindhárom összetevőnek lehetnek furcsa hatásai (hiszen egyik sem inerciális mozgás), a Föld felszínének közelében történő nem túl nagy sebességű mozgások esetében az i. és iii. összetevők hatását elnyomja a gravitációé, és csak az ii. forgást kell figyelembe venni: ez felelős azokért a jelenségekért, amelyeket – mondjuk így – a Coriolis-jelenséggel szoktunk kapcsolatba hozni [3].

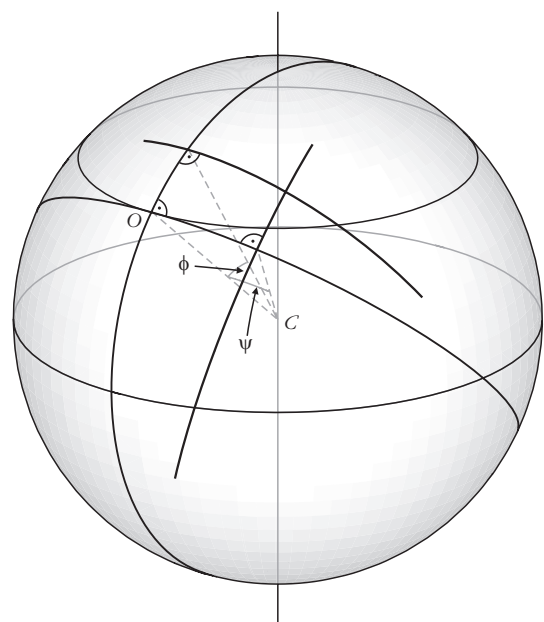
Ha a Föld felszíne a fentiek szerint körülöttünk forog, a tőlünk északra, illetve délre levő pontjai, szemléletünkkel megegyezően nálunk lassabban, illetve gyorsabban haladnak. De mi a helyzet a tőlünk keletre és nyugatra levő pontok mozgásával? Ezeknek északra, illetve délre kellene kitérniük, miközben tudjuk, hogy a sebességük mindig keletre mutat. A látszólagos ellentmondás feloldása abban rejlik, hogy a szélességi körök nem tekinthetők egyeneseknek, a tőlünk keleti (nyugati) irányba eső pontok velünk nem azonos szélességi körön helyezkednek el, és bár sebességük mindig merőleges a *saját* észak-déli irányukra, az nem azonos a mienkkel. Az alábbiakban ennek részleteit mutatjuk be.

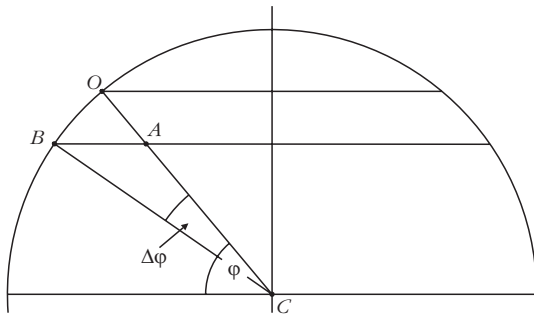
Egy gömb felszínén a főkörök, tehát a gömb középpontjával azonos középpontú körök a geodetikus vonalak. Ezekre igaz, hogy két pont között, a gömb felszínén mérve, a főkör megfelelő szakasza a legrövidebb, és ha ezeket tekintjük *egyenesnek*, elegendően kicsiny középponti szögekhez tartozó alakzatokra jó közelítéssel igazak a síkgeometria tételei. A szokásos hosszúsági és szélességi körök ugyan egy derékszögű

koordinátarendszert alkotnak, amennyiben a meridiánok és a szélességi körök mindig derékszögben metszik egymást, de ez a hálózat még lokálisan (egy adott pont kis környezetében) sem tekinthető Descartes-féle koordinátarendszernek, mert a szélességi körök nem egyenesek (két azonos szélességi körön lévő pont között nem a szélességi körön mért távolság a legkisebb), és a hosszúsági körök sem tekinthetők párhuzamosnak. Az 1. ábra koordinátarendszeréhez legjobban illeszkedő gömbi koordinátarendszert a 2. ábra mutatja. Ennek ordinátatengelye az adott O ponton átmenő meridián, abszcisszatengelye pedig az O ponton átmenő főkörök közül az, amelyik érintője az O pontban éppen kelet-nyugat irányú. Az x , illetve y tengellyel párhuzamos egyenesek szerepét azok a főkörök játsszák, amelyek merőlegesek az y , illetve az x tengelyre (ezeket a cikkben rendezőknek nevezem). Ezek a főkörök a megfelelő tengelymetszetekhez tartozó középponti szögekkel, vagy az ezeknek megfelelő távolságokkal jellemezhetők ($x = R\psi$, $y = R\phi$). Ez a koordinátarendszer „egyenes vonalú”, de szigorúan véve nem derékszögű, viszont – ahogy ezt később látni fogjuk – lokálisan közelíti azt: egy x , $y \neq 0$ pontban a ponthoz tartozó rendezők nem derékszögben metszik egymást, de e szög eltérése a $\pi/2$ -től egészen nagy x és y értékekig igen kicsiny. A koordinátarendszer ezért nagyon jó közelítéssel derékszögűnek tekinthető. (Ennek például a sebességek komponensekre bontásánál van jelentősége.) Fontos megjegyzés: az x tengely és a vele „párhuzamos egyenesek” (főkörök érintője) csak az y tengelyen kelet-nyugat irányúak, az y tengellyel „párhuzamos egyenesek” pedig, ellentétben az y tengellyel, nem meridiánok.

Először azt vizsgáljuk meg, hogy az x tengely pontjainak mekkora a Föld forgásából adódó sebessége. Az oldalnézeti ábrán (3. ábra) az O ponton átmenő meridián (az y tengely) épp a kontúron van, a vízszin-

2. ábra





3. ábra

tes szakaszok szélességi körök, az O pontból a kör C középpontjába húzott egyenes pedig az x tengelyt jelentő főkör vetülete. Az A pont az x tengely egy kiválasztott pontja, a B pont az y tengely és az A ponthoz tartozó szélességi kör metszéspontja, az OA ívhez tartozó ψ középponti szög nem látszik. Megállapíthatjuk, hogy az A pont sebességének nagysága

$$\begin{aligned} v(x, 0) &\equiv R\omega \cos(\varphi - \Delta\varphi) \equiv \\ &\equiv R\omega \cos\varphi + R\omega \sin\varphi \Delta\varphi, \end{aligned}$$

ahol felhasználva, hogy a 3. ábra \overline{AC} szakaszának hossza $R\cos\psi$, a $\Delta\varphi$ -t az

$$R\cos\psi \sin\varphi = R\sin(\varphi - \Delta\varphi)$$

egyenlet határozza meg. Ebből kis ψ esetén ψ -ben vezető rendben

$$\Delta\varphi \equiv \frac{1}{2}\psi^2 \operatorname{tg}\varphi \quad (1)$$

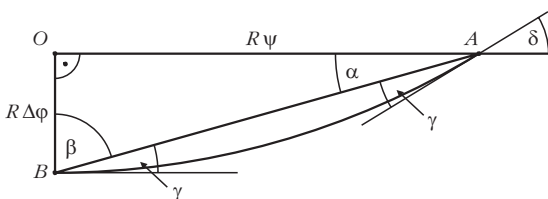
adódik. Az A pont sebességének nagysága tehát

$$v(x, 0) \equiv R\omega \cos\varphi + \frac{1}{2}R\omega \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \psi^2. \quad (2)$$

(Gondosan számon tartva az alkalmazott közelítések hibáját megállapíthatjuk, hogy a $v(x, 0)$ sebesség hibája $O(R\omega\psi^4)$ nagyságrendű.)

A következő lépés e sebesség irányának meghatározása. Mivel ez az A pontban az A -n áthaladó szélességi kör irányával esik egybe, a kérdés az, hogy ez az irány milyen δ szöget zár be az x tengelynek megfelelő OA főkörrel. Ennek meghatározásához a 4. ábrán „kiterített” OAB idomot kell jobban szemügyre vennünk. Az ábrán az \overline{OA} és \overline{OB} szakaszok az x és y tengely megfelelő darabjai, az \overline{AB} egyenes szakasz az A és a B pontokon átmenő főkör, míg az \overline{AB} ív a $\varphi - \Delta\varphi$ -vel meghatározott szélességi kör megfelelő szakasza. Szimmetria miatt az ív és az egyenes szöge A -nál és B -nél meg-

4. ábra



egyeznek. Fontos, hogy az egyenesekkel (főkörökkel) határolt OAB háromszög nagy pontossággal síkháromszögnek tekinthető, tehát a szögek összege π -nek vehető, és hogy az y tengely és a szélességi körök derékszögben metszik egymást, így $\beta + \gamma = \pi/2$. Mindezeket egybevetve

$$\delta = 2\alpha.$$

Mivel az \overline{OA} és \overline{OB} szakaszok hossza rendre $R\psi$, illetve $R\Delta\varphi$, ezért

$$\alpha \equiv \operatorname{arctg} \frac{\Delta\varphi}{\psi} \equiv \frac{\Delta\varphi}{\psi},$$

tehát (1) szerint

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}\psi \operatorname{tg}\varphi.$$

(Figyelembe véve az elhanyagolásokat és a gömbháromszög-síkháromszög közelítés pontatlanságát is, α és δ hibája $O(\psi^3)$.) Ezek alapján az A pont sebessége így írható:

$$v_x(x, 0) = v(x, 0) \cos\delta \equiv R\omega \cos\varphi,$$

$$v_y(x, 0) = v(x, 0) \sin\delta \equiv R\psi\omega \sin\varphi.$$

(Itt $v_x(x, 0)$ számolásakor a ψ -ben kvadratikusan tagok kiesnek, így a kifejezés hibája (2) hibájához hasonlóan legfeljebb $O(R\omega\psi^4)$, de a helyzet ennél jobb: a szögsebesség vektorjellegét kihasználó számolásból tudjuk, hogy $v_x(x, 0)$ kifejezése egzakt, tehát a képlet első sorában \equiv jel helyett egyenlőséget is írhatnánk. A $v_y(x, 0)$ hibájára $O(R\omega\psi^3)$ adódik, ez megegyezik az egzakt kifejezésből kapott $O(R\omega[\sin\psi - \psi])$ nagyságrenddel.)

Ahhoz, hogy egy általános $x = R\psi$, $y = R\phi$ pont sebességét megadjuk, nem kell mást tennünk, mint ebben a képletben φ helyébe a $\varphi + \phi$ összeget helyettesíteni. A kicsiny ψ és ϕ középponti szögekben vezető (lineáris) rendben

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &\equiv R\omega \cos\varphi - R\phi\omega \sin\varphi = \\ &= R\omega \cos\varphi - y\omega \sin\varphi, \end{aligned}$$

$$v_y(x, y) \equiv R\psi\omega \sin\varphi = x\omega \sin\varphi.$$

Ez a sebességkép valóban egy $R\omega \cos\varphi$ sebességű haladó mozgás, és egy $\omega \sin\varphi$ szögsebességű forgás, tehát az i. és ii. mozgások eredőjének felel meg. (Leírásunkban a földfelszín pontjainak sebességét vizsgáltuk egy, a gömbfelülethez illeszkedő koordináta-rendszerben, ezért az iii. mozgás nem látszik. Könnyen belátható, hogyha az adott számolást például az 1. ábra koordináta-rendszere (x, y) síkjának pontjaira végeznénk el, megjelenne egy, a horizont billenésére utaló v_z sebességkomponens is.)

Láttuk tehát, hogy az O origó elég kis környezetében a Föld felszínének az origóhoz viszonyított mozgása valóban az elvárt forgás, azonban érdemes utánagondolni annak, mit is jelent ez az „elég kis környezet”, mekkorák azok a távolságok, amik mellett közelítéseink még megengedhetők. Kétféle közelítést al-

kalmaztunk: egyrészt sorba fejtettük a ϕ és a ψ szögfüggvényeit, másrészt – bár a gömb felszínén számoltunk – az OAB háromszöget síkháromszöggként kezeltük. A ϕ és ψ nagyságrendje még ~ 100 km-es távolságok esetén sem nagyobb, mint $0,02$ radián, tehát a szögfüggvények lezser kezelése megengedhető. Az OAB háromszög esetében a szögek összegét π -nek vettük, de ez még kisebb hibát jelent, mint a sorfejtés. Ugyanis egy főkörívekből álló úgynevezett gömbháromszög gömbi szögfeleslege (a szögeinek összege mínusz π) pontosan $\epsilon = F/R^2$, ahol F a gömbháromszög területe. A területet $R\Delta\phi \cdot R\psi/2$ -vel becsülve $\epsilon \psi^3$ nagyságrendűnek adódik, tehát egész nagy távolságokig emiatt sem kell aggódnunk. Könnyű belátni, hogy egy gömbi négyszög szögfeleslege (tehát a szögeinek összege mínusz 2π) ugyancsak F/R^2 , de most F a négyszög területe. Eszerint egy $x = R\psi$, $y = R\phi$ pontban a rendezők által bezárt szög $\sim \phi \cdot \psi$ radiánnal tér el a derékszögtől, tehát koordinátarendszerünk praktikusán egészen nagy távolságokig derékszögűnek tekinthető. Számolásainkban a legnagyobb elhanyagolást az utolsó lépésben követtük el, amikor a ϕ szerinti kifejtésben csak a ϕ -ben, illetve ψ -ben vezető rendű tagokat tartottuk meg, de még ez is csak ϕ nagyságú relatív hibát okoz a sebesség forgást leíró komponenseiben ($v_x - R\omega \cos\phi$ -ben, illetve a v_y -ban).

Mindent összevetve megállapíthatjuk, hogy sebességképletünk *relatív hibája* egy l lineáris mérettel jellemezhető felületdarabon legfeljebb l/R nagyságrendű. Ez persze nem azt jelenti, hogy olyan nagy kiterjedésű képződmények esetében, amelyeknél ez a pontosság nem elegendő, a megfelelő mozgáskomponens nem tekinthető forgásnak, hanem azt, hogy akkor mindenhol a helyben érvényes szélességnek megfelelő sebességek pontos értékét kell figyelembe venni.

Összefoglalásképpen elmondhatjuk: bemutattuk, hogyan lehet a Föld felszínének mozgását a szögsebesség vektorjellegének kihasználása nélkül leírni. Sajnos ez a leírás sem egyszerű, de elegendő hozzá a középiskolás ismeretanyag, ezért reméljük, tartalmaz olyan elemeket, amelyek szakkörön vagy tagozatos osztályokban elmondhatók, és segítenek megérteni, miért is lép fel, hogyan is érvényesülhet a Coriolis-hatás kelet-nyugati áramlások esetén.

Irodalom

1. Szeidemann Á.: Fizika és földrajz határán – tanítható-e a Coriolis-erő? *Fizikai Szemle* 53/10 (2013) 352–357.
2. Hraskó P.: *Relativitáselmélet*. Typotex Kiadó, Budapest, 2002. 401. old.
3. Lásd például: Jánosi I., Tél T.: Bevezetés a környezeti áramlások fizikájába http://etananyag.ttk.elte.hu/FileS/downloads/EJ-Janosi-Tel_kornyaram.pdf