EGYSZERŰ KÍSÉRLET RUGALMAS INGÁVAL
Laborgyakorlat és versenyfeladat a nagyváradi Ady Endre Líceumban

Bartos-Elekes István
Nagyvárad, Románia

Mottó: egy kísérletet csak akkor tarthatunk
befejezettnek, ha teljesen kiaknáztuk
a mérési adatokban rejlő lehetőségeket.

A kísérleti feladat bemutatása

A rugalmas inga tanulmányozása az egyik legkönnyebben megoldható iskolai kísérleti feladatnak tűnik. Ebben a leírásban a rendkívül egyszerű ingaképlet érvényességét fogjuk keresni, de a precíz mérőrendszer ellenére, vagy éppen miatta, ez első nekifutásra nem sikerül. A körülmények elemzése, a mérési adatok mélyreható faggatása ad majd magyarázatot az első, sikertelennek tűnő próbálkozásainkra. Az eddig elhanyagolt, vagy éppen nem ismert jelenségek figyelembevételével sikerül igazolnunk az új számításaink alapján levezetett ingaképletet. *A kísérleti feladat bemutatásra kerülő teljes megoldása igazi adatfeldolgozási csemege.*

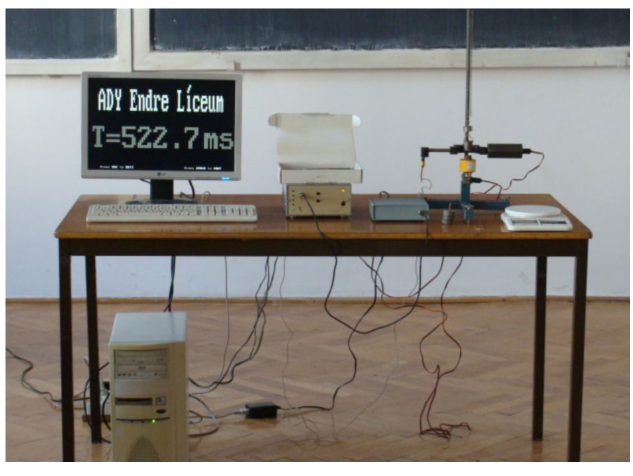
A kísérleti berendezés

A XX. Schwartz Emlékversenyen (Nagyvárad, 2010) ez a laboratóriumi gyakorlat ebben a formában adatfeldolgozási versenyfeladat volt. A kísérlet elvégzéséhez a következő eszközök állnak rendelkezésre (*1. ábra*): állvány, két hasonló rugó, tizedgrammnyi pontossággal megmért nehezékek, számítógép-vezérelt elektromágnes és fénysorompóval ellátott precíziós időközmérő. A kísérlet biztos indítására egy ismert tömegű állandó nehezék szolgál, amely biztosítja a függőleges mozgást és az állandó amplitúdót, amelyet az elektromágnes képes visszatartani. A kísérlet indításakor, az elektromágnes elengedi az állandó nehezéket (a többiek felette vannak, azokat váltogatjuk), amely kitakarja a fénysorompót, az így keletkezett jelet az assembly-ben írt software *még nem dolgozza fel,* mert az csak a takarás kezdetére érzékeny, a végére nem. A periódust egy 100 kHz-es kvarcetalon impulzusainak megszámlálásával mérjük, egy periódusnak megfelelő két nullponton való ereszkedő áthaladás takarásai között. A rugó megnyúlása nem lineáris, e hatás gyengítése céljából az amplitúdót 10 mm-re korlátoztam, a nullátmeneti pontatlanságok csökkentése érdekében a mérési időtartam tíz periódus. A mérés végeztével a számítógép kijelzi a mért periódust, ezután a rendszer készen áll az új mérésre. A háttérben Excel-kompatibilis mérési jegyzőkönyv is készül. A rugókkal kapcsolatos fontosabb adatokat az *1. táblázatban* láthatjuk.

A kísérlet menete, a jó mérés előfeltételei

Az egész osztállyal végzett kísérlet esetében egyedi stopperórákkal határozzuk meg a rezgés periódusát. Régebben iskolánk fizikai laboratóriumában (Fizikum) számítógép-vezérelt iskolai csengőjének nagybetűs időkijelzését 250 ms-os ritmusúra állítottam, ez egy kis gyakorlattal még számlálható. A Lissajous-görbeszerű mozgást elkerülendő, a nehezéket csak a rögzítési függőleges mentén engedjük mozogni. Néhány kilengés után, ha tartja a függőleges irányt, nullától kiindulva megszámláljuk a felső helyzetekből az

1. ábra. Számítógép-vezérelt mérőberendezés a rugalmas inga periódusának meghatározására.



Bartos-Elekes István a nagyváradi Ady Endre Líceum nyugalmazott fizika- és informatikatanára, kísérleti berendezéseket tervező és építő fizikus-elektronikus. A kolozsvári Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika Karán végzett 1968-ban. 1974–76 között vendégtanár Marokkóban. Doktori címet 1987-ben szerzett. Egy szabadalma alapján (1989) számítógép-vezérelt Fizikumot épített a Líceumban saját fejlesztésű mérőkészülékeiből. 1991 óta szervezi a Schwartz-versenyt.

egyensúlyi helyzeten való átmeneteket (0, …, n), ez n periódust jelent. Az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a sebesség a legnagyobb, így annak időpontját kaphatjuk meg a legpontosabban. A kísérletező társa a stopperórát kezeli, vagy a 250 ms-okat figyeli. A stopperórás módszernél a stoppert együtt mozgatja a rezgőmozgást végző nehezékkel (szinkronizálja), így stopper indítása-megállítása néhány századmásodperces pontosságú lesz, és az n periódus idejéhez képest csökken a nullátmenet detektálási bizonytalansága. A számítógépes rendszernél az időközmérés feloldása 10 μs, a többi automatikusan megvalósul a fentebb leírtak szerint. Nagy számú, ismételt mérés esetén a stopperórás megoldás is jó eredményekhez vezet.

Követelmények és eredmények

A Schwartz Emlékversenyeken a versenyzők a már megszokhatták, hogy konkrét követelmények helyett csupán néhány elindító gondolatot kapnak: A középiskolai laborgyakorlatok során lehetőségetek volt (*lehetett volna*) arra, hogy egyszerűsített modellek segítségével, valós kísérleteket végezve szembesüljetek a tanultakkal. Akárhogyan is volt, most itt a lehetőség. *A fizikustól sosem azt kérik, hogy fedezzen fel valamit.* Megvizsgálja a mérési eredményeket. Grafikonokat szerkeszt. Ha ezek semmit sem mondanak, eldobja őket, más formában újraszerkeszti, majd felfedez valami szokatlant: *az iskolában tanult elmélet nem egyeztethető össze a mérési adatokkal.* A fizika alapelveit felhasználva keressétek meg az összeférhetetlenségek okait! *Legyetek végre igazi fizikusok! Sok sikert!*

1. táblázat

A rugókkal kapcsolatos fontosabb adatok

	X rugó	Y rugó
rugó menetszáma	114	144
rugó nyugalmi hossza	275 mm	193 mm
egy menet átlagos átmérője	14,2 mm	14,3 mm
rugó tömege	19,4 g	24,6 g
kötőelem + állandó nehezék tömege	45,7 g	

A XX. Schwartz Emlékversenyen bemutatott laborgyakorlat mérési eredményeit és egyes jelöléseket a *2. táblázatban* foglaltam össze.

A kísérleti feladat ajánlójának a megoldása

Előzmények

Mivel a jól ismert

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

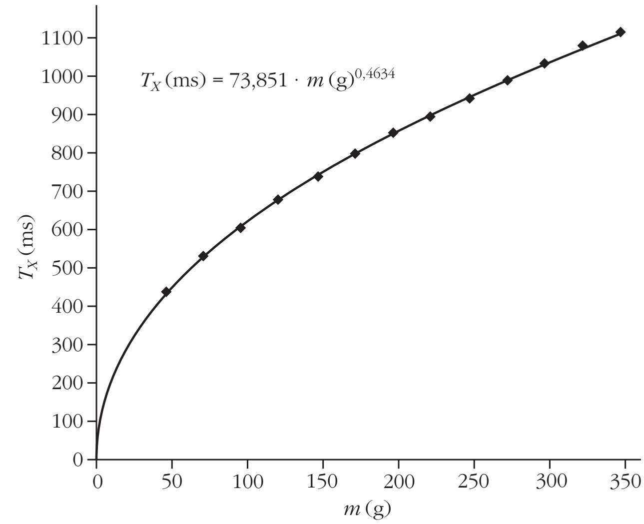
periódusidő-képlet igen egyszerű, esetleg hiányozhat belőle egy eddig elhanyagolt tag. Az elméleti számításokban azt a tényt eddig nem vettük figyelembe, hogy a k rugóállandó a rugót nem jellemzi teljes egészében. Az egyenletesen tekercselt rugó esetében a rugó anyagi pontjainak sebessége lineárisan nő a rugó tengelye mentén, vagyis egyszerűen kiszámíthatjuk a

2. táblázat

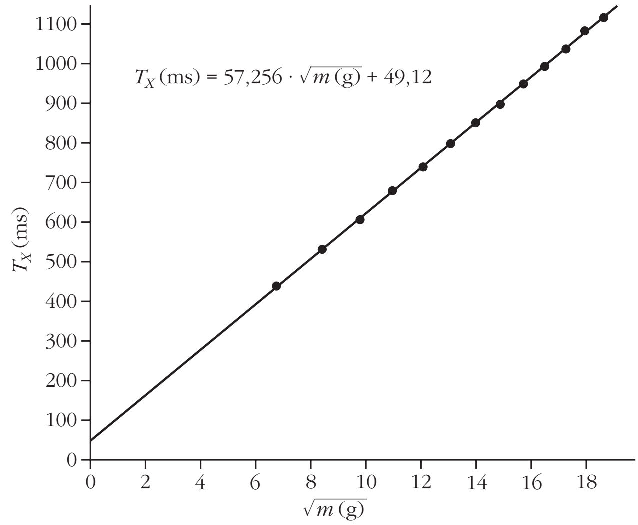
A Schwartz Emlékverseny feladataként szereplő laboratóriumi gyakorlatban felhasznált tömegek és a mért periódusidők

Nr.	m_0 (g)	m_A (g)	m_B (g)	m_C (g)	m_D (g)	m (g)	T_X (ms)	T_Y (ms)	T_{XpY} (ms)
0	45,7	25,0	49,7	100,2	200,8				
1	45,7					45,7	438,7	381,3	313,4
2	45,7	25,0				70,7	531,8	460,9	368,9
3	45,7		49,7			95,4	605,6	529,0	415,8
4	45,7	25,0	49,7			120,4	678,0	589,5	459,6
5	45,7			100,2		145,9	738,3	651,1	499,4
6	45,7	25,0		100,2		170,9	798,4	697,0	536,5
7	45,7		49,7	100,2		195,6	851,8	745,2	569,7
8	45,7	25,0	49,7	100,2		220,6	896,7	787,5	601,9
9	45,7				200,8	246,5	944,4	829,0	635,4
10	45,7	25,0			200,8	271,5	990,6	869,4	663,4
11	45,7		49,7		200,8	296,2	1035,2	907,5	692,4
12	45,7	25,0	49,7		200,8	321,2	1081,0	945,2	717,8
13	45,7			100,2	200,8	346,7	1115,3	977,6	745,3

Jelmagyarázat: Nr. – a mérés sorszáma; m_0 a kísérletben minden alkalommal felhasznált állandó nehezék tömege; m_A, m_B, m_C, m_D a névlegesen 25, 50, 100, 200 grammos nehezékek valódi tömege; m a felhasznált testek össztömege; T_X, T_Y, T_{XpY} az X, Y rugók, valamint azok párhuzamos kötéséből alkotott rezgőrendszer periódusideje.



2. ábra. Az *X* rugóból és ráakasztott nehezékből álló rendszer T_X periódusidejének függése a nehezék *m* tömegétől négyzetgyöksnek tűnő görbét ad.



3. ábra. Az *X* rugóból és ráakasztott nehezékből álló rendszer T_X periódusidejének függése a nehezék *m* tömegének négyzetgyökétől egy egyenest ad.

rugó mindegyik pontjának sebességét. Meg kell találnunk e mozgási energia eredetét, mert az energiatranszfer befolyásolhatja a rezgés periódusát. Mindezek ellenére a képlet az iskolai laboratóriumok lehetőségeinek megfelelő pontosságú értéket ad.

A mérési adatok értelmezése

A fizikus a mérései befejeztével, kíváncsiságból, megrajzolja a mérésből származó grafikonokat. Számára ezek a grafikonok többet mondanak, mint bármely, esetleg csak egyszerűsített alapokon nyugvó elmélet. A *2. ábrán* látható a rezgés T_X periódusidejének függése az *X* rugóra akasztott test *m* tömegétől. A periódusidő látszólag arányos a tömeg négyzetgyökével, az ordinátatengely pedig érintője a meghosszabbított illesztőgörbének. *Minden úgy van, mint az iskolai elméletben!* Mégis van egy pici különbség: a közelítő hatványfüggvény kitevője kisebb, mint 1/2, ami a négyzetgyöknek felelne meg. Ekkor helytelenül mondhatnánk: *hibás méréseket végeztünk!* Nem, itt teljesen másról van szó!

Ha a rugalmas inga periódusidejét a nehezék tömegének négyzetgyöke függvényében ábrázolnánk, akkor a periódusidőre vonatkozó egyszerű képlet szerint az origón áthaladó egyenest kellene kapnunk. A *3. ábrán* az illesztőgörbe egy tökéletes egyenes, ezért meghosszabbítottam az origó felé. *Tettetett, nagy meglepetésemre, az egyenes nem halad át az origón!* Ez azt jelenti, hogy a rugó a ráakasztott nehezékek nélkül is rezegne, amit kísérletileg is ellenőriztem. Ezek szerint van egy *figyelmen kívül hagyott tehetetlenség,* amelyet nem tudunk elkerülni! Feltételezzük, hogy a rugó ezzel a tehetetlenséggel szegül ellen a részecskéi sebessége megváltoztatásának. Ezt az egyenértékű tehetetlenséget hozzá kell adnunk a nehezék *m* tömegéhez, és meg is kell határoznunk az értékét.

Jelölje μ ezt az egyenértékű tehetetlenséget, ekkor a periódusidő képlete így alakulna:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+\mu}{k}}\,. \tag{1}$$

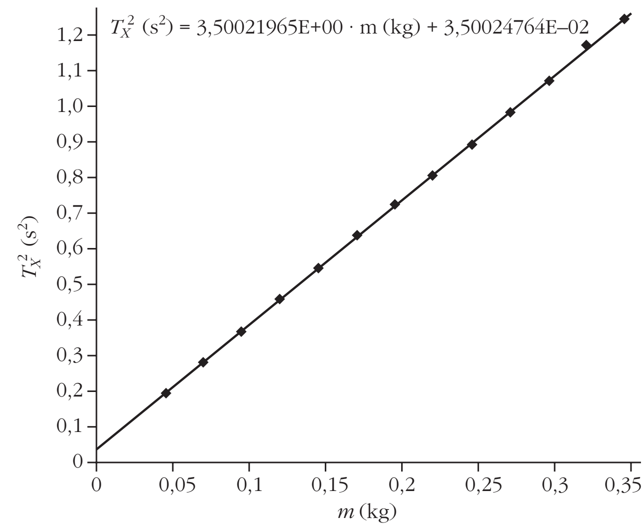
Ebben a képletben nem tudjuk szétválasztani a két tehetetlenséget, ezért az előbbiekben a *T* ábrázolása a nehezék tömege négyzetgyökének függvényében ($m^{1/2}$) nem vezethet a μ egyenértékű tehetetlenség és a *k* rugóállandó egyidejű meghatározásához.

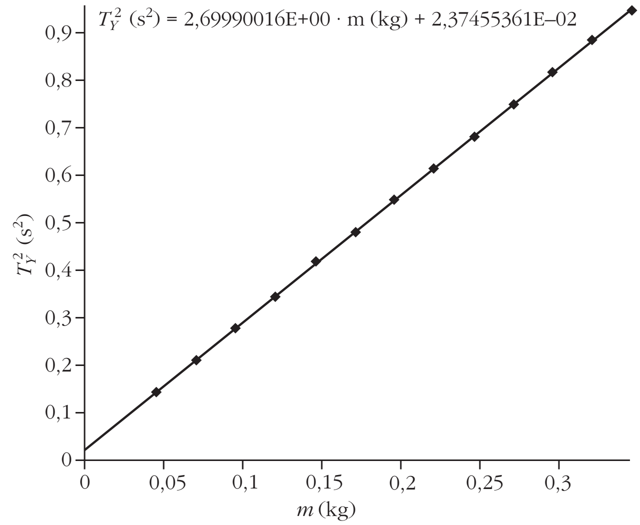
Ha az (1) egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor *m* függvényében egy egyenest kapunk, az iránytényező tartalmazza a *k* rugóállandót, az állandó tag pedig a rugó μ egyenértékű tehetetlenségét:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}\,m + \frac{4\pi^2}{k}\,\mu\,. \tag{2}$$

A két ismeretlent tökéletesen szétválaszthatjuk a $T^2 = a\,m + b$ egyenlet együtthatóiból:

4. ábra. Az *X* rugóból és ráakasztott nehezékből álló rendszer periódusidő-négyzetének függése a nehezék tömegétől egy egyenest ad.





5. ábra. Az *Y* rugóból és ráakasztott nehezékből álló rendszer periódusidő-négyzetének függése a nehezék tömegétől egy egyenest ad.

$$\frac{4\,\pi^2}{k} = a \;\rightarrow\; k = \frac{4\,\pi^2}{a}, \tag{3}$$

valamint

$$\frac{4\,\pi^2}{k}\,\mu = b \;\rightarrow\; \mu = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

A *4., 5., 6. ábrák* a $T^2 = f(m)$ függvényt ábrázolják, ahol T az inga periódusideje, m a nehezék tömege. A grafikonokat rendre megszerkesztettem az X és Y rugókból létrejött ingákra, valamint a két rugó párhuzamos kötéséből létrejött rugalmas ingára.

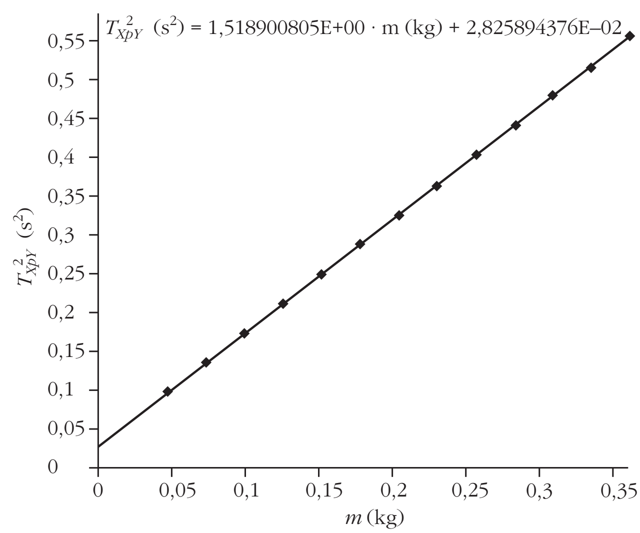
A k rugóállandókat a (3) segítségével számoljuk ki, a Δk hibát statisztikai módszerekkel kaptam meg:

X rugó: k_X = (11,28±0,0896) N/m;

Y rugó: k_Y = (14,62±0,0926) N/m;

XpY rugók: k_{XpY} = (25,99±0,0790) N/m.

6. ábra. Az X és Y rugóból és ráakasztott nehezékből álló rendszer periódusidő-négyzetének függése a nehezék tömegétől egy egyenest ad.



A rugóállandók hibái százalékban: δk_X = ±0,79%; δk_Y = ±0,63% és δk_{XpY} = ±0,30%, ahol $\delta k = \pm\Delta k/k\cdot 100\%$.

Az egyenértékű tehetetlenség kiszámítása

A három illesztőegyenes analitikus formáinak állandó tagjaiból kiszámíthatjuk az X rugó, az Y rugó és az XpY párhuzamosan kötött rugók egyenértékű tehetetlenségeinek értékét, valamint a meghatározások hibáit, amelyek rendre:

X rugó: μ_X = (10,00±1,81) g;

Y rugó: μ_Y = (8,79±1,43) g;

XpY rugók: μ_{XpY} = (18,60±0,72) g.

Az egyenértékű tehetetlenségek hibái százalékban: $\delta\mu_X$ = ±18,1%; $\delta\mu_Y$ = ±16,3% és $\delta\mu_{XpY}$ = ±3,9%.

Az egyenértékű tehetetlenség analitikus formája

Ez a tehetetlenség egyaránt jelentkezik a rugó megnyúlásakor vagy összenyomásakor, a változás irányától függetlenül. Az m_R tömegű és L hosszúságú rugó egyik vége rögzített, a másik v pillanatnyi sebességgel mozog (*7. ábra*). A rögzített végtől valahol x távolságra levő δm elemi tömeg pillanatnyi sebessége u, amely függ ezen elemi tömeg rugóban levő helyzetétől. E rugóelem mozgási energiáját az anyagi pont energiájaként számítjuk ki:

$$\delta E_c = \delta m \frac{u^2}{2}. \tag{5}$$

A δm elemi tömeg egy (*nagyon*) ferde henger, amelynek szélessége δx, ez bárhol lehet a rugó mentén (a tömeg egyenlőtlen eloszlása nem befolyásolja a δm elemi tömeg méretét):

$$\delta m = m_R \frac{\delta x}{L}. \tag{6}$$

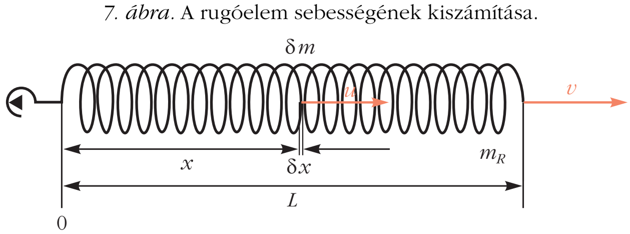
Feltételezzük, hogy a rugót egyenletesen tekercselték, és a szabad vég pillanatnyi sebessége v, a δm elemi tömeg sebessége arányos lesz x/L-lel:

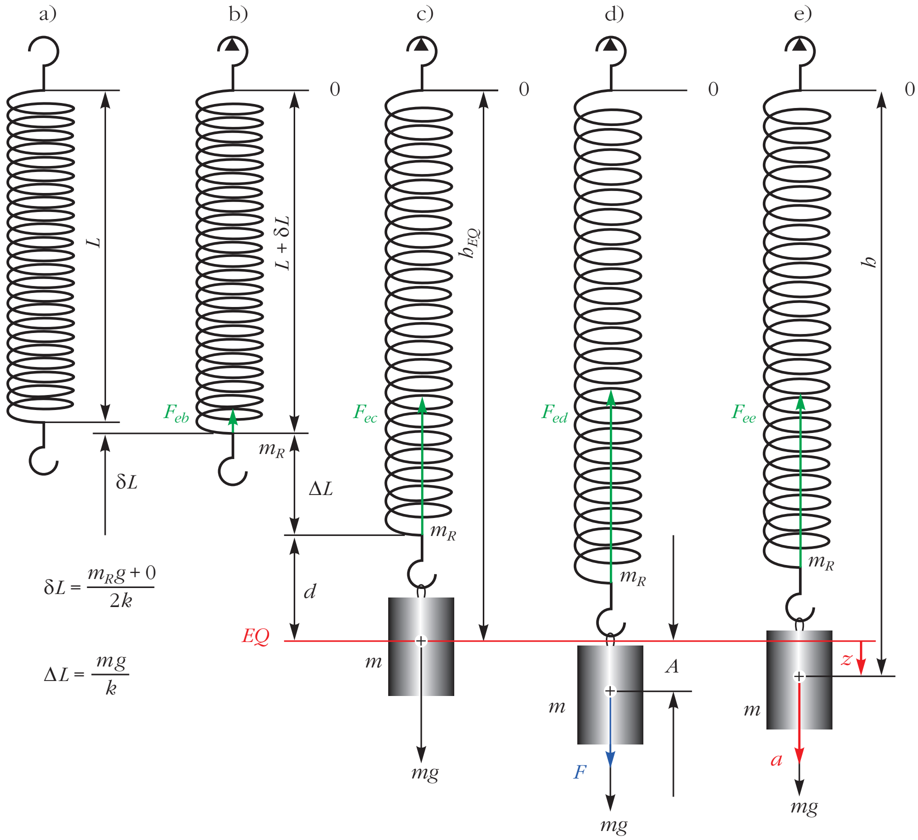
$$u = v\,\frac{x}{L}. \tag{7}$$

A tömegelem (6) értékét és annak (7) sebességét behelyettesítjük az (5) egyenletbe:

$$\delta E_c = \frac{1}{2}\,\frac{m_R v^2}{L^3}\,x^2\,\delta x. \tag{8}$$

7. ábra. A rugóelem sebességének kiszámítása.





8. ábra. A rugó különböző helyzetei a rezgés kialakulása folyamán. Az a) helyzetben a rugóra nem hat tengelyirányú erő, ez csak vízszintesen lenne lehetséges, de a távolságok könnyebb értelmezése érdekében függőleges helyzetben ábrázoltam.

A teljes rugó mozgási energiáját az elemi δE_c energiák (8) a rugó L hosszában való összegzésével, azaz integrálásával kapjuk meg:

$$E_c = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{m_R v^2}{L^3} x^2 \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Az integrálás elvégzése után megkapjuk az egyik pontban rögzített rugó pillanatnyi teljes mozgási energiáját:

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m_R}{3} v^2. \tag{10}$$

Ha a rugó tömegeloszlása egyenletes (a menetköz állandó), akkor a rugó μ egyenértékű tehetetlensége a rugó m_R tömegének egyharmada, függetlenül a mozgás irányától:

$$\mu = \frac{m_R}{3}. \tag{11}$$

A rezgés periódusa

A rendszerre ható összes erőt figyelembe véve felírjuk a dinamika második törvényét. Ahhoz, hogy az erők könnyebben láthatók legyenek, a *8. ábrán* öt helyzetben ábrázoltam a rugót. Az F_e rugalmassági erő második indexe a rajzszámot jelenti.

- *Az L aktív hosszúságú rugóra nem hatnak erők.* Az alsó akasztó tömegét a nehezék részének tekintjük. Mivel a rugó nyugalomban van, nincsenek rugalmassági erők ($F_{ea} = 0$).
- *A rugó a saját súlya alatt megnyúlik.* Az elemzéskor a felső akasztótól indulunk, az akasztó és az elemezett pont közötti rugót a pont alatti rugó súlya nyújtja meg. A kezdetben ez az erő $m_R g$, a végén pedig zérus lesz. Feltételezzük az egyenletes tekercselést, így az elemi megnyúlások összeadása helyett elfogadjuk, hogy a rugót az $(m_R g + 0)/2$ átlagerő nyújtotta meg. Az F_{eb} rugalmassági (elasztikus) erő egyenlő a rugó súlyának a felével.
- *Az m tömegű testet ráakasztjuk a rugóra.* Mivel az akasztónak nincs rugalmassági tulajdonsága, a tömegét hozzáadjuk a nehezék tömegéhez, a felső akasztó azonban nem vesz részt a rezgésben. A rendszer egyensúlyban van, a nehezék és az akasztó közös súlypontját egy kis kereszt jelzi, az EQ egyenes az egyensúlyi vonalat mutatja. A súlypont d távolságra van a rugó legalsó pontjától.

Felírhatjuk az erők egyensúlyát:

$$\left(\frac{m_r}{2} + m\right) g - k(\delta L + \Delta L) = 0. \tag{12}$$

Az EQ vonal a rezgés leírásának referenciája lesz, de a viszonyítási rendszert a rugó felső pontjához kötjük. Ebben a rendszerben az EQ ordinátája:

$$h_{EQ} = L + \delta L + \Delta L + d. \tag{13}$$

- *F erővel meghúzzuk a nehezéket,* annak súlypontja az EQ-hoz képest A-val megereszkedik.
- *Amikor elengedjük a testet,* a rugalmassági erő nagyobb, mint az egyensúlynál volt, egy visszaállító erő alakul ki, rezgés keletkezik. A rendszer 0 eredőjéhez képest a súlypont h távolságra lesz.

$$h = L + \delta L + \Delta L + d + z. \tag{14}$$

A (14) egyenletből kivonjuk a (13) egyenletet, a rendezés után pedig megkapjuk a nehezék z helyzetét az EQ vonalhoz képest:

$$z = h - h_{EQ}. \tag{15}$$

Összeadjuk a testre ható összes erőt, és felírjuk a dinamika második törvényét:

$$\left(m + \frac{m_r}{3}\right) a = m g + \frac{m_r g}{2} - k(\delta L + \Delta L + z). \qquad (16)$$

A (12) és (16) egyenletek összeadása, az egyszerűsítések, valamint az

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d} t^2}$$

behelyettesítés után kapjuk:

$$\left(m + \frac{m_r}{3}\right) \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d} t^2} = -k z. \qquad (17)$$

A (17) egyenlet egy állandó együtthatójú, másodrendű, homogén differenciálegyenlet, amelyet könnyen megoldunk a partikuláris megoldások megtalálásával. A partikuláris megoldást a $z = e^{rt}$ formában keressük, ahol az r egy fizikai értelem nélküli segédváltozó. Kiszámítjuk a deriváltakat és behelyettesítjük a (17)-be:

$$\frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} t} = r e^{rt} \quad \text{és} \quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d} t^2} = r^2 e^{rt}, \qquad (18)$$

így

$$\left(m + \frac{m_r}{3}\right) r^2 e^{rt} + k e^{rt} = 0. \qquad (19)$$

Mivel az e^{rt} kifejezés nem lehet zérus, végigoszthatunk vele. Ugyancsak osztunk

$$m + \frac{m_R}{3}$$

tömegértékkel (ez sem lehet 0), így:

$$r^2 + \frac{k}{\left(m + \frac{m_R}{3}\right)} = 0. \qquad (20)$$

A második tagot egyelőre magyarázat nélkül jelöljük ω^2-tel. Megkaptuk a (17) differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét:

$$r^2 + \omega^2 = 0. \qquad (21)$$

Az ω^2 jelölés látszólag hibás, mert két négyzet összege nem lehet zérus. A karakterisztikus egyenlet két gyöke két partikuláris megoldást fog adni, ezek lineáris kombinációja pedig a differenciálegyenlet általános megoldását. Ha elfogadjuk, hogy az egyenlet gyökei lehetnek imagináriusak is, akkor a lineáris kombináció egy harmonikus függvényhez (sin, cos) vezethet, azaz harmonikus oszcillátorunk lesz. Az ω^2 előtti „+” jelnek különleges fontossága van. Ez a jel csak akkor lesz pozitív, ha a (17) egyenletben a k előjele negatív, vagyis a visszaállító erő ellentétes a z kitéréssel. Ha ráadásul a k értéke állandó, akkor a rezgés harmonikus lesz. Elfogadjuk az értelmetlennek tűnt ω^2 jelölést, és kiszámítjuk a (21) egyenlet két imaginárius gyökét:

$$r_1 = +i\omega \quad \text{és} \quad r_2 = -i\omega. \qquad (22)$$

Megkapjuk a differenciálegyenlet két partikuláris megoldását:

$$z_1 = e^{+i\omega t} \quad \text{és} \quad z_2 = e^{-i\omega t}. \qquad (23)$$

Az általános megoldást a két partikuláris megoldás lineáris kombinációjából állítjuk elő:

$$z = C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \qquad (24)$$

A harmonikus oszcillátor leírásához ezt az egyenletet két időpontban illesztenünk kell a fizikai folyamatra, de ez nehéznek tűnik. Másik lehetőség, hogy találjunk két fizikai mennyiséget, amelynek értékét ismerjük a $t = 0$ időpontban. Ezt az utóbbit választjuk, és kiszámítjuk a kitérést és a sebességet a kezdő időpontban. Ha $t = 0$, a kitérés éppen az A amplitúdó lesz:

$$A = C_1 + C_2. \qquad (25)$$

Kiszámítjuk a z kitérés első deriváltját, a v sebességet:

$$\frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} t} = i\omega\, C_1 e^{+i\omega t} - i\omega\, C_2 e^{-i\omega t}. \qquad (26)$$

A kezdeti időpontban a sebesség zérus. Egyszerűsítünk a nullától biztosan különböző ω-val, majd a i-vel, és kapjuk:

$$0 = C_1 - C_2. \qquad (27)$$

A (25) és (27) egyenletekből következik, hogy $C_1 = C_2 = A/2$, ezt a (24)-be helyettesítjük:

$$z = A \frac{e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \qquad (28)$$

ahol a tört éppen az Euler-képletből származtatható $\cos\omega t$ kifejezése. A behelyettesítés után a rezgés egyenlete így alakul:

$$z = A \cos\omega t. \qquad (29)$$

Ha valami teljesen ismeretlen kifejezést ω^2-tel jelöltünk, ez még nem jelenti azt, hogy az ω a rezgés körfrekvenciája lenne. Megkeressük azt a két, t_1 és t_2 időpontot, amelyeknek 2π szögkülönbség felel meg, ezek különbsége lesz a rezgés T periódusideje:

$$\omega t_2 - \omega t_1 = 2\pi, \quad T = t_2 - t_1, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (30)$$

A (20) és (30) egyenletekből megkapjuk a rugalmas inga periódusidejét (*csak az egyenletesen tekercselt rugóra érvényes*):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_R}{3}}{k}} \,. \qquad (31)$$

Megkaptuk az (1)-ben feltételezett periódusidő-képletet. A μ egyenértékű tehetetlenség értéke $m_R/3$.

A rugó tömegének ellenőrzése

Az $m_R = 3\mu$ képlet csak a tökéletesen egyenletes tömegeloszlású rugó esetében érvényes. Az $m_R/3$ a rugó dinamikus (tehetetlen) tömege, amely az egyik végén rögzített rugónak a tengelyirányú állapotváltozásokkal szembeni ellenszegülését jellemzi. A rendszer egyensúlyi helyzetében, lásd (12) egyenlet, a gravitációs tömeg szerepelt, ezt elektronikus mérleggel megmértük, az eredmények:

X rugó:	$m_{RX} = 3\mu_X = 30{,}00$ g	$m_{RX}^{\text{mérleg}} = 19{,}4$ g
Y rugó:	$m_{RY} = 3\mu_Y = 26{,}38$ g	$m_{RY}^{\text{mérleg}} = 24{,}6$ g
XpY rugó:	$m_{RXpY} = 3\mu_{XpY} = 55{,}81$ g	$m_{RXpY}^{\text{mérleg}} = 44{,}0$ g

A tehetetlen tömeg meghatározása nagyon jó, ez megfigyelhető a rugók párhuzamos kapcsolásakor létrejött hibánál:

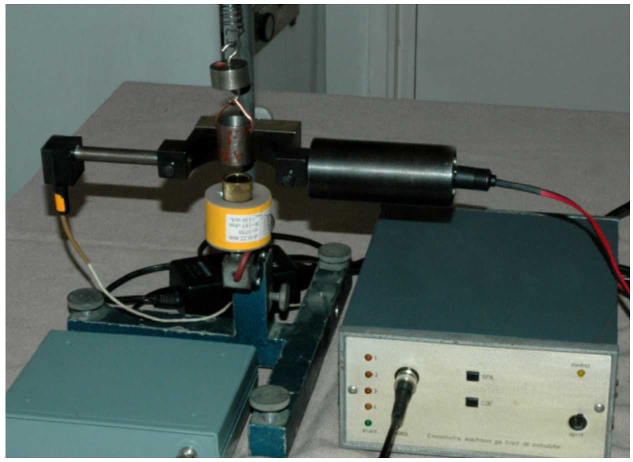
$$\varepsilon = \frac{m_{RX} + m_{RY} - m_{RXpY}}{m_{RXpY}} \cdot 100 = 1{,}02\%.$$

Az *X* rugó esetében látszik legjobban az egyenetlen tömegeloszlás hatása. Az *X* rugó dinamikus tömege 50%-kal nagyobb a mérleggel mért tömeghez képest, de a csoportosításnál fellépő hiba csak 1,02%, azaz megfelelő a tehetetlen tömeg mérési módszere.

Hibaforrások

Az alkalmazott mérőrendszer precizitása tette lehetővé olyan jelenségek detektálását, amelyeket az egyszerűsített elmélet elhanyagolt. Még maradtak különböző rendszerhibák, egyeseket próbáltam lecsökkenteni. Íme, néhány megmaradt hibaforrás:

- *A mérések száma* (13) kevés, az adatfeldolgozás megkönnyítése érdekében korlátoztam.
- *A differenciálegyenlet megoldásának könnyítése.* A (17) egyenletet állandó együtthatójú egyenletnek vettem. Ez csak a nagyon kicsi amplitúdók esetében realizálódik, mert csak ilyenkor kerülhetjük el a rugóállandó változását a kitéréssel. Ha az amplitúdó nagy, a rezgés már nem harmonikus, az egyenletet nehéz megoldani, ha ennek ellenére harmonikusnak vesszük, akkor nagy hiba keletkezik. Mechanikailag az amplitúdót 10 mm-re korlátoztam.
- *„Függőleges” rezgések.* Egy megfogó elektromágnest alkalmaztam (*9. ábra*), ennek egy kis rögzítő fészke van. Amikor az elektromágnes kikapcsol, a nehezék függőleges rezgéseket végez, még 50-60 rezgés után is.



9. ábra. A megfogó elektromágnes és a fénysorompó. A sárgaréz anya biztosítja az állandó nehezék és az elektromágnes közvetlen érintkezésének a megszüntetését, a remanencia hatásának lényeges csökkentését.

- *Az elektromágnes remanenciája.* A legerősebb hibaforrás. A remanencia hatásának egy elsődleges csökkentését az elektromágnes és a nehezék közötti távolság legnagyobb értékének beszabályozásával értem el. A sárgaréz anya nagyon finom menetű. Még van egy szabályozási lépcső: késleltetem a periódusmérés kezdetét, így a test kissé eltávolodik az elektromágnestől, közben a remanencia csökken, és megszűnik a Lenz-hatás is. Az első másodpercekben ellenőrizhetjük a rezgés függőlegességét, ha nem felel meg, megállítjuk a kísérletet, így elkerülünk egy rossz mérést.
- *Az X rugó menetei alul összetömörültek,* vagyis a rugó alja felé megnőtt a lokális egyenértékű tehetetlenség. A tanulmánynak nem célja a gravitációs tömeg ilyenszerű meghatározása, az másként sokkal egyszerűbben mérhető, ráadásul állandó, de a fenti ritkább menetek erőteljesebb igénybevétele befolyásolhatja a rugóállandó értékét, ezek mind hibaforrások lehetnek. Ezeket a hibákat sokkal könnyebb elkerülni, mint a rossz mérésekben azonosítani őket.

Következtetések

- A laborgyakorlat fő célja a valóság és az egyszerűsített modellek alapján levezetett törvények közötti kis ellentmondások megtalálása volt. Megvizsgáltam azokat az okokat, amelyek az egyszerűsített periódusidő-képlet alkalmazását korlátozzák, és csak a rugóállandó nagyságrendjének meghatározását teszik lehetővé.
- Kifejlesztettem egy módszert, amely a rugóállandó dinamikus mérését és a rugó dinamikus tehetetlenségének egyidejű meghatározását teszi lehetővé. Egy-két periódusmérésből csak a rugóállandót véljük meghatározni, ilyenkor a dinamikus tehetetlenség „nem is látszik”. Más-más tömegekre kapott rugóállandó-eredményeink változásaiban mérési hibákra gyanakszunk, pedig csak a rossz adatfeldolgozási módszerünk takarta el a különbségek okát.

10. ábra. Mini-szabadesés készülék. Az oszlop aljára szerelt L formájú tartóba kerül az elektromágnes. A rugó megnyúlását század mm-es pontossággal lehet megmérni.

• A rugóállandó meghatározásának szórása 0,80% alatti, vagyis az illesztőegyenes nem „forog”. Másként szólva, ez a nehezékek tömegének meghatározási pontosságát bizonyítja. Egy egyenletesen tekercselt rugóval meghatározható lenne a dinamikus rugóállandó változása a nehezék tömegének függvényében, ezt össze lehetne vetni a statikus módszerekkel kapott változásokkal. A szabadesés tanulmányozására készülő „mini-szabadesés” készülékhez (*10. ábra*) beszerelhető precíziós megnyúlásmérő méréseiből származó $k = f(m)$ másodfokú illesztőfüggvény több kitüntetett tömegpontban kapott deriváltját egyeztethetnénk a fenti módszerrel mért helyi k értékekre. Ilyenkor a kitüntetett tömeg körüli nagyon sok dinamikusrugóállandó-méréssel ellenőrizhető lenne a helyi statikus és dinamikus rugóállandók egyenlősége.

• Az egyenértékű tehetetlenség meghatározásának hibája nagyobb 10%-nál, vagyis az illesztőegyenes függőleges szabadsága elég nagy. Másként szólva, ez a periódusidő-meghatározások pontatlanságára vall. A nullátmenetek detektálása mechanikailag rögzített, az időközmérés pontossága igen jó, felvetődik a periódusidő stabilitása, egyenlőtlensége, de nagyszámú méréssel és több tömegértékkel ez a hiba bizonyára csökkenthető lenne. *Erre nem találtam jobb magyarázatot.*

11. ábra. Laborgyakorlat a rugalmas ingával.

Mérés közbeni hangulat

A nagyváradi Ady Endre Líceumban mindig nagy kihívást jelentett az adatfeldolgozásos kísérletek referátumainak elkészítése. Az előfeltétel a mérések pontossága volt, mert a csoport egyik mérési jegyzőkönyvét mindig elkértem, így nem volt lehetséges az adatok utólagos „kozmetikázása”. Az évek során ezt a laboratóriumi gyakorlatot számtalanszor elvégeztük, a kicsik csak mérni tanultak, a nagyok az adatfeldolgozást is kóstolgatták. A mellékelt képen (*11. ábra*) a rugalmas ingával kísérletező nagy diákok egyik csoportját látjuk, a másik nem fért bele a felvételbe (14 mérőhely). A felsőbb éveseket mindig előre figyelmeztettem, hogy egy-két mérés után, a tanult képlet alapján a többi mérést nehogy a számítógéppel generálják (programozást is tanítottam nekik), mert az általam tanított és általánosan elfogadott képlet a pontos mérésekkel nem igazolható. A Fizikum jó hangulatát a kísérletezés élménye, az egyszerű feladat buktatóinak remélt megoldása és a kellemes háttérzene biztosította. Az erre rátevődött munkahangulati morajjal együtt, a tanárnak ezek az órák örök élményt jelentenek.