

## KAOTIKUS VAGY CSAK ÖSSZETETT?

### – Labdák pattogása lépcsőn

Gruiz Márton – ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

Meszéna Tamás – Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma Pécs, a Fizika tanítása PhD program hallgatója

Tél Tamás – ELTE Elméleti Fizikai Tanszék és MTA-ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

*A cikk célja, hogy kiderítse, kaotikus-e a pontszerű labdák lépcsőn lefelé történő pattogó mozgása. Az ütközések koordinátaira egyszerű rekurziós szabályt vezetünk le, amelyek alakjából azonban nem olvasható le a kaotikusság megléte vagy hiánya. A numerikus szimulációk arra utalnak, hogy előbb-utóbb mindig állandósult mozgás alakul ki, amelynek jellege rendszerint kváziperiodikus. Az ütközési együtthatótól való függés meglehetősen bonyolult is lehet, káoszra utaló jelet azonban nem találunk. A számítások matematikai igénye a középiskolai szintet nem haladják meg, az olvasónak a jelenséggel való ismerkedését a <http://crnl.hu/lepcso> oldalon minden előismeret nélkül futtatható programok segítik.*



Gruiz Márton fizikatanár szakon végzet az ELTE-n 2000-ben. Egyetemi éve alatt érdeklődése a káoszelmélet felé fordult, a témában írt TDK-dolgozata különdíjjal részesült és országosan II. helyezést ért el. Tél Tamással írt káosz tankönyve magyar és angol nyelvű kiadása alapján 2009-ben PhD fokozatot szerzett. Az ELTE Elméleti Fizikai Tanszék tudományos munkatársa, az ELTE Fizika Doktori iskola és a Kaotikus mechanika speciális kollégium alkalmi előadója.



Meszéna Tamás matematika-fizika-számítástechnika szakos tanárként végzett az ELTE-n 1987-ben. 29 éve tanít gimnáziumban, 21 éve Pécsen, a Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziumában, ahol negyedik éve igazgatóhelyettes. 2011 óta az ELTE Fizika Doktori Iskola Fizika tanítása program PhD hallgatója, témavezetője Gruiz Márton, kutatási témája a káoszelmélet gimnáziumi tanítási lehetőségeinek vizsgálata.



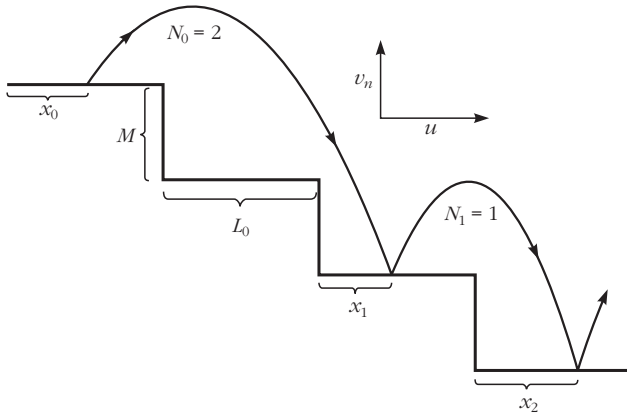
Tél Tamás az ELTE-n szerzett fizikus diplomát 1975-ben. Doktori dolgozatát Szépfalussy Péter vezetésével írta 1977-ben. Azóta – külföldi vendégkutatói tartózkodásaitól eltekintve – az ELTE Elméleti Fizikai tanszékén dolgozik különböző beosztásokban. Kutatási témái a nemegyensúlyi rendszerektől a klímadinamikáig terjednek. 2007 óta vezeti a Fizika tanítása doktori programot, 2011 óta az MTA-ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoportot.

Egy osztrák gimnáziumi tankönyvben több, közismeretlen kaotikus mozgással járó jelenség bemutatása között azt olvashatjuk, hogy a labda lépcsőn történő pattogása is kaotikus [1]. A szerzők elvileg nem gondolhattak a gumilabdára, amelyben a pattogások között rugalmas hullámok is terjednek, hiszen az térben is lejátszódó, magas szabadsági fokú dinamika lenne. Alacsony dimenziójú leírást tekintve válasszuk a leg egyszerűbbet, a pontszerű labdát feltételező (tehát a labda forgását elhanyagoló) modellt! Feltesszük, hogy a labda egy hosszú lépcsősoron rugalmasan pattog, a mozgás során az ütközési együttható értéke  $k < 1$  állandó. A lépcsőt sima vízszintes és függőleges felületekből összetettnek tekintve, egy biliárd-problémát definiálunk, amely szemben a szokásos biliárdokkal (például stadion biliárd [2]) gravitációs erőterben értelmezett. Ezért az ütközési energiavesztés mellett energianövekedés is felléphet a magasság csökkenése következtében. Első ránézésre nehéz eldönteni, hogy lehet-e kaotikus a mozgás: a sima vízszintes felület a káosz ellen szól (hiszen síktükröként, vagyis nem szóróként viselkedne fényvel való megvilágítás esetén), a lépcső élei, a fokok végén lévő pontszerű törések viszont esetleg mellette. Ezért alaposabban vizsgáljuk meg a mozgást, egyszerű (középiskolai szintű) levezetéseket és szimulációkat használva.

### A modell

Legyen az egyes lépcsőfokok hossza  $L$ , magasságuk  $M$  és a lépcső lejtse balról jobbra (*1. ábra*). Mivel az ütközési együttható 1-nél kisebb, a labda beesési sebességének *függőleges*  $v$  komponense minden ütközéskor  $k < 1$ -szeresére változik. Az  $u > 0$  vízszintes komponens időben végig állandó marad. A tájékozódás kedvéért megadjuk tömör, azonos anyagú golyóval ütköző golyók ütközési együtthatóját [3] szerint: üveg, elefántcsont 0,9; acél 0,7; ólom 0,2; saját méréseink alapján pedig: tömör gumi 0,8; fagolyó 0,3, illetve néhány labda tipikus ütközési együtthatója kőlap-

Köszönjük *Károlyi Györgynek* a kéziratot kapcsolatos hasznos észrevételeit, *Páll Csabának* pedig a honlapon található programok megírásában nyújtott segítségét. A munka az NK100296 OTKA pályázat támogatásával készült.



1. ábra. Az  $L$  hosszúságú és  $M$  magasságú fokokkal rendelkező lépcsőn pattogó labda pályája és jellemző adatai: az  $n$ -ik ütközés helye  $x_n$ , a visszapattanás utáni függőleges sebesség  $v_n$ , a vízszintes állandó sebesség  $u$ , és az  $n$ -ik ütközés után átgugrott lépcsőfokok száma  $N_n$ .

ról visszapattanva: pingponglabda 0,8; focilabda 0,7; teniszlabda 0,7; felfújt gumilabda 0,4.

Célunk, hogy kapcsolatot találjunk az  $n$ -ik és az  $n+1$ -ik ütközés hely- és sebességadatai között. Az egyszerűség kedvéért helyezzük koordináta-rendszerünket minden ütközéskor azon lépcsőfok a bal szélére, amelyen az ütközés történik. (Ez azt jelenti, hogy az ütközés  $x$  koordinátáját mindig visszatoljuk a  $(0, L]$  intervallumba.)

Legyen az  $n$ -ik ütközés koordinátája  $x_n$  és a visszapattanás utáni függőleges sebesség  $v_n$ . A labda – visszapattanás óta eltelt  $t$  idővel kifejezett – magassága a lépcső felszínétől mérve

$$y(t) = v_n t - \frac{g}{2} t^2,$$

miközben az origótól mért vízszintes távolsága

$$x(t) = x_n + u t.$$

A következő ütközésig eltelt  $\Delta t_n$  idő meghatározásához célszerű feltenni, hogy ismert, hány lépcsőfokkal lejjebb pattan legközelebb a labda. (Persze most még nem tudjuk ezt a számot, de később látni fogjuk, hogyan határozható meg.) Legyen ez az  $N_n$  egész szám, amely fontos változó lesz a továbbiakban. A repülési idő kiszámításához felhasználjuk, hogy a következő,  $n+1$ -ik ütközéskor a labda az  $y = -MN_n$  magasságban elhelyezkedő lépcsővel találkozik, azaz

$$v_n \Delta t_n - \frac{g}{2} (\Delta t_n)^2 = -MN_n,$$

amiből

$$\Delta t_n = \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n} + v_n}{g}.$$

A becsapódás

$$v_n - g\Delta t_n = -\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n}$$

függőleges sebességgel történik. A visszapattanási se-

besség e sebesség ellentettjének  $k$ -szorososa, így közvetlenül az  $n+1$ -ik ütközés után a függőleges sebesség

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n}. \quad (1)$$

Ekkor a labda az origótól vízszintes irányban  $x_n + u\Delta t_n$  távolságra, jobbra van.  $N_n$  nem más, mint az a szám, amely megadja, hogy ebben a távolságban hányszor van meg az  $L$  lépcsőhossz.  $\Delta t_n$ -t behelyettesítve,

$$N_n = \left\lceil \frac{x_n + \frac{u}{g} \left( v_n + \sqrt{v_n^2 + 2gMN_n} \right)}{L} \right\rceil, \quad (2)$$

ahol a szögletes zárójel az egész részt jelöli. Ha a (2) egyenletnek több megoldása is lenne, akkor közülük a legkisebb  $N_n$ -re van szükségünk. A keresett  $N_n$  kifejezhető tehát az  $n$ -ik ütközés adataival és a paramétereivel.

A lépcsőfokra helyezett koordináta-rendszerben az ütközés utáni  $x_{n+1}$  koordináta a vízszintes elmozdulás és az  $LN_n$  különbsége, azaz

$$x_{n+1} = x_n + \frac{u}{g} \left( v_n + \sqrt{v_n^2 + 2gMN_n} \right) - LN_n. \quad (3)$$

Az (1)–(3) rendszer egyfajta mozgásegyenletet, leképezést alkot,<sup>1</sup> megadja a következő ütközés  $x_{n+1}$  hely- és  $v_{n+1}$  sebesség-koordináta értékét az előző  $x_n$ ,  $v_n$  ismeretében, az  $N_n$  mennyiség kiszámításának közbeiktatásával.<sup>2</sup>

## Dimenziótlan alak

Érdeemes felismerni, hogy a mozgásegyenletek írhatók egyszerűbb alakban is, olyanokban, amelyek nem függnek már például külön-külön a lépcső hosszától és magasságától, csak a meredekség abszolút értékének  $m = M/L$  értékétől. Ezt akkor kapjuk, ha (3)-at  $L$ -lel osztva olyan alakba rendezzük át, amely a helyet a lépcsőhosszhoz viszonyítva adja meg, és ezzel egyidejűleg a sebességet is a konstans  $u > 0$  vízszintes sebességhez viszonyítva adjuk meg, vagyis mindenütt  $v_n/u$ -t szerepeltetjük:

$$\frac{x_{n+1}}{L} = \frac{x_n}{L} - N_n + \frac{u^2}{gL} \left( \frac{v_n}{u} + \sqrt{\left( \frac{v_n}{u} \right)^2 + \frac{2gL}{u^2} m N_n} \right). \quad (4)$$

<sup>1</sup> Vegyük észre, hogy a leképezés segítségével a ferde hajítás paraboláivének kiszámítása nélkül, közvetlenül kapjuk meg a becsapódási adatokat.

<sup>2</sup> Mivel  $x_{n+1}$  definíció szerint 0 és  $L$  közé esik,  $x_{n+1}/L$  egész része nulla, és  $L$ -lel való osztás után (3) egész részét véve visszkapjuk (2)-t. Ez azt jelenti, hogy  $N_n$  megkapható úgy is, hogy (3)-ban addig írunk egész számokat  $N_n$  helyébe, amíg  $L$ -nél kisebb, de pozitív megoldást nem találunk  $x_{n+1}$ -re.

Vegyük észre, hogy itt  $m$ -en kívül már csakis egy paraméter, a  $gL/u^2$  kombináció jelenik meg, amelyet ezentúl *hosszparaméternek* nevezünk és  $H$ -val jelölünk. Ha hasonlóan elemezzük a másik két egyenletet, azokban *sem* találkozunk újabb paraméterekkel.

Hasznos ezért a  $v/u \rightarrow v$ ,  $x/L \rightarrow x$  helyettesítéssel definiált dimenziótlan változókra, vagyis az  $u$  egységében mért  $v$  (függőleges) sebességre és a  $L$  egységében mért  $x$  helykoordinátára áttérve felírni az egyenleteket. Ebben a jelölésben

$$v_{n+1} = k \sqrt{v_n^2 + 2 m H N_n}, \quad (5)$$

$$N_n = \left[ x_n + \frac{1}{H} \left( v_n + \sqrt{v_n^2 + 2 m H N_n} \right) \right], \quad (6)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{H} \left( v_n + \sqrt{v_n^2 + 2 m H N_n} \right) - N_n. \quad (7)$$

Jól látjuk, hogy a mozgás összesen három adattól, a

$$k, \quad m \equiv \frac{M}{L}, \quad H \equiv \frac{Lg}{u^2}$$

kombinációktól függ, vagyis a  $k$  ütközési együtthatótól, az  $m$  meredekségtől és a  $H$  hosszparamétertől (míg az eredeti (1)–(3) alakban még 5 paraméter,  $k$ ,  $M$ ,  $L$ ,  $u$  és  $g$  szerepelt). Utóbbi különösen érdekes, azt mutatja meg, hogy az  $u$  vízszintes és  $u$  függőleges kezdősebességű (tehát  $45^\circ$ -os) ferde hajítás  $u^2/g$  féltávolsága hányszor fér rá a lépcső  $L$  hosszára. Szemléletesen: minél kisebb  $H$ , annál apróbb lépcsőfokokat kell az  $u$  vízszintes sebességgel repülő labda íve alá képzelni. A hosszparaméter megjelenése azt jelenti, hogy adott labdával, adott meredekségű lejtőn a  $4L$  hosszúságú lépcsőfokokon  $2u$  vízszintes sebességgel mozgó labda éppúgy mozog, mint az  $L$  méretű lépcsőfokokon  $u$  sebességgel mozgó (és ugyanúgy, mint a Holdon a  $6L$  hosszúságú lépcsőfokokon  $u$  sebességgel mozgó). A hosszparaméter tehát a lépcső hosszát nem geometriai, hanem dinamikai szempontból jellemzi, a mozgásra jellemző adatokkal veti össze.<sup>3</sup> Hosszú lépcsőfokokról a továbbiakban akkor beszélünk, ha a  $H$  hosszparaméter elegendően nagy, pontosabban (lásd *1. feladat*), ha  $H > 2m$ .

### 1. feladat<sup>4</sup>

Annak érdekében, hogy a hosszparaméter jelentését más oldalról is megvilágítsuk, mutassuk meg, hogy egy lépcsőfok végpontjáról vízszintes  $u > 0$  sebességgel indított labda a lépcsőfok hosszának  $x_f$ -szeresénél ütközik először az alatta lévővel, ahol

$$x_i = \sqrt{\frac{2m}{H}}.$$

<sup>3</sup> Szellemében hasonló az áramlások Reynolds-számához, vagy még inkább Froude-féle számához.

<sup>4</sup> A feladatok részletes megoldásai a [crl.hu/lepcso](http://crl.hu/lepcso) honlapon megtalálhatók.

Adott  $m$  meredekségű lépcsőn a lépcsőfokok akkor tekinthetők hosszúnak, ha ez az arány kisebb egynél, azaz  $H > 2m$ .

Az épületekben előforduló lépcsőfokok körülbelül kétszer olyan hosszúak mint magasak, ezért az  $m = 1/2$  meredekséget fogjuk használni. Az ütközési együtthatót széles tartományban változtatjuk, és a jobb áttekinthetőség kedvéért, a sebességhez képest hosszú lépcsőfokokot vizsgálunk a  $H \in [2, 8]$  intervallumból.<sup>5</sup> *Alapesetnek* a  $H = 4$  választást vesszük, amikor  $H/2m = 4$ , vagyis vízszintesen indulva az első ütközés a lépcsőhossz felénél történik.

### Egyszerű periodikus pattogás

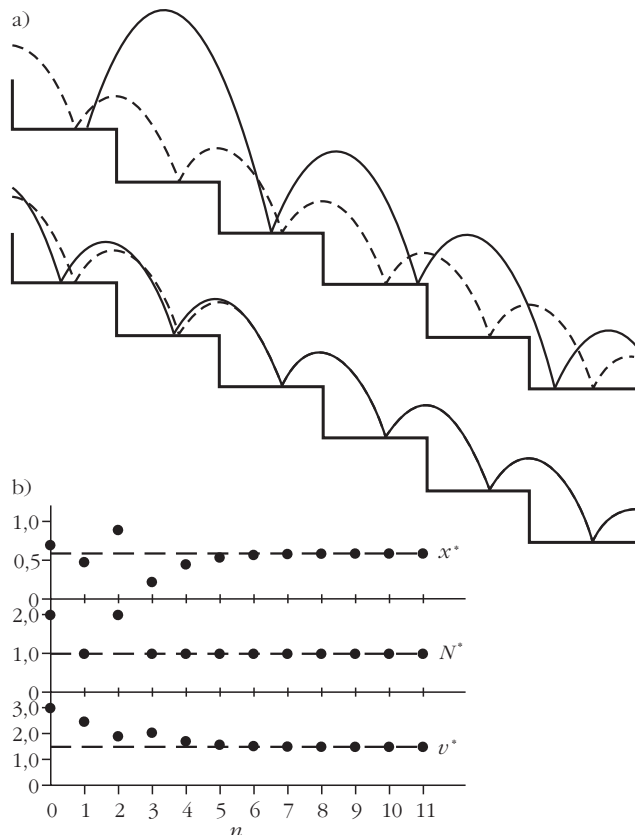
A nem túl kis ütközési együtthatójú esetekben, azaz ha a labda nem kezd el csúszni valamelyik lépcsőfokon (részleteket a csúszásról lásd majd *A csúszásba történő átmenet* fejezetben), akkor *mindig* azt tapasztaljuk, hogy előbb-utóbb egy állandósult mozgást felvéve pattog lefelé. Ezen mozgás alatt teljesül az, hogy az ütközések miatt elvesztett energiát a gravitációs tér éppen kompenzálja, a mozgás függőleges átlagsebessége állandó. Az ütközési veszteség egyfajta disszipáció, aminek következtében a rendszer „elfelejti” kezdőállapotát. A kezdőfeltételek széles osztályából tehát ugyanaz az állandósult mozgás alakul ki végül, vagyis egy bizonyos mozgásállapot felé „vonzódnak” a labdák, amit így „attraktornak” is nevezhetünk.

A *2. ábrán* bemutatott mozgás körülbelül az ötödik pattanástól kezdve ismétlődik. Itt a legegyszerűbb attraktort, a periodikus ugrálás attraktorát ismerhetjük fel. A b) betétábra mutatja, hogy az  $x_n$ ,  $v_n$ ,  $N_n$  sorozatok maguk is konstans értékhez, fixpontokhoz tartanak.

Annak érdekében, hogy az érdeklődő olvasók interaktív módon is megismerkedhessenek a jelenséggel, a [crl.hu/lepcso](http://crl.hu/lepcso) honlapon elérhetővé és kipróbálhatóvá tettünk néhány programot, amelyek különböző paraméterekkel és kezdőfeltételekkel rajzolják ki a labda mozgását a lépcsőn.<sup>6</sup> A paraméterek megadása után a *Lépcső* nevű program ábrázolja az  $m$  meredekségű lépcsőt, és a rajta elindított pattogó labda pályájának a rajzterületbe eső részét. A következő programok az egyes pályákra jellemző  $x_n$ ,  $v_n$  és  $N_n$  értékeket mutatják  $n$  függvényében, a *Fázistér* programok pedig az  $x_n$ ,  $v_n$  és  $N_n$  koordináták által kifeszített térben (az úgynevezett fázistérben) ábrázolják a mozgást (kiválasztható, hogy melyik két

<sup>5</sup> Az említett  $H$  tartomány meghatározásának nem matematikai okai vannak, hanem megítélésünk szerint körülbelül ezen paraméterek jellemzők a valós lépcsőkön lepattogó nem nagy vízszintes sebességű valós labdákra. A szóban forgó paramétertartományon belül kvalitatíve azonos mozgásformákat találtunk.

<sup>6</sup> Mindegyik program JavaScriptben íródott (a forráskód is elérhető), tetszőleges böngészővel futtatható (az adatbevitelnél php részt tartalmaz).



2. ábra. Pattogás  $k = 0,6$  ütközési együtthatóval ( $m = 0,5, H = 4$ ). a) Az  $x_0 = 0,7, v_0 = 3$  kezdőfeltétellel indított pálya (a folytonos görbe, az alsó lépcsősoron a felsőről lelépő mozgások folytatódnak) és b) a pattogások adatainak  $x_n, N_n, v_n$  sorozata. Mindkettő ábrán a szaggatott görbe az attraktor pályája és a szaggatott vízszintes vonalak az attraktorhoz tartozó fixpontértékeket mutatják, amelyeket rövid transziensek után elér a rendszer. Az ezzel az ütközési együtthatóval zajló pattogások kivétel nélkül *mind* az egyszerű periodikus egylépcsősnyi pattogás attraktorához tartanak, amelyre a (8), (9) szerint  $v^* = 1,5$  és  $N^* = 1$ . Az  $x^*$  függ a kezdőfeltételtől, esetünkben  $x^* = 0,592$ .

koordináta jelenjen meg a síkban). A grafikonokon ábrázolt értékek a *Táblázat*-ban numerikusan is megtekinthetők.

A mozgásegyenletről következik, hogy a sebesség és a lépésszám fixpontértékei

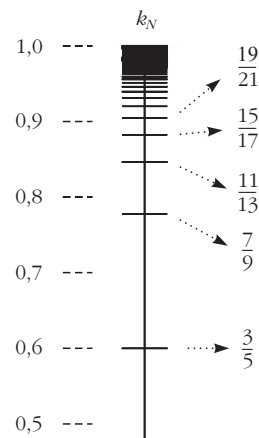
$$v^* = 2m \frac{k}{1-k}, \quad (8)$$

$$N^* = \frac{2m}{H} \frac{1+k}{1-k}. \quad (9)$$

### 2. feladat

Mutassuk meg, hogy ezek az eredmények következnek az (5)–(7) egyenletekből! Természetesen a pontos ismétlődést feltételezzük, vagyis:  $x_n = x_{n+1} = x^*, v_n = v_{n+1} = v^*, N_n = N_{n+1} = N^*$ .

Külön megfontolást igényel, hogy  $N^*$  definíció szerint csak egész szám lehet. Ezért úgy érdemes eljárni, hogy  $N^*$  értékét úgy vesszük fel, mint az  $N$  egész számot, és keressük a megfelelő ütközési együtthatóérté-



3. ábra. A periodikus ugrásokhoz tartozó  $k_N$  spektrum grafikus ábrázolása (10) alapján  $m = 0,5, H = 4$  esetén.  $N$  növelésével a  $k_N$  értékek egymást egyre sűrűbben követve szigorúan monoton növekednek.

eket. A (9) egyenletről az következik, hogy csak az alábbi *diszkrét*  $k$  értékek jöhetnek szóba:

$$k_N = \frac{\frac{NH}{2m} - 1}{\frac{NH}{2m} + 1}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Ezt az *ütközési együtthatók spektrumának* nevezhetjük, hiszen periodikus pattogás csak kivételes  $k$  értékeknél történhet, hasonlóan ahhoz, hogy a hidrogénatom energiaszintjei is csak diszkrét értékek lehetnek [4, 5]. A  $H = 4$  választással például az egy lépcsőt átugró periodikus megoldáshoz  $k_1 = 3/5 = 0,6$ , a két lépcsőt átugróhoz  $k_2 = 7/9 = 0,77$  tartozik.<sup>7</sup>

Érdekes következmény: ahhoz, hogy  $N = 1$  mint fixpont megvalósulhasson, teljesülni kell annak, hogy  $k_1 > 0$ , azaz  $H > 2m$ . A legegyszerűbb egylépcsősnyi periodikus pattogás tehát csak elegendően hosszú lépcsőfokok esetén fordulhat elő. „Rövidebb” lépcsőhossz esetén ugyanis az egy idő után beálló pattogás során az attraktoron a labda mindig átugrik néhány lépcsőfokot. Ugyanakkor nagy  $H$  esetén már az egyszeres pattogás is csak nagy ütközési együtthatókkal valósulhat meg.

A 3. ábra alapesetünk ütközési együttható-spektrumát mutatja grafikusán.

### 3. feladat

A (10) összefüggés alapján adjuk meg, mekkora  $H$  paraméter mellett figyelhetünk meg legalább  $N$  lépcsősnyi ugrásokat mutató periodikus pattogást!

### 4. feladat

Mekkora a függőleges sebesség fixpontértéke a spektrum  $N$ -ik szintjén?

<sup>7</sup> Az ütközési paraméterek lehetséges értékei kizárólag az  $NH/2m$  aránytól függenek, és a (10) kifejezésből látszik, hogy minél hosszabb a lépcsőfok, minél nagyobb az  $NH/2m$ , annál nagyobb  $k_N$  esetén tud csak megvalósulni az  $N$  lépcsősnyi periodikus pattogás (lásd még az 5. feladatot).

### 5. feladat

A 3. ábráról látszik, hogy a spektrum nagy  $N$  értékekre (a hidrogénatom spektrumához hasonlóan) besűrűsödik, miközben a  $k$  értékek közelítenek 1-hez. Mutassuk meg, hogy ebben a tartományban jó közelítéssel

$$k_N = 1 - \frac{4m}{H} \frac{1}{N}, \quad N \gg 1. \quad (11)$$

A 2. ábránál a  $k_1 = 0,6$  eset kapcsán már említett azon tulajdonság, hogy  $x^*$  nem egyértelmű (tehát függ a kezdőfeltételtől), minden  $k_N$  értékre igaz. Ennek oka rögtön világossá válik, ha ismét a 2. ábra a) képére tekintünk, és észrevesszük: az attraktorhoz tartozó mozgás fontos jellemzője nem más, mint a hosszú idő utáni pattogások parabolaívei. Egy adott parabolaívhez pedig meghatározott  $N$  és  $v$  érték ( $N^*$  és  $v^*$ ) tartozik, ellenben  $x^*$  már különböző lehet.<sup>8</sup>

## Kettes ciklusok

Állandósult mozgásként előfordulhat az is, hogy a pattogás csak minden második ütközés után ismétlődik. Ez azt jelenti hogy az első és a második ütközés között  $N$  lépcsőt, a következő ütközésig  $K$  lépcsőt ( $N, K$  pozitív egész számok) repül át a labda, és azután szigorúan ez ismétlődik. A 4. ábra mutat egy ilyen kettes ciklus attraktort (szaggatott görbe), és azt is, hogy az adott kezdőfeltételtől hogyan jutunk el ehhez.

Érdekes, hogy az ilyen kettes ciklusok is csak *kivételes*, az  $N$  és  $K$  számok által meghatározott  $k$  értékek-nél következhetnek be. Az ezen a számokhoz tartozó  $k_{N,K}$  ütközési együttható egyértelműen meghatározható. Közülük a legkisebb a  $k_{1,2}$  érték – alapesetünkben – (lásd 4. ábra):  $k_{1,2} = 0,715$ , amely a két legegyszerűbb periodikus pattogás  $k_1$  és  $k_2$  ütközési együtthatója közé esik.

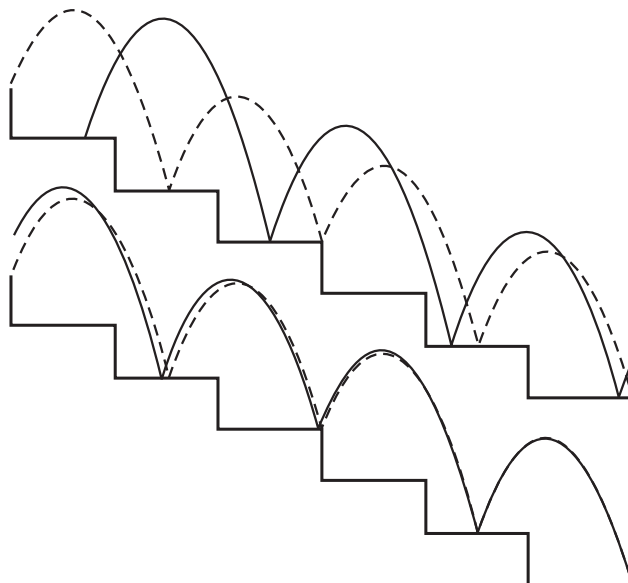
### 6. feladat

Vezessük le a  $k_{N,K}$  ütközési együttható-spektrumot meghatározó „sajátérték-egyenletet”!

## Mozgás tetszőleges $k$ értékekkel

Tetszőleges ütközési együttható esetén, vagyis amikor  $k$  nem az egyes vagy a kettes ciklusnak megfelelő nagyságú, hanem valamilyen köztes értékű, akkor hosszú távon mindig *kváziperiodikus mozgás*

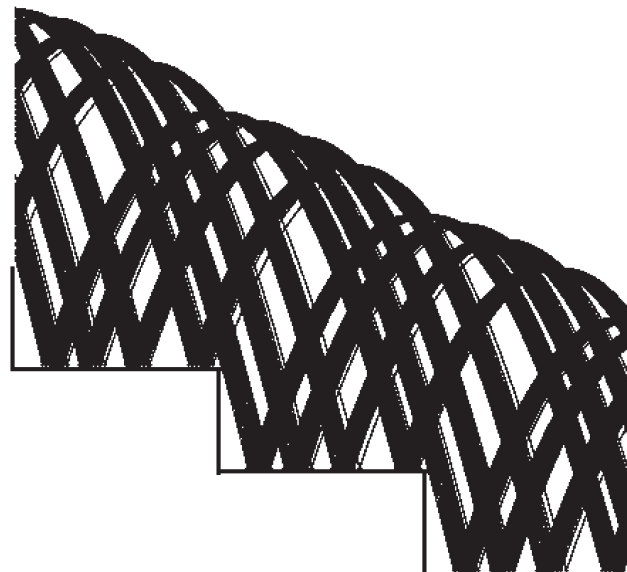
<sup>8</sup> A pattogó labda ugyanis semmit sem „vesz észre” abból, ha „attraktoríve” alatt a lépcsőt jobbra-balra tologatjuk, hiszen továbbra is ugyanakkora egymás utáni magasságkülönbségekkel rendelkező vízszintes felületeken fog pattogni. A lépcsővel más „kapcsolata” pedig nincs. Persze csak addig tologathatjuk, ameddig az ív és a lépcső geometriája azt megengedi. Könnyen belátható, hogy periodikus attraktoroknál a lépcsőfokok bal oldalának egy része geometriai okokból „holt terület” lesz, viszont a fennmaradó rész összes  $x$  értéke már lehet  $x^*$ .

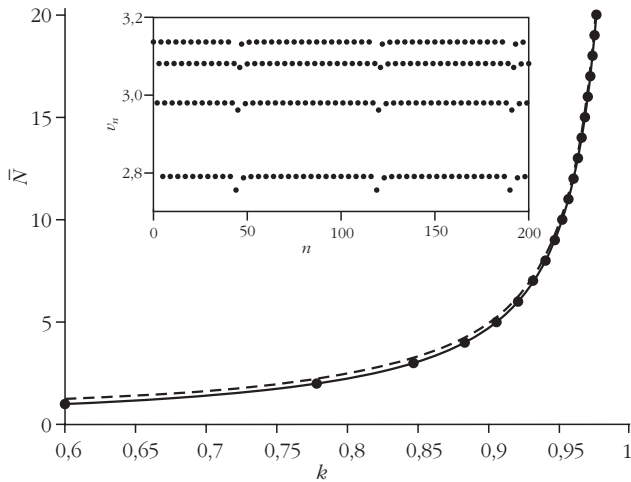


4. ábra. Pattogás  $k = k_{1,2} = 0,715$  ütközési együttható esetén. A kezdőfeltételek és az egyéb paraméterek ugyanazok, mint a 2. ábrán. Az ezzel az ütközési együtthatóval indított pattogások rövid transziensek után *kivételesen* egy olyan periodikus ugrálás attraktorához (szaggatott görbe) tartanak, ahol egy lépcső után kettő, majd ismét egy átugrása történik, azaz  $N = 1$  és  $K = 2$ .

jön létre (5. ábra). Az elnevezés abból adódik, hogy a pattogás nem pontosan periodikus, csak ahhoz hasonló.

5. ábra.  $k = 0,75$  ütközési együtthatóval zajló mozgás attraktora a transziensek lecsengése után (egyéb paraméterek megegyeznek a 2. ábrán bemutatottal). (Az első 500 pattanás kivárását követően 1500 pattanás idejéig rajzoltuk ki az pályáikat.) A pályáik a 3. lépcső elhagyása után a nulladik fölött újra és újra ugyanabban a magasságban lépnek be a képbe. Bármely kezdőfeltételtől is indítjuk a mozgást, hosszú távon az ábrán látható kváziperiodikus mozgás jön létre. Az ütközési együttható esetünkben  $k_{1,2} < k < k_2$ , tehát az  $N = 1, K = 2$  kettes ciklus és az  $N = 2$  egyes ciklus közé esik. Ennek megfelelően a hosszú távú kváziperiodikus mozgásban egy, illetve két lépcsőfokot ugrik át egyszerre, méghozzá úgy, hogy átlagosan az utóbbi ugrásból van több. A numerikus vizsgálat szerint az átugrott lépcsők számának hosszú időre vett átlaga  $\bar{N} = 1,747$ . Az attraktorra jellemző  $v_n$  sebesség-idő sor a következő ábra betétjében látható.





6. ábra. Az attraktorra jellemző átlagos  $\bar{N}$  ugrásszám  $k$  függvényében, numerikus szimulálás alapján a nagy ütközési együttható ( $k \geq k_1$ ) tartományban ( $m = 0,5, H = 4$ ). Jól látható, hogy  $k$  növekedésével  $\bar{N}$  monoton nő. Az  $N$  hosszúságú egyes ciklusokhoz tartozó  $k_N$   $N$  értékpárokat diszkrét pontokkal jelöltük. A szaggatott vonal a nagy  $k$  értékekre érvényes  $\bar{N} = (2(1-k))^{-1}$  közelítő összefüggést illusztrálja (amely meglepően jó közelítésnek bizonyul az egész tartományban). Az  $\bar{N}$   $N+1$  kettes ciklusokban természetesen  $\bar{N}(k_{N,N+1}) = [N+(N+1)]/2 = N+1/2$ , és ezek is a görbére eső pontokat adnak, de a jobb áttekinthetőség kedvéért ezeket nem ábrázoltuk. A betét az 5. ábra,  $k = 0,75$  attraktorához tartozó  $v_n$  sebesség-idő sort mutatja. Jól látszik, hogy a mozgás négy lépésenként majdnem ismétlődik, de a pontos ismétlődést az időnként bekövetkező „kitüremkedések” megakadályozzák.

A lényeg megértéséhez induljunk ki a  $k_1$  ütközési együtthatójú mozgásból. Ilyenkor hosszú távon egy egyszerű periodikus mozgás jön létre: a labda minden lépcsőfokon pattan egyet, méghozzá ugyanazon a helyen, ugyanazon sebességgel. Ha  $k$  értékét kissé megnöveljük, akkor a kisebb energiavesztés miatt a labda nagyobbakat fog ugrani, és az  $N = 1$  pattogások közé némi  $N = 2$  is fog vegyülni. Ha tovább növeljük  $k$  értékét, akkor az  $N = 2$  ugrások száma monoton módon nőni fog az  $N = 1$ -hez képest egészen addig, amíg végül csak  $N = 2$  marad. Ezzel éppen  $k_2$ -höz érkezünk el. Van egy köztes állapot (de nem  $k_1$  és  $k_2$  számtani közepe!), ahol  $N = 1$  és  $N = 2$  darabszáma megegyezik, ráadásul felváltva követik egymást. Az ehhez tartozó ütközési együttható éppen  $k_{1,2}$ -nek felel meg.

A fentebb említettek, illetve numerikus vizsgálatok alapján az alábbi megállapítások tehetők. A kettes ciklusos attraktorok közül csak a  $K = N+1$  típusúak valósulnak meg, azaz nem lehet a kettes ciklus hosszabb íve kettő vagy több egységgel hosszabb, mint a rövidebbé. Hármast vagy hosszabb ciklusokat a nagy ütközési együtthatók  $k \geq k_1$  tartományában *egyáltalán* nem találunk. Minden  $k_N < k < k_{N+1}$  ütközési együttható esetén (ahol  $N \geq 1$ ) olyan kváziperiodikus mozgás jön létre, amelynek alapperiódusai  $N$  és  $N+1$  ugrásokból állnak.  $k$  növelésével nő az  $N+1$  hosszúságú ugrások száma  $N$ -éhez képest. Az egész folyamat jól jellemezhető az attraktoron tapasztalható  $\bar{N}$  számmal, amely megadja, hogy két ütközés között átlagosan hány lépcsőt ugrott át a labda. Ezt röviden *átlagos ugrásszámnak* nevezzük, és numerikusan határozzuk

meg. A 6. ábra  $\bar{N}(k)$  sima, monoton növekedését mutatja a  $k$  ütközési paraméter függvényében. Vegyük észre, hogy az  $N$  hosszúságú egyes ciklusok ütközési együtthatóinál  $N$  egyben az átlagos ugrásszám,  $\bar{N}(k_N) = N$ . Ha  $N \gg 1$ , azaz 1-hez közeli  $k_N$  ütközési együtthatók esetén az értékek besűrűsödnek, és (11) megfordítása szerint

$$\bar{N} = \frac{4m}{H} \frac{1}{1-k},$$

tehát 1-hez igen közeli ütközési együtthatók esetén az átlagos ugrásszám  $(1-k)^{-1}$ -nel arányosan nő.

## Többszörös pattogások egyetlen lépcsőn

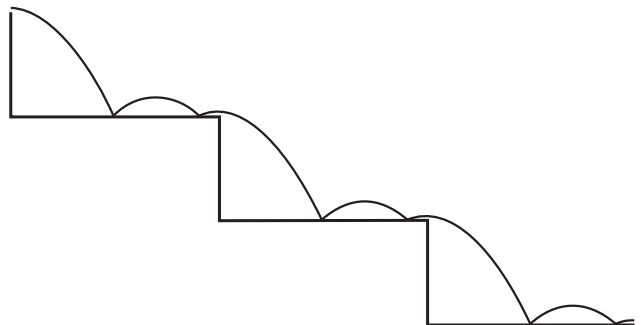
A kis ütközési együtthatók tartományában,  $k < k_1$ -re új mozgásformák jelenhetnek meg. A kettes ciklusok keresése során nem engedjük meg, hogy  $N_n$  zérus lehessen. Kis ütközési együtthatóknál ennek viszont már lehet értelme, és azt jelenti, hogy egyetlen lépcsőfokon kétszer is pattan a labda. Az az eset, amikor a kettes ciklus úgy valósul meg, hogy a labda átugrik a következő lépcsőfokra, azon pattan még egyet és a mozgás innét ismétlődik (7. ábra), annál az ütközési együtthatónál tapasztalható, amelyet az  $N = 1, K = 0$  vagy  $N = 0, K = 1$  indexek jellemeznek. Ez a  $k_{1,0} = k_{0,1}$  ütközési együttható alapesetünkben  $k_{1,0} = 0,405$ -nek bizonyul, jóval  $k_1$  alatti érték. Mivel itt két lépés után kerül a labda egy lépcsőfokkal odébb, az átlagos ugrásszám  $1/2$ :  $\bar{N}(k_{1,0}) = 0,5$ .

### 7. feladat

Vezessük le a  $k_{1,0}$ -t meghatározó egyenletet tetszőleges paraméterek esetén!

Ennél kisebb ütközési együtthatókra az is megtörténhet, hogy egyetlen lépcsőn háromszor vagy többször pattan a labda, majd utána ugrik le a szomszédos lépcsőre, ahol mindez ismétlődik. Ha  $j$  pattanás történik egy lépcsőn (ahol  $j$  tetszőleges természetes szám), és a labda utána lép át a szomszédosra, akkor a mozgás  $j+1$  ütközés után ismétlődő  $j+1$ -es ciklus.

7. ábra. Kétszeres pattogás egyetlen lejtőn. A  $k_{1,0} = 0,405$  ütközési együtthatóval történő mozgás pályája a tranziensek lecsengése után (egyéb paraméterek megegyeznek a 2. ábrán bemutatottal). Tetszőleges kezdőfeltétellel indított pattogások egy olyan periodikus attraktorhoz, kettes ciklushoz tartanak, ahol átugrás előtt minden lépcsőfokon kettőt pattan a labda.



Az átlagos lépésszám itt  $1/(j+1)$ . Az ehhez tartozó (növekvő  $j$ -vel egyre csökkenő értékű) ütközési együtthatók a fentiekhez hasonlóan meghatározhatók (lásd a 11. feladatot).

## A csúszásba történő átmenet

Elegendően kis ütközési együttható, azaz nagy pottogási energiavesztés esetén előfordulhat, hogy a labdát egyetlen lépcsőfokon belüli *végtelen sok* pattanás után is még ugyanazon a lépcsőfokon találjuk. Végtelen sok ütközés után a labda már nem emelkedik a lépcső síkjá fölé, és mivel a vízszintes irányú sebessége állandó, ezért az ilyen mozgást a valós időben *csúszásként* értelmezzük. Ennek kapcsán észre kell vennünk, hogy a pottogásokra alapuló (5)–(7) leképezési egyenletek kiegészítésre szorulnak a valódi időben történő csúszással. (Ha az (5)–(7) leképezési egyenletekkel haladunk előre, akkor a labda végtelen sok pattanás után megállni látszik. A valós és az  $n$ -ben mért „iterációs” idő ilyenkor teljesen szétválk, az előbbi az utóbbiban gyakorlatilag megáll.) A részletek attól függnek, hogy mit tudunk a felület érdességéről. Ezt azonban nem szükséges konkretizálnunk, hiszen akár van súrlódás, akár nincs, a csúszás újfajta mozgás, egy sajátos attraktor, amelyből lépcsőket átívelő ugrások már sohasem alakulhatnak ki. Ha egyetlen lépcsőn végtelen sok ugrás történhet, akkor az iterálás szimulálásával leállhatunk, mondván, hogy a labda a csúszási attraktorra érkezett.

Ha egy adott lépcsőfokra érkezés utáni elpattanás függőleges sebessége  $v_i$ , akkor a teljes elmozdulás a lépcsőn történő végtelen sok pottogás után

$$\Delta x = \frac{2 v_i}{H} \frac{1}{1-k}. \quad (12)$$

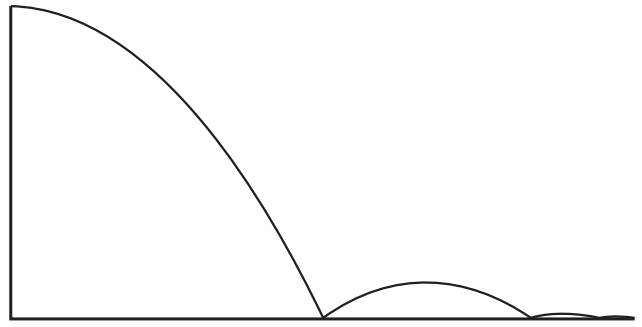
### 8. feladat

Vezessük le a (12) összefüggést! Útmutatás: használjuk a mértani sor összegképletét, érdemes dimenziósan számolni és az utolsó lépésben áttérni dimenziótlan mennyiségekre.

Amennyiben a labda az  $x_i$  helyen érkezik meg az előző lépcsőfokról az általunk megfigyelt lépcsőfokra, akkor annak feltétele, hogy csúszás alakuljon ki, az hogy végtelen sok pattanás után is még a lépcsőfok egységnyi koordinátájú végpontja előtt legyen, vagyis  $x_i + \Delta x < 1$ . A (12) összefüggést behelyettesítve és átrendezve

$$v_i < \frac{H}{2} (1-k)(1-x_i). \quad (13)$$

Az egyenlőtlenség teljesülése egy adott  $k$  értékre azon múlik, hogy hova esik be a labda az adott lépcsőfokon, azaz mekkora az  $x_i$  indulási koordináta, és mekkora ott az elpattanás  $v_i$  indulási sebessége. Szimulálásunkban akkor mondjuk, hogy egy mozgás



8. ábra. A kritikus  $k_c$  értékhez tartozó attraktor: a lépcső legvégéről  $v = 0$  sebességgel elpattanó labda végtelen pottogás után éppen hogy kijut a következő lépcsőfok végére, ahonnan ismét  $v = 0$  sebességgel pattan tovább. Itt  $k_c = 1/3$  ( $H = 4$ ,  $m = 0,5$ ). (Mivel az egymást követő kis pályáik mindegyike  $k$ -szor rövidebb és  $k^2$ -szer alacsonyabb (azaz egyre laposabb), mint a megelőző, ezért a lépcsőfok végén már csak egy vízszintes vonalat látunk.)

elérte a csúszási attraktort, ha valamelyik lépcsőfokra érkeve az ottani  $x_i$  és  $v_i$  között fennáll a (13) egyenlőtlenség.<sup>9</sup>

Az a kritikus  $k_c$  ütközési paraméterérték, amelynél már *bármely* kezdőfeltételtől induló mozgás – némi tranziens után – átmegy csúszásba, a numerikus tapasztalat szerint a következőkből határozható meg. Mivel a vízszintes sebességkomponens minden ütközésben megmarad, az előző lépcsőfok végén egységnyi (dimenziótlan) vízszintes sebességgel haladó labda ferde hajítási íve olyan  $x_i$  helyen érjen a következő lépcsőre, hogy azzal és a hozzá tartozó  $v_i$  ütközés utáni függőleges sebességgel végtelen sok pottogás után éppen a lépcső szélére kerüljön (8. ábra), vagyis (13) egyenlőségként teljesüljön. Így azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{2m}{H} \frac{1+k_c}{1-k_c}} = 1. \quad (14)$$

### 9. feladat

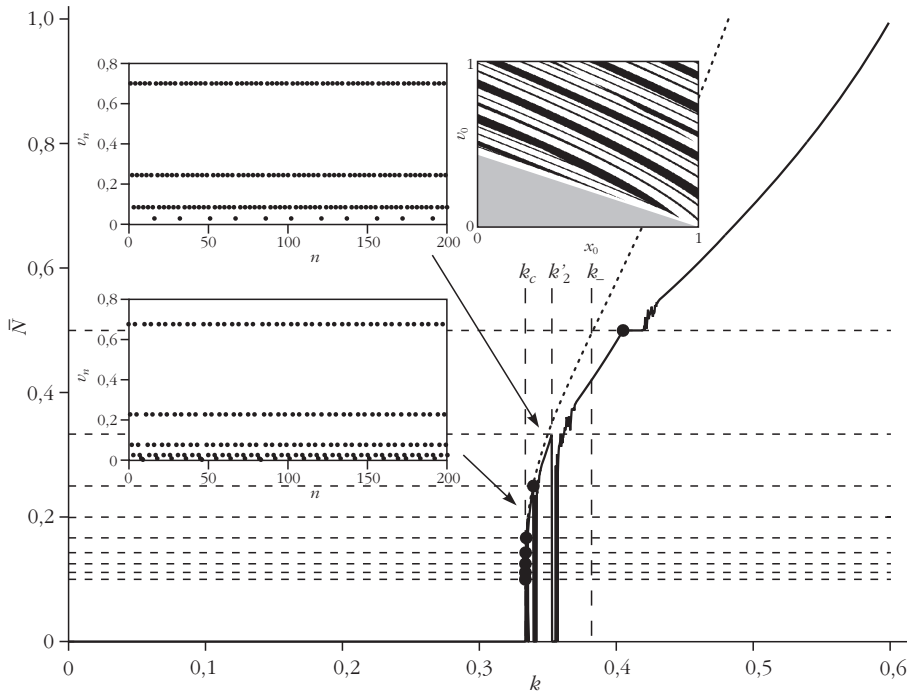
Vezessük le a (14) összefüggést! Útmutatás: Most is érdemes dimenziósan számolni, és az utolsó lépésben áttérni a dimenziótlan mennyiségekre.

A (14) egyenletet átrendezve, az explicit eredmény:

$$k_c = \frac{\sqrt{\frac{H}{2m} - 1}}{\sqrt{\frac{H}{2m} + 1}}. \quad (15)$$

A  $H = 4$  választással  $k_c = 1/3 = 0,33$ . Ennél kisebb ütközési együtthatókra az is igaz, hogy bármilyen kezdőfeltétel esetén csúszó mozgás alakul ki, a *hosszú távú pottogó megoldások teljesen eltűnnek*.

<sup>9</sup> Ha az adott lépcsőfokra érkező labda pattanásakor a csúszási feltétel (13) egyenlőtlensége teljesül, akkor szintén teljesül a lépcsőfokon végbemenő további (végtelen számú) pattanások mindegyikén is.



9. ábra. Az attraktorra jellemző átlagos  $\bar{N}$  ugrásszám  $k$  függvényében, numerikus szimulálás alapján a kis ütközési együttható ( $k \leq k_c$ ) tartományban ( $m = 1/2$ ,  $H = 4$ ). A vízszintes szaggatott vonalak az  $N = 1/2, 1/3, \dots, 1/10$  értékeknek felelnek meg, a fekete pontok pedig a  $k'_j$  ütközési együtthatóhoz tartozó  $j+1$  periódusú attraktor adatait jelölik. Függőleges szaggatott vonallal a  $k_c$  helyét is bejelöltük. A pontozott görbe az  $\bar{N}(k)$  függvény  $k_c$  környékén érvényes alakját adja meg. A két egymás alatt lévő betét a kváziperiodikus attraktor  $v_n$  idősorát mutatja a  $k = 0,35$  (amely kissé balra esik a  $k'_j = 0,353$  ponttól) és a  $k = 0,337$  ütközési együtthatóknál. Előbbi mellett a hozzá tartozó pattogási és a csúszási attraktorok vonzási tartományai láthatók. A betétekhez tartozó  $N = 0,298$  és  $N = 0,194$  értékeket nyíljal jelöltük.

## Mozgás kis $k$ értékekkel

Az egyes periódusú attraktorhoz tartozó  $k_j$  érték alatt lefelé haladva továbbra is igaz, hogy *egyetlen* attraktor létezik, vagyis akármilyen kezdeti feltétellel indulunk, egy idő után minden mozgás egyforma jellegűvé válik. Az attraktor rendszerint kváziperiodikus, és a numerikusan meghatározott átlagos  $\bar{N}$  ugrásszám csökken a  $k$  csökkentésével (lásd 9. ábra). Létezik egy  $k_c$  érték, amely alatt ez a tulajdonság megszűnik abban az értelemben, hogy a hosszan tartó pattogás mellett megjelenik a csúszás lehetősége: a pattogás kváziperiodikus attraktora és a hosszan tartó csúszás *együtt létezik*. Ez az érték alapesetünkben numerikusan  $k_c = 0,382$ . Abban az esetben, ha nem létezik folyamatosan lépcsőfokról-lépcsőfokra pattanó mozgás (mert mindegyik kezdőfeltételnél hosszú távon előbb-utóbb csúszás történik), akkor  $\bar{N}$  függvény értéket nullának vesszük, hiszen ez a függvény azt adja meg, hogy hány lépcsőnyi az elmozdulás két ütközés között, de ebben az esetben az elmozdulás még végtelen sok ütközés után sincs egy lépcsőnyi sem.

Együtt létező attraktorok, tehát  $k < k_c$  esetén felmerül, hogy milyen a vonzási tartományuk. Ez úgy határozható meg, hogy a kezdőfeltételek  $x_0, v_0$  síkján más színnel jelöljük azokat a pontokat, amelyek az egyik vagy másik attraktorhoz tartanak. A 9. ábra „csíkos” betétábrája a pattogó mozgás és a csúszás vonzási tar-

ományát mutatja alapesetünk  $k = 0,35$  értékénél fehér, illetve fekete színnel ábrázolva. A szürke háromszög a (13) egyenlőségnek megfelelő tartomány, az ilyen kezdőfeltétellel induló mozgások rögtön csúszási mozgások.<sup>10</sup>

## 10. feladat

Becsüljük meg  $k_c$  értékét azon az alapon, hogy  $k_c$  alatt nem csak a kezdőfeltételek, hanem a pattogási attraktor tipikus értékei mellett is fennállhat a (13) egyenlőség, vagyis a mozgás beléphet a szürke háromszögbe! Útmutatás: használjuk ki, hogy a tapasztalat szerint a (8) kifejezés minden pattogó mozgásra jó közelítést ad az attraktor átlagos  $v$  sebességére, tehát az vehető  $v_j$ -nek, és hogy az  $x_j$  helykoordináta tipikus értéke  $1/2$ -nek tekinthető.

A  $k_c$ -nél kisebb ütközési paraméterek esetén a nullától különböző  $\bar{N}$  értékeket a pattogó mozgások attraktorára határoztuk meg. Az átlagos ugrásszám változó, de összességében elmondható, hogy tendenciájában csökkenő  $k$  csökkenésével. Meglepő módon azonban még jóval  $k_c$  elérése előtt, rövid intervallumokban teljesen eltűnnek a hosszú távon pattogó mozgások lehetőségei, vagyis a pattogó mozgás attraktora ilyenkor nem létezik. Egy ilyen intervallumon belül azonban, ha tovább csökkentjük  $k$ -t, akkor az intervallum végéhez érve, hirtelen újra megjelenik a pattogó mozgás, méghozzá  $\bar{N}$  egy lokális csúcásával. Ezek az  $\bar{N}$  értékek egész számok reciprokai, s az állandósult pattogás ezekben a kivételes pontokban periodikus: egy  $N = 1$ -es lépés után  $j$  alkalommal pattan a labda ugyanazon a lépcsőn, vagyis  $N = 0$  valósul meg  $j$ -szer egymás után. Az ennek megfelelő ütközési paramétert  $k'_j$ -vel jelöljük. Ilyenkor az átlagos ugrásszám természetesen

$$\bar{N}(k'_j) = \frac{1}{j+1}.$$

A legnagyobb ilyen intervallum  $k'_2 = 0,3527$  és  $k = 0,3555$  között létezik, és  $k_c$ -felé haladva a többi hasonló egyre kisebb hosszal ismétlődik. A 9. ábrán ez a halmozódás is megfigyelhető.

<sup>10</sup> Fontos megjegyezni, hogy a 6. ábrán numerikusan mért  $\bar{N}$  ugrásszámnál, mivel egy  $k$  értékhez egy attraktor (egyfajta hosszútávú mozgás) tartozott, tetszőleges kezdőfeltétel mellett mérhettünk. Esetünkben azonban már meg kell válogatni a kezdőfeltételt, méghozzá úgy, hogy továbbra is pattogó mozgáson mérjünk átlagot (azon belül persze már mindegy melyikben, mert csak egyféle van egy adott  $k$  mellett most is).



### 11. feladat

Határozzuk meg a  $k_j'$  ütközési együttható értékeit, felhasználva azt, hogy a periodikus mozgás  $N_n$  időszora ilyenkor választható úgy, hogy  $N_0 = N_1 = \dots = N_j = 0$ ,  $N_{j+1} = 1$ , majd ez ismétlődik. Útmutatás: használjuk az (5)–(7) rekurziókat, amelyek  $N_n = 0$ -ra különösen egyszerűek.

### 12. feladat

Határozzuk meg az  $\bar{N}(k)$  függvény  $k_c$  környékén érvényes alakját a  $k_j'$  értékek  $k_c$  körüli, azaz nagy  $j$ -kre történő halmozódása alapján!

A  $k < k_c$  tartományban csakis a csúszási attraktor létezik. Alulról érve  $k_c$ -hez azonban „hirtelen” jelennek meg a pattogó mozgások, méghozzá úgy, hogy az  $\bar{N}(k)$  görbe, illetve a közelítő görbe nagyon meredeken indul. A pattogó mozgás előbukkanása  $k_c$ -nél tehát a fázisátalakulásokra emlékeztető átbillenéssel jelenik meg, amit a dinamikus rendszerek nyelvén bifurkációnak nevezünk.

## Összefoglalás

Vizsgálatunk célja, hogy megtudjuk, a labda lépcsőn lefelé pattogása, illetve annak legegyszerűbb modellje szerinti mozgás kaotikus-e. Összetett viselkedésre érdekes módon a kis  $k$ , vagyis a nagy disszipációs veszteség tartományában bukkantunk. Az (5)–(7) dinamika nyilván nemlineáris, erre utal a  $k_c$ -nél megfigyelt

bifurkáció is, meg az együtt létező attraktorok megjelenése. A vonzási határok azonban szemmel láthatóan simák (lásd a 9. ábra betétje), a káoszra fraktálszerkezet lenne jellemző. Maga az  $\bar{N}(k)$  függvény  $k < k_1$ -re néhol nem sima és ugrásokat is mutat. Megvizsgáltuk azonban azt is, hogy a közeli kezdőfeltételekből induló és hosszan pattogó mozgást végző mozgáspárok koordináta-különbségei hogyan változnak időben. A káoszra jellemző gyors széttartás helyett mindenütt *közeledést* találtunk. Így levonhatjuk azt a következtetést, hogy ebben a modellben a mozgás *nem* kaotikus. Ugyanakkor a jelenség összetettségére utal, hogy számos mennyiségre (elemi módszerekkel) nem találtunk képlettel leírható összefüggéseket, így például az  $\bar{N}$  átlagos ugrásszámfüggvényre, amelyet csak numerikusan tudtunk meghatározni. Ez az összetettség tulajdonképpen előrevetíti, hogy a mozgás már kis módosítás esetén is kaotikussá válhat. Ha a lépcsők éles sarka helyett lekerekített átmeneteket vennénk, a körívek jelenléte a problémát szóró biliárddá tenné, és abban eléggé nagy görbületi sugarak esetén már kiterjedt, robusztus káoszt várhatunk.

## Irodalom

1. A. Jaroš, A. Nussbaumer, H. Kunze: *Basiswissen Physik-compact*. Öbvht, Wien, 1999.
2. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
3. Budó Á.: *Kísérleti fizika I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
4. Nagy K.: *Kvantummechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
5. Néda Z., Libál A., Kovács K.: *Elemi Kvantummechanika*. Kolozsvári Egyetemi Nyomda, 2006.