

# TENGELYSZIMMETRIKUS CENTRÁLIS KONFIGURÁCIÓK A NÉGYTESTPROBLÉMÁBAN

Érdi Bálint  
ELTE, Csillagászati Tanszék

## Centrális konfigurációk

A centrális konfigurációk vizsgálata az égi mechanikai  $n$ -test problémához kapcsolódik: határozzuk meg  $n$  pontszerű test mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak. A probléma mozgásegyenletei:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (1)$$

ahol a pont a  $t$  idő szerinti deriválást jelenti,  $m_i$  és  $\mathbf{r}_i$  az  $i$ -edik test tömege és baricentrikus helyvektora,  $r_{ij}$  az  $i$ -edik és  $j$ -edik test egymástól való távolsága (a gravitációs állandó 1-nek vehető a hosszúság, tömeg és idő egységének megfelelő megválasztásával).

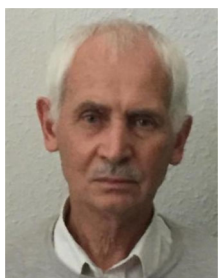
Az (1) egyenletek nem integrálhatók. Perturbációszámítási módszerekkel közelítő megoldások vezethetők le, ilyen megoldásokat használnak a bolygók mozgásának leírására. Egy nem integrálható dinamikai rendszernél egzakt megoldásokat a periodikus megoldások szolgáltathatnak. A centrális konfigurációk speciális periodikus megoldások.

Centrális konfigurációról beszélünk, ha minden egyes testre ható eredő erő a rendszer tömegközéppontjába mutat. Ekkor a testek úgy mozognak, hogy a pillanatnyi helyzetük által meghatározott konfiguráció önmagához mindig hasonló marad. A testeket összekötő szakaszokból álló alakzat eltolódhat, foroghat, mérete változhat, ám az alakzat szögei nem változnak. Két centrális konfigurációt akkor tekintenek különbözőnek, ha ezekkel a transzformációkkal (eltolás, forgatás, nagyítás) nem vihetők át egymásba.

(1) alapján a centrális gyorsulások feltétele (az  $m_i$  tömegekkel való egyszerűsítés után):

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\lambda \mathbf{r}_i, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2)$$

ahol a  $\lambda(t) > 0$  paraméter minden testre ugyanaz (ez szükséges a konfiguráció önhasonlóságához).



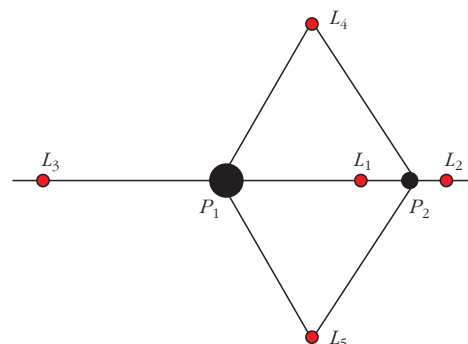
Érdi Bálint csillagász, az MTA doktora, az ELTE Csillagászati Tanszékének professzor emeritusa, korábban tanszékvezetője. Égi mechanikai kutatásokkal, főleg a háromtestprobléma vizsgálatával foglalkozik. A *Marik Miklós* által szerkesztett *Csillagászat* könyv *Égi mechanika* fejezetének szerzője. Égi mechanika előadásainak jegyzetei, *Égi mechanika*, *A Naprendszer dinamikája*, *Mesterséges holdak mozgása* elérhetők a szerző <http://astro.elte.hu/~erdi> honlapján.

Adott tömegek esetén a (2) nemlineáris algebrai egyenletrendszer szolgál a centrális konfigurációk megfelelő pozíciók meghatározására. A feladat azonban igen nehéz az  $r_{ij}^3$  nevezők miatt (a kölcsönös távolságok a testek koordinátáitól függnék, így az ismeretlen koordináták bonyolult módon szerepelnek az egyenletekben).

(2) megoldása  $n = 2$ -re és  $3$ -ra ismeretes. A kéttest-problémát már *Newton* megoldotta, értelemszerűen az erők itt centrálisak. A háromtestprobléma centrális konfigurációi az Euler–Lagrange-megoldások. *Euler* mutatta meg, hogy három test mozoghat úgy, hogy mindig egy egyenes fektethető rajtuk keresztül, miközben kölcsönös távolságaik aránya állandó marad. Két test összekötő egyenesén egy harmadik test három különböző tartományba helyezhető el (a testek közé, illetve a testeken kívül), s ebben az esetben a (2)-ből levezethető ötödfokú algebrai egyenletnek mindegyik tartományban egy megoldása van a harmadik test pozíciójára, így három Euler-megoldás létezik. Ezek mellé *Lagrange* két további önhasonló konfigurációjú esetet talált, amelyekben a három test mindig egyenlő oldalú háromszögek csücsait alkotja. A háromtestprobléma centrális konfigurációit röviden csak Lagrange-megoldásoknak nevezik (*1. ábra*). Mind az öt esetben a tömegek tetszőlegesek lehetnek, és az egyes testek a rendszer tömegközéppontja körül Kepler-mozgást végeznek, miközben vagy egy egyenesre illeszkednek, vagy szabályos háromszöget formálnak.

Az  $n \geq 4$  esetekről viszonylag keveset tudunk. Az Euler-megoldásokat 1910-ben *R. Moulton* általánosította, megmutatva, hogy tetszőleges tömegekkel  $n$  test  $n!/2$  számú egyenes vonalú, centrális konfigurációt alkothat. Egyenlő tömegek szimmetrikus elrendezései is centrális konfigurációt valósíthatnak meg (például egy kör mentén egyenletesen elhelyezkedve, míg a kör középpontjában tetszőleges más tömeg is lehet). Az  $n = 4$  esetben egyetlen térbeli centrális konfiguráció

*1. ábra.* A Lagrange-megoldások. A  $P_1, P_2$  testek mellé egy harmadikat az  $L_i$  Lagrange-pontok valamelyikébe lehet elhelyezni, hogy centrális konfiguráció jöjjön létre.



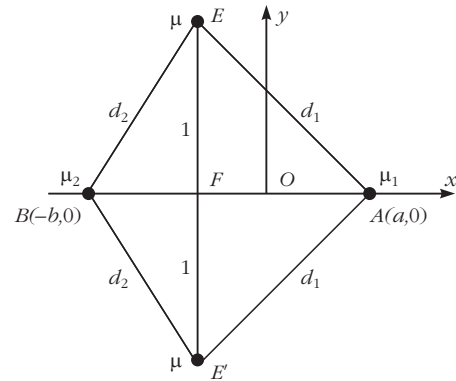
létezik, amelyet egyenlő tömegű testek egy szabályos tetraéder csúcsaiban elhelyezkedve hoznak létre.

A (2) egyenletek, illetve az ezeknek megfelelő, más formában felírt egyenletek bonyolultsága olyan mértékű, hogy megoldásuk numerikusan is nehézségekbe ütközik. Így numerikus megoldást néhány esetben sikerült kapni, valamilyen szimmetriát, vagy a tömegek közti bizonyos számú egyenlőséget feltételezve. A fő hangsúly ezért inkább a centrális konfigurációk számának meghatározására irányul. A háromtestprobléma egyenes vonalú esetében egy ötödfokú algebrai egyenletről lehet meghatározni a harmadik test relatív pozíciójának koordinátáját (az egyenlet együtthatói a tömegektől függenek), és ennek az egyenletnek tetszőleges tömegek mellett három megoldása létezik (ez az egyenletre alkalmazható Descartes-féle előjelszabályból következik). Kérdés,  $n \geq 4$  esetén hasonló megállapítás tehető-e?

S. Smale amerikai matematikusi 1998-ban összeállított egy listát a 21. század általa legfontosabbnak ítélt, megoldásra váró matematikai problémáiról. Ezen a listán szerepel a centrális konfigurációk számának kérdése is: adott  $n$ -re, tetszőleges tömegek esetén véges-e a centrális konfigurációk száma (különbözőknek azokat tekintve, amelyek a három említett transzformációval nem vihetők át egymásba). D. Saari is a 21. század matematikai problémájának tartja a centrális konfigurációkat, mert a probléma könnyen megérthető a nem szakemberek számára is, ellenállt az eddigi megoldási kísérleteknek, és jelentősége nagy. Ez utóbbival kapcsolatban érdemes említeni, hogy az  $n$ -test problémában a testek ütközésekor a rendszer centrális konfigurációk felé tart (ez lehet úgy, hogy valamennyi test egy pontban ütközik, vagy ugyanazon időpontban több különböző pontban). A végső mozgások is (egyre növekvő időpontokra) centrális konfigurációk felé tartanak. Friss eredmény, hogy a síkbeli esetben  $n = 4$ -re 2006-ban M. Hampton és R. Moeckel,  $n = 5$ -re 2012-ben A. Albouy és V. Kaloshin bizonyította a centrális konfigurációk számának végességét.

## Tengelyszimmetrikus konfiguráció a négytestproblémában

A centrális konfigurációk problémaköréhez a négytestprobléma egy tengelyszimmetrikus esetének teljes megoldásával járultunk hozzá [1]. A jelölések és a konfiguráció a 2. ábrán láthatók.  $A$  és  $B$  jelöli azt a két pontszerű testet, amelyeken átmenő egyenes a szimmetriatengely, egyben az egyik koordinátatengely. Az  $E$  és  $E'$  testek erre szimmetrikusan helyezkednek el (deltoid alakú konfiguráció), és egyenlő tömegűek.  $O$  a rendszer tömegközéppontja, amely az  $Oxy$  derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja, az  $Ox$  tengely az  $A$  pont felé mutat. (Megjegyezzük, hogy elég azt feltételezni, hogy  $O$  az  $AB$  egyenesen van,  $E$  és  $E'$  pedig ezen kívül, különböző félsíkokban, ebből következik a szimmetria és az  $E, E'$  testek tömegének egyenlősége. Azt is fontos megemlíteni,



2. ábra. A tengelyszimmetrikus konfiguráció jelölései.

hogy létezik más tengelyszimmetrikus centrális konfiguráció is, a szimmetrikus trapéz, az alapok csúcsaiban két-két egyenlő tömeggel, ezzel az esettel azonban nem foglalkoztunk.)

Célszerű dimenziótlan koordinátákat és tömegeket használni. Legyen a hosszegység az  $E$  pont távolsága az  $x$  tengelytől. Ezzel  $A$  és  $B$  koordinátái:  $A(a, 0)$ ,  $B(-b, 0)$ . Az  $E, E'$  pontok távolsága  $A$ -tól és  $B$ -tól  $d_1$  és  $d_2$ . A tömegegység legyen a testek össztömege, ekkor  $A, B, E$  dimenziótlan tömege rendre  $\mu_1, \mu_2$  és  $\mu$  ( $E'$  tömege is  $\mu$ ). Fennáll a

$$\mu = \frac{1 - \mu_1 - \mu_2}{2}$$

összefüggés, tehát két független tömegparaméter van,  $\mu_1$  és  $\mu_2$ . Ezekre teljesülnie kell, hogy  $0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1$  és  $0 \leq \mu_1 + \mu_2 \leq 1$  (az egyenlőség akkor áll fenn, ha határesetként nulla tömegeket is megengedünk). Az  $E, E'$  pontok  $x$  koordinátája, az  $F$  felezőpontjával megegyezően:  $-(a\mu_1 - b\mu_2)/2\mu$ .

Az ismeretlen  $a, b$  koordinátákra levezethetők a (2)-nek megfelelő egyenletek:

$$\mu_2 \left( \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{b}{d_1^3} - \frac{a}{d_2^3} \right) - (1 - \mu_1 - \mu_2) \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{d_1^3} \right) a = 0, \quad (3)$$

$$\mu_1 \left( \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{b}{d_1^3} - \frac{a}{d_2^3} \right) - (1 - \mu_1 - \mu_2) \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{d_2^3} \right) b = 0,$$

ahol

$$d_1 = \sqrt{\left( a + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1 - \mu_1 - \mu_2} \right)^2 + 1}, \quad (4)$$

$$d_2 = \sqrt{\left( b - \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1 - \mu_1 - \mu_2} \right)^2 + 1}.$$

A  $\lambda$  paraméterre a (3) egyenletektől független egyenlet vezethető le, amelyből  $\lambda$  kiszámítható, ha (3)-ból  $a$ -t és  $b$ -t már meghatároztuk.

A (3) nemlineáris algebrai egyenletrendszer két paramétertől függ ( $\mu_1$  és  $\mu_2$ ), és két ismeretlen tartalmaz ( $a$  és  $b$ ). Ez azonban nézőpont kérdése, attól függ, hogy a problémát milyen szempontból tekintjük. Általában az úgynevezett direkt problémát vizsgálják: megadják a tömegeket ( $\mu_1, \mu_2$ ) és azt keresik, hogy a testeket hova kell elhelyezni

( $a, b$ ), hogy a konfiguráció centrális legyen. Ezzel ellentétes az inverz probléma: adott helyekre ( $a, b$ ) mekkora tömegeket ( $\mu_1, \mu_2$ ) kell tenni, hogy centrális konfiguráció valósuljon meg. Bármelyik problémát vizsgáljuk azonban, a nehézség ugyanaz, ezt pedig a (3)-ban szereplő  $d_1^3$  és  $d_2^3$  nevezők okozzák. Mint (4)-ből látható,  $d_1$  és  $d_2$  függ a tömegektől és a koordinátáktól. (3) megoldása így numerikusan is nagy kihívás, és ily módon csak néhány speciális megoldást tudtak meghatározni.

## Egy messzire vezető ötlet

A nevezőkben lévő távolságokból származó nehézségek kiküszöbölésére [1]-ben az  $a, b$  koordináták helyett szögkoordinátákat vezettünk be, ami végül elvezetett a (3) egyenletek explicit algebrai megoldásáig.

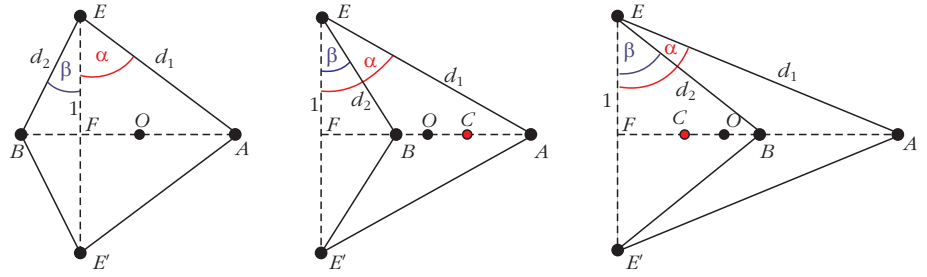
A koordináta-transzformáció felírásakor figyelembe kell venni, hogy háromféle deltoid-konfiguráció lehetséges, egy konvex és két konkáv (3. ábra). A konvex esetben az  $E, E'$  pontok  $F$  felezőpontja elválasztja  $A$ -t és  $B$ -t, a konkáv esetekben  $A$  és  $B$  az  $F$ -hez képest egy oldalon vannak. Jelölje  $C$  az  $A, E, E'$  testek tömegközéppontját. Az 1. konkáv esetben  $B$  az  $F$  és  $C$  pontok között, a 2. konkáv esetben a  $C$  és  $A$  pontok között helyezkedik el.

A konvex esetben az  $E, E'$  testek tömegének egyenlősége miatt feltehetjük, hogy  $A$  nagyobb tömegű, mint  $B$  ( $\mu_1 \geq \mu_2$ ). A konkáv esetben elvben  $B$ -t az  $A$ -n kívül is elhelyezhetjük a szimmetriatengelyen, azonban, ha  $A$  és  $B$  tömegének arányára nem tételezünk fel semmit, akkor ez nem eredményez újabb típusú konkáv konfigurációt.

Az  $A$  és  $B$  pontok szögkoordinátájaként a 3. ábrán látható  $\alpha$  és  $\beta$  szögeket bevezetve egyszerű geometriai összefüggésekkel kifejezhetők a távolságok:  $d_1 = 1/\cos\alpha$ ,  $d_2 = 1/\cos\beta$ , és felírható az  $a, b$  és  $\alpha, \beta$  koordináták közötti kapcsolat. Az 1. konkáv esetben ez

$$\begin{aligned} a &= (1 - \mu_1) \tan\alpha - \mu_2 \tan\beta, \\ b &= \mu_1 \tan\alpha - (1 - \mu_2) \tan\beta. \end{aligned} \quad (5)$$

A konvex eset transzformációs összefüggései az (5) egyenletektől annyiban különböznek, hogy  $\beta$  helyett  $-\beta$ -t kell írni, a 2. konkáv esetben pedig  $b$  kifejezését ellenkező előjellel kell venni.



3. ábra. Deltoid alakú konfigurációk: konvex (balra), 1. konkáv (középen), 2. konkáv (jobbra).  $C$  az  $A, E, E'$  testek tömegközéppontja,  $O$  pedig a teljes rendszeré.

A (3) egyenleteken mindhárom esetben végrehajtva a transzformációt, és a kapott egyenleteket  $\mu_1, \mu_2$  szerint rendezve, mindegyik esetben azonos alakú egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} a_0 \mu_1^2 - 2 a_0 \mu_1 + c \mu_1 \mu_2 + b_1 \mu_2 - b_0 \mu_2^2 + a_0 &= 0, \\ -a_0 \mu_1^2 + a_1 \mu_1 - c \mu_1 \mu_2 - 2 b_0 \mu_2 + b_0 \mu_2^2 + b_0 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

ahol az együtthatók  $\alpha$  és  $\beta$  trigonometrikus polinomjai:

$$\begin{aligned} a_0 &= \left( \cos^3\alpha - \frac{1}{8} \right) \tan\alpha, \\ a_1 &= \frac{1}{(\tan\alpha - \tan\beta)^2} - \\ &\quad - \left( \frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta \right) \tan\beta - \frac{1}{8} \tan\alpha, \\ b_0 &= - \left( \cos^3\beta - \frac{1}{8} \right) \tan\beta, \\ b_1 &= \frac{1}{(\tan\alpha - \tan\beta)^2} + \\ &\quad + \left( \frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta \right) \tan\alpha + \frac{1}{8} \tan\beta, \\ c &= \left( \cos^3\beta - \frac{1}{8} \right) \tan\alpha + \left( \cos^3\alpha - \frac{1}{8} \right) \tan\beta. \end{aligned} \quad (7)$$

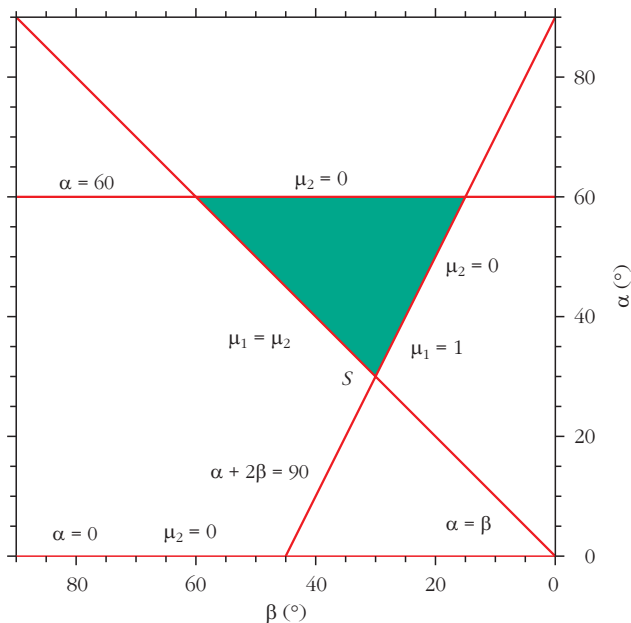
A konvex esetben ezekben a kifejezésekben  $\beta$ -t negatív előjellel kell venni. A konkáv eseteket az különbözteti meg, hogy  $(1 - \mu_2) \tan\beta$  kisebb (1. eset), vagy nagyobb (2. eset)  $\mu_1 \tan\alpha$ -nál (ez a feltétel azt fejezi ki, hogy a  $B$  pont a  $C$ -hez képest hol helyezkedik el).

Az együtthatók között minden esetben fennáll az

$$a_0 - b_0 + b_1 - a_1 + c = 0 \quad (8)$$

összefüggés.

A szögkoordinátákra való áttérés előnye abban mutatkozik meg, hogy a transzformált (6) egyenletekben nincsenek kritikus nevezők (a konkáv esetekben  $\tan\alpha - \tan\beta \neq 0$ , mivel  $\alpha \neq \beta$ , az egyenlőség ugyanis  $A$  és  $B$  egybeesését jelentené, másfelől a konvex esetben a kérdéses nevező  $\tan\alpha + \tan\beta$  alakú).



4. ábra. Kritikus egyenesek és a hozzájuk tartozó tömegek a konvex esetben. Centrális konfigurációk a színes tartományba eső  $\alpha$  és  $\beta$  értékekre lehetségesek.

A (6) egyenletek szerkezete sugallja az inverz probléma vizsgálatát. A direkt probléma, adott  $\mu_1, \mu_2$ -höz keressük  $\alpha, \beta$ -t, nem látszik járhatónak az egyenlet együtthatóinak a szögektől való bonyolult függése miatt. A fordított út, adott  $\alpha, \beta$ -hoz keressük  $\mu_1, \mu_2$ -t azonban kivitelezhetőnek tűnik, hiszen a (6) egyenletek a tömegekre nézve másodfokúak. Ráadásul (6) egyenleteit összeadva  $\mu_1$  és  $\mu_2$  között lineáris kapcsolat adódik:

$$(a_1 - 2a_0)\mu_1 + (b_1 - 2b_0)\mu_2 + a_0 + b_0 = 0. \quad (9)$$

Ez lehetővé teszi a (6) egyenletek egyszerű másodfokú egyenlet alapján történő megoldását, az együtthatók közti (8) összefüggés pedig a megoldás explicit formában való kifejezését:

$$\mu_1 = \frac{(b_1 + a_0 - b_0)b_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}, \quad (10)$$

$$\mu_2 = \frac{(a_1 + b_0 - a_0)a_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}.$$

Van egy másik megoldáspár is, ennél azonban a tömegek összege mindig 1, így ezt az esetet nem vizsgáltuk (a gyökök összege úgy is lehet 1, hogy az egyik gyök negatív, a másik pozitív, így ez a megoldáspár nem feltétlenül jelent kéttestproblémának megfelelő valós megoldást).

Az (5) és (10) egyenletek a (3) nemlineáris algebrai egyenletrendszer explicit megoldását jelentik, és megadják a probléma összes megoldását.

A (6) egyenletek és a (10) megoldás érdekes szimmetriatulajdonsággal rendelkeznek. Az  $a_i$  együtthatókat  $b_i$ -re, a  $b_i$ -ket  $a_i$ -re,  $\mu_1$ -et  $\mu_2$ -re,  $\mu_2$ -t  $\mu_1$ -re cserélve, (6) egyenletei felcserélődnek. Az  $a_i$  és  $b_i$  hasonló fel-

cserélésével a (10) megoldásban  $\mu_1$  és  $\mu_2$  is felcserélődik. Ezért mindegy, hogy (9) felhasználásával a (6) egyenletek közül melyiket oldjuk meg, a megoldás formálisan is ugyanaz lesz.

A (10) egyenletek minden  $\alpha, \beta$  párra megadják azokat a  $\mu_1, \mu_2$  értékeket, amelyek kielégítik a (6) egyenletrendszert. Ezek közül azonban fizikailag csak azok reálisak, amelyekre  $0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1, 0 \leq \mu_1 + \mu_2 \leq 1$  teljesül. (10) és (7) alapján az  $(\alpha, \beta)$  paramétersíkon numerikusan megvizsgálható ( $\mu_1, \mu_2$ -t egy nagyfelbontású rács pontjaiban kiszámítva), hogy hol létezhet valódi megoldás. Az eredmények azt mutatják, hogy ez csak bizonyos tartományokban fordulhat elő. A következőkben ezeket az eseteket mutatjuk be.

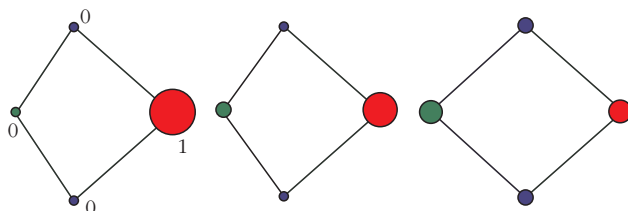
## Konvex eset

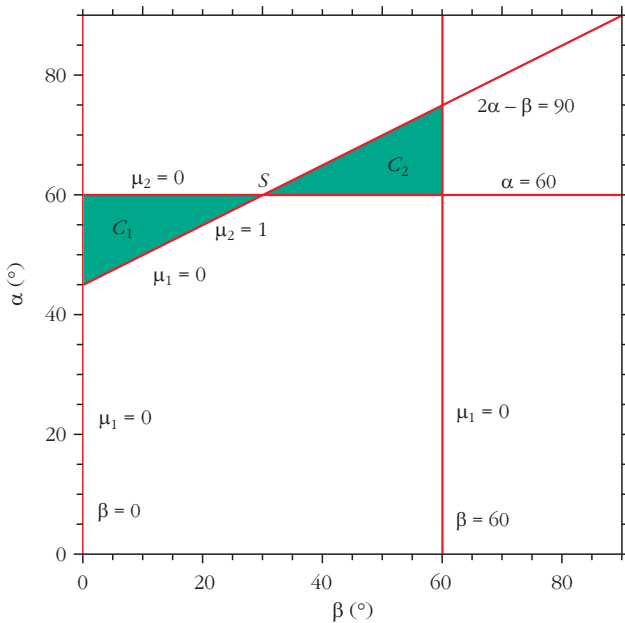
A konvex esetben a lehetséges konfigurációknak megfelelő  $\alpha, \beta$  szögek a 4. ábra színezett tartományára korlátozódnak ( $\alpha$  a függőleges,  $\beta$  a vízszintes tengely, és a 3. ábra konvex esetével való könnyebb összehasonlítás kedvéért  $\beta$  a „szokástól” eltérően negatív irányban növekvő). Ezt a tartományt kritikus egyenesek határolják, ahol a tömegek valamilyen szélsőértéket vesznek fel. Az  $\alpha + 2\beta = 90^\circ$  egyenes mentén  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$  (ez és a többi kritikus egyenes a (10) egyenlet megoldása). Az  $\alpha = \beta$  egyenesen  $\mu_1 = \mu_2, \alpha = 60^\circ$ -ra  $\mu_2 = 0$ . A 4. ábra színezett tartományában bármely  $\alpha, \beta$  szögpárnak megfelel egy konvexdeltoid alakú centrális konfiguráció, amelyhez tartozó tömegeket (10) adja az adott  $\alpha, \beta$ -val számítva.

A kritikus egyeneseket felhasználva ezek a centrális konfigurációk egyparaméteres családként írhatók le. Egy adott család kezdő konfigurációja az  $\alpha + 2\beta = 90^\circ$  egyenes egy pontjának felel meg, amelyre  $\alpha = 30^\circ + 2\kappa, \beta = 30^\circ - \kappa$ , ahol  $0^\circ \leq \kappa \leq 15^\circ$ . Az  $\alpha$ -t  $30^\circ + 2\kappa$ -nál rögzítve  $\beta$  értéke  $30^\circ - \kappa$ -tól  $30^\circ + 2\kappa$ -ig növekedhet, amikor egyenlővé válik  $\alpha$ -val. Eközben a tömegek úgy változnak, hogy  $\mu_1$  értéke 1-ről csökken,  $\mu_2$ -é 0-ról nő, amíg  $\alpha = \beta$ -nál egyenlővé nem válnak (5. ábra). Ennek olyan rombusz alakú konfiguráció felel meg, ahol a szemközti tömegek egyenlők. Speciális esetben, ha  $\alpha = \beta = 45^\circ$ , a konfiguráció négyzet, és minden tömeg egyenlő.

Különleges esetet képvisel az  $\alpha = \beta$  és  $\alpha + 2\beta = 90^\circ$  egyenesek  $S$  metszéspontja (4. ábra). Itt  $\mu_1 = 1$  és  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  egyszerre teljesül,  $S(\alpha = \beta = 30^\circ)$  tehát szingulá-

5. ábra. A tömegek és a konfiguráció (sematikus) változása a konvex esetben (balról jobbra haladva, ami növekvő  $\beta$ -nak felel meg). A (piros) tömege 1-ről csökken, B (zöld) tömege 0-ról nő, míg egyenlőkké válnak. Az egyenlő tömegű E, E' (kék) tömege 0-ról nő egy maximumig.





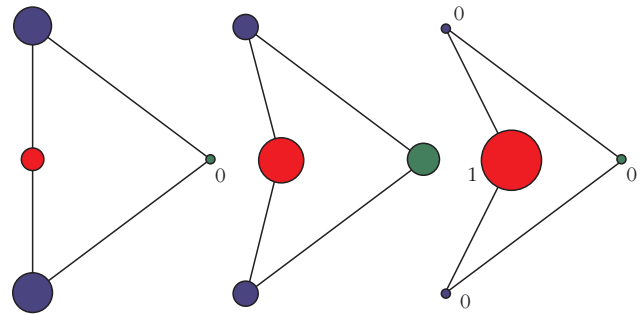
6. ábra. Kritikus egyenesek és a hozzájuk tartozó tömegek a konkáv esetekben. Centrális konfigurációk a színes tartományokba eső  $\alpha$  és  $\beta$  értékekre lehetségesek.  $C_1$  és  $C_2$  az 1., illetve 2. konkáv esetre vonatkozik.

ris pont. Itt a (10) megoldás nem érvényes, és (6)-ot  $\alpha = \beta = 30^\circ$ -ra közvetlenül megoldva a  $\mu_1 + \mu_2 = 1$  összefüggés adódik.  $A$  és  $B$  tömegének összege tehát 1, és mivel  $\alpha = \beta = 30^\circ$ , a konfiguráció két Lagrange-féle szabályosháromszög-megoldásból áll ( $AEB$  és  $AE'B$ ), ahol azonban  $E$  és  $E'$  tömege 0, míg  $A$  és  $B$  tömege  $\mu_1 + \mu_2 = 1$  mellett tetszőleges. A konvexdeltoid-alakú konfigurációk kiindulópontját  $\kappa = 0^\circ$ -ra ezek a Lagrange-megoldások jelentik. A konvex konfigurációcsaládok befejezése is Lagrange-háromszögekből áll.  $\kappa = 15^\circ$ -ra  $\alpha = 60^\circ$ , és  $\mu_2 = 0$  minden  $\beta$ -ra. Így  $A, E, E'$  Lagrange-háromszöget alkot, és miközben  $\beta$  értéke  $15^\circ$ -tól  $60^\circ$ -ig nő, ezalatt  $\mu_1$  értéke 1-ről 0-ra csökken.

## Konkáv esetek

A konkáv esetekben a lehetséges konfigurációknak megfelelő  $\alpha, \beta$  értékek a 6. ábra színezett tartományaiba esnek ( $C_1, C_2$  jelöli az 1., illetve 2. konkáv esetet). Ezeket a tartományokat is kritikus egyenesek határolják, amelyek (10)-ből levezethetők. A  $2\alpha - \beta = 90^\circ$  egyenes mentén  $\mu_2 = 1, \mu_1 = 0$ . Az  $\alpha = 60^\circ$  egyenesen  $\mu_2 = 0$ , a  $\beta = 0^\circ$  és  $\beta = 60^\circ$  egyeneseken  $\mu_1 = 0$ . A színezett tartományokban bármely  $\alpha, \beta$  szögpárnak konkávdeltoid-alakú konfiguráció felel meg, amelyhez tartozó tömegek (10)-ből kiszámíthatók.

A konkáv konfigurációk is egyparaméteres családokként írhatók le. Az 1. konkáv esetben rögzített  $\alpha = 45^\circ + \kappa$ -ra  $\beta$  értéke  $0^\circ$ -tól  $2\kappa$ -ig változhat ( $\kappa$  határai a konvex és konkáv esetekben megegyeznek). Miközben  $\beta$  ezen tartományban nő,  $\mu_1$  értéke 0-ról eléri egy maximumot, majd visszacsökken 0-ra (7. ábra). Ezzel szemben  $\mu_2$  egy minimumról 1-ig nő, a kezdeti minimum értéke 1-től 0-hoz tart  $\kappa$  növekedésével. A kiin-



7. ábra. A tömegek és a konfiguráció (sematikus) változása az 1. konkáv esetben. A kiinduló helyzet Euler-Lagrange-féle egyenes vonalú megoldás (balra). Innen  $B$  (piros) tömege egy minimális értékről 1-ig nő.  $A$  (zöld) tömege 0-tól eléri egy maximumot, majd visszacsökken 0-ra.  $E, E'$  (kék) tömege folyamatosan csökken.

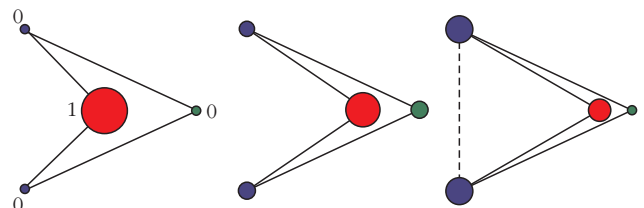
duló konfiguráció minden  $\kappa$ -ra egy Euler-Lagrange-féle egyenes vonalú megoldás, amelyet  $E, B, E'$  alkot,  $A$  tömege ugyanis 0. A befejező konfiguráció három 0 tömegű testből ( $A, E, E'$ ) és egy egységnyi tömegűből ( $B$ ) áll.

A 2. konkáv esetben rögzített  $\alpha = 60^\circ + \kappa$ -ra  $\beta$  értéke  $30^\circ + 2\kappa$ -tól  $60^\circ$ -ig változhat. A  $\mu_1$  tömeg viselkedése hasonló az előzőhöz, míg  $\mu_2$  változása az előző eset fordítottja: 1-ről csökken egy minimális értékig, és ez a minimum 0-tól 1-ig nő, ahogy  $\kappa$  növekszik. A 2. konkáv esetben az egyes családok kiinduló konfigurációja az 1. eset befejezésével megegyezően három 0 tömegű testből ( $A, E, E'$ ) és egy egységnyi tömegűből ( $B$ ) áll (8. ábra). A befejező konfiguráció Lagrange-féle háromszög, amelyet  $B, E, E'$  alkot, míg ekkor  $A$  tömege 0.

A  $2\alpha - \beta = 90^\circ$  és  $\alpha = 60^\circ$  egyenesek  $S$  metszéspontjában (6. ábra)  $\mu_2 = 1$  és  $\mu_2 = 0$  egyszerre teljesül, így  $S(\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ)$  szinguláris pont, ahol (10) nem érvényes. Erre az  $\alpha, \beta$ -ra (6)-ot közvetlenül megoldva a  $\mu_2 + 3\mu_1 = 1$  összefüggés adódik, és  $\mu = \mu_1$  is fennáll. Így az  $S$  szinguláris pont olyan konfigurációnak felel meg, amelyben  $A, E, E'$  Lagrange-féle szabályosháromszög-megoldást valósít meg, egyenlő tömegekkel,  $B$  pedig a rendszer tömegközéppontjában helyezkedik el, ami jelen esetben egyben a háromszög súlypontja is, és tömege tetszőleges ( $\mu_2 + 3\mu_1 = 1$  mellett). Speciális esetben mind a négy tömeg egyenlő lehet.

Adott pozíciókhoz ismerve az ide helyezendő testek tömegét, centrális konfigurációjú mozgás úgy hozható létre, hogy a testeknek a tömegközépponttól számított távolságukkal arányos nagyságú kezdőse-

8. ábra. A tömegek és a konfiguráció (sematikus) változása a 2. konkáv esetben. A kiinduló helyzetben  $B$  (piros) tömege 1, innen csökken egy minimális értékig a befejező Lagrange-féle háromszög-megoldásnál (jobbra).  $A$  (zöld) tömege hasonlóan változik, mint az 1. konkáv esetben, és a befejező konfigurációnál 0.  $E, E'$  tömege folyamatosan nő.





bességet adunk, irányukat pedig a helyvektorokkal ugyanakkora szöget bezárónak vesszük. A rendszert ily módon elindítva, a testek Kepler-mozgást végeznek, miközben konfigurációjuk önmagához hasonló (konvex vagy konkáv deltoid) marad.

## Távlatok

A deltoid alakú centrális konfigurációkra kapott megoldás további kutatások kiindulópontja lehet. A háromtestprobléma Lagrange-megoldásainak széles körű elméleti és gyakorlati alkalmazásai vannak. A deltoid-megoldások bizonyos értelemben a Lagrange-megol-

dások általánosításai, ezeket határesetként tartalmazzák, így az ezekkel kapcsolatos kérdések (stabilitás, egyensúlyi helyzetek körüli mozgás) a négytestprobléma ezen esetében is vizsgálhatók. Szerepük lehet az  $n \geq 5$  esetek tanulmányozásában is. Gyakorlati vonatkozások (centrális konfigurációk megvalósulásai többszörös csillagrendszerekben vagy bolygórendszerekben) is további új lehetőségeket kínálnak. Ez a sokszínűség is hozzájárul a centrális konfigurációk érdekességéhez.

## Irodalom

1. B. Érdi, Z. Czirják: Central configurations of four bodies with an axis of symmetry. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 125 (2016) 33–70.