ÜTKÖZÉSEKRŐL KÖZÉPISKOLÁBAN – MÁSKÉNT

Kiss Miklós
Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium

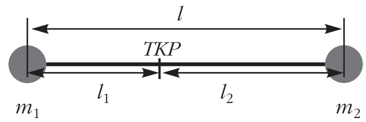
A tananyag csökkentésének időszakát éljük. Próbáljuk megkeresni, mit lehetne még elhagyni, hogy kisebb legyen a diákok terhelése. Van azonban egy meggondolandó körülmény: gyakran igaz, hogy többet tudni könnyebb, mint keveset. Jó példa erre az üközések témaköre. Napjainkban ez fontos téma, elég, ha a gyorsítókra gondolunk (LHC, LEP). Ugyanakkor a legegyszerűbb kísérletek közé tartoznak a pénzérmék ütközései. A tömegközépponti rendszer előnyeit kihasználva e témakör a középiskolában szakkörön, emelt szinten – bizonyos részei még az általános iskolában is – jól tárgyalhatók.

Az ütközést szokásosan két részletben tanítjuk. Először a lendület fogalmának kialakításakor, ezen keresztül definiáljuk a tömeget. Ekkor igazából a lendület fogalmának a bevezetését a lendület ütközések közbeni megmaradása indokolja, ami a sebességmegmaradást váltja fel különböző tömegű testek ütköztetése esetén. A megmaradási törvényt azután fel is tudjuk használni néhány egyszerű, de hasznos esetben: például tömegek szétlökése rugóval.

Ezen kívül valójában csak a tökéletesen rugalmatlan ütközést tudjuk tárgyalni, két okból:

1. akkor még nem tárgyaljuk az energiát, csak a dinamika után,
2. másodfokú egyenletet/egyenletrendszert még nem oldhatunk meg (matematikából tizedikes tananyag).

Valójában ezekre nincs is szükség. A klasszikus tárgyalást itt nem ismertetjük. Nézzük inkább, milyen egyszerűvé és hatékonnyá válik a tárgyalás a tömegközéppont fogalma segítségével. Mindkét nehézség elesik: nincs szükség az energia fogalmára és a probléma sem lesz másodfokú. A tömegközéppont fogalma segítségével az ütközés elegánsan és könnyen tárgyalható, és ez még az általános esetre, vagyis a reális ütközések esetére is igaz. Ami meglepő, hogy e témához nagyon kevés helyen találunk segédanyagot, irodalmat, kivétel talán [1, 2]. Érdekes, hogy még az interneten is csak a saját, 2008 nyarán, az önképzőköri táborban tartott előadásomat találtam meg e témában [3, 4]. Ezért gondolom hiánypótlónak ezt az írást. Megjegyzem, hogy angol nyelven sem találni igazi segítséget, talán legközelebb az [5] visz.



1. ábra. A pálca két tömeggel.

A tömegközéppont fogalma része a tananyagnak. Nekünk itt csupán két tömegpont tömegközéppontjának meghatározására van szükségünk. Legyen egy elhanyagolható tömegű pálca két végpontján egy m_1 és egy m_2 tömegű tömegpont (*1. ábra*). Ekkor tapasztalatból tudjuk (például légpárnás asztalon megvalósított kísérletekből), hogy a tömegközéppont a tömegekkel fordított arányban osztja a tömegek távolságát, vagyis az ábra jelöléseivel:

$$m_1\, l_1 = m_2\, l_2 . \tag{1}$$

Ez akkor is igaz, ha nincsen pálca. Az azonban már általában nem szerepel tanórán, hogy melyek a tömegközéppont koordinátái, pedig csak egy jó koordináta-rendszert (*2. ábra*) kell választanunk.

Ekkor, ha az m_1 tömegű test az x tengely x_1, az m_2 tömegű test pedig az x_2 koordinátájú pontján van, az (1) összefüggést felhasználva könnyen látható, hogy a tömegközéppont x_{TKP} koordinátája:

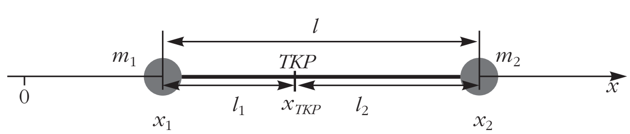
$$x_{TKP} = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

Hasonló összefüggés adódik a helyvektorokra és a többi koordinátára is, de nekünk ennyi elég. Ebből könnyen megkaphatjuk a sebességekre vonatkozó szabályt:

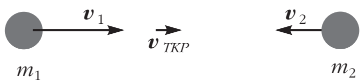
$$\boldsymbol{v}_{TKP} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

Ez egy vektoregyenlet. Egyenes ütközések esetén a vektorokat előjeles számokkal is ábrázolhatjuk. Tan-

2. ábra. A tömegpontok a koordináta-rendszerben.



Kiss Miklós az ELTE-n 1982-ben matematika-fizika, majd a KLTE-n 1986-ban számítástechnika szakon szerzett tanári diplomát. 1982-től a Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium tanára. 2005-ben elméleti megfontolások alapján dátumot is mutató napórát készített gimnáziuma falára. PhD-dolgozatát *Trócsányi Zoltán* vezetésével *A vasnál nehezebb elemek keletkezése csillagokban* címmel a DE Fizikai Tudományok Doktori Iskoláján írta és védte meg. Kutatási témája magszintézis neutronbefogással.



3. ábra. A két test ütközés előtt. A két test és a tömegközéppont sebessége.

órán a tömegközéppont mozgásáról szoktunk beszélni, de a (3) formuláról általában nem.

Most már rátérhetünk tulajdonképpeni témánkra. Elsőként konkrét esetet vizsgálunk meg. Ez már általános iskolás szakkör keretében is megtehető. Akinek ül a gondolat, az majd mindig tudja használni.

Mozogjon két test a *3. ábrán* látható módon. A két test egyenesen és centrálisan fog ütközni. Adatok $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg, $v_1 = 5$ m/s, $v_2 = -2$ m/s. Itt a második sebesség negatív előjele a mozgás irányát mutatja. A képletekbe célszerűen fogunk behelyettesíteni, vagyis a mennyiség irányát úgy vesszük figyelembe, ahogy áttekinthetőbben lehet dolgozni.

A mozgásokat tetszőleges vonatkoztatási rendszerben leírhatjuk. A megadott sebességek a tanteremhez viszonyítva (továbbiakban laboratóriumi rendszer) értendők. Nézzük az ütközést egy, a tömegközépponthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben! Ennek előnyeiről menet közben győződünk meg. A tömegközéppont sebessége a megadott adatokkal:

$$v_{TKP} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\ \mathrm{kg} \cdot 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3\ \mathrm{kg} \cdot 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\ \mathrm{kg} + 3\ \mathrm{kg}} = 0{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{4}$$

A képletben figyelembe vettük a második test sebességének irányát, a tömegközéppont jobbra mozog.

Mekkora a testek sebessége a tömegközépponti rendszerben?

Az első test egy másodperc alatt 5 métert halad, a tömegközéppont 0,8 métert, ezért az első test a tömegközépponti rendszerben egy másodperc alatt 4,2 métert halad, vagyis a sebessége $u_1 = 4{,}2$ m/s. A sebességet u-val jelöltük, hogy megkülönböztessük a laboratóriumi sebességtől. A második test 2 métert halad 1 másodperc alatt ellenkező irányban, mint a tömegközéppont, így a távolságuk egy másodperc alatt 2,8 métert nő. Ezért a második test sebessége $u_2 = -2{,}8$ m/s. A negatív előjel most is a haladás irányát mutatja.

Ha rugalmasan ütköznek, akkor lendületük, így a tömegközépponti rendszerbeli sebességük nagysága sem változik meg, csak az irányuk válik ellentétessé. Ennek megfelelően az ütközés utáni sebességek a tömegközépponti rendszerben $u'_1 = -4{,}2$ m/s, illetve $u'_2 = 2{,}8$ m/s. Most még vissza kell térni a laboratóriumi rendszerbe. Az első test visszafelé halad 4,2 métert, de a tömegközéppont előre megy 0,8 métert, így 1 másodperc alatt 3,4 métert halad visszafelé, ezért $v'_1 = -3{,}4$ m/s. A második test másodpercenként 2,8 métert halad előre a tömegközépponthoz képest, de a tömegközéppont 0,8 métert halad, ezért a második test összesen 3,6 métert halad előre, tehát sebessége $v'_2 = 3{,}6$ m/s lesz.

Ezzel a feladatot megoldottuk teljesen rugalmas ütközés esetére úgy, hogy a tömegközéppont sebességének kiszámításán kívül még képletet sem használtunk.

A lendületmegmaradás törvénye természetesen mindkét vonatkoztatási rendszerben érvényes, csak más lesz az egyes testek lendülete. Nézzük a lendületeket a tömegközépponti rendszerben. Az két test lendülete (a lendületet szokásos módon p-vel jelöljük):

$$p_1 = m_1 v_1 = 2\ \mathrm{kg} \cdot 4{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8{,}4\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}},$$
$$p_2 = m_2 u_2 = 3\ \mathrm{kg} \cdot \left(-2{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = -8{,}4\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}. \tag{5}$$

A két lendület láthatóan egyenlő nagyságú és ellentétes irányú, összegük nulla. Összegük az ütközés után is nulla lesz, ez minden további számítás alapja. A laboratóriumi rendszerhez tartozó lendület a tömegközéppont lendületével egyezik meg, a tömegközéppont viszi tovább.

Laboratóriumi rendszerben:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2. \tag{6}$$

Az összes lendület a (3) összefüggést figyelembe véve ütközés előtt:

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v_{TKP} \tag{7}$$

és ütközés után:

$$p'_1 + p'_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = (m_1 + m_2)\, v_{TKP}. \tag{8}$$

Tömegközépponti rendszerben:

$$p_{1,\,TKP} + p_{2,\,TKP} = p'_{1,\,TKP} + p'_{2,\,TKP} = 0, \tag{9}$$

tehát

$$p'_{1,\,TKP} = -p_{1,\,TKP} \quad \text{és} \quad p'_{2,\,TKP} = -p_{2,\,TKP}. \tag{10}$$

A lendület tehát bármelyik ütközéstípusnál megmarad. Osztályozzuk az ütközéseket a tömegközépponti rendszerből nézve:

a) tökéletesen rugalmatlan – mindkét test lendülete nulla az ütközés után,

b) tökéletesen rugalmas – mindkét test lendülete megfordul, nagyságuk nem változik,

c) reális – a lendületek megfordulnak, nagyságuk csökken.

A fenti esetek mennyiségileg könnyen jellemezhetők, ha bevezetjük a k ütközési szám fogalmát, ami a tömegközépponti rendszerben az ütközés utáni és az ütközés előtti lendületnagyságok hányadosa.

$$k = \frac{|p'_{1,\,TKP}|}{|p_{1,\,TKP}|} = \frac{|p'_{2,\,TKP}|}{|p_{2,\,TKP}|}. \tag{11}$$

A lendületek egyenlősége miatt vegyesen is használhatjuk a lendületeket. Ha a (6) szerinti módon írjuk fel, az is látható, hogy a tömeggel való egyszerűsítés után:

$$k = \frac{|u'_{1,\,TKP}|}{|u_{1,\,TKP}|} = \frac{|u'_{2,\,TKP}|}{|u_{2,\,TKP}|}. \tag{12}$$

Vagyis a tömegközépponti rendszerben az egyes testek ütközés utáni és ütközés előtti sebességnagyságainak hányadosa is az ütközési számot adja meg.

Ennek megfelelően az egyes esetekre jellemző ütközési szám: a) $k = 0$, b) $k = 1$, c) $0 < k < 1$. Az összes esetre igaz, hogy $0 \le k \le 1$.

Ha az előző feladatban $k = 0{,}5$, akkor annyi lesz a változás, hogy ütközés után a tömegközépponti rendszerben a testek lendülete és így sebessége is a felére csökken és irányuk persze ellentétesre változik. Ezért az ütközés utáni sebességek a tömegközépponti rendszerben $u'_1 = -2{,}1$ m/s, illetve $u'_2 = 1{,}4$ m/s. A korábban leírt módon visszatérve a laboratóriumi rendszerbe, a tömegközéppont sebességét figyelembe véve $v'_1 = -1{,}3$ m/s és $v'_2 = 2{,}2$ m/s lesz. Ez az eset is tárgyalható képletek és különösebb matematikai erőkifejtés nélkül.

Nézzük általánosan az ütközéseket!

A kiindulás a harmadik ábrának megfelelően, csak nem használjuk fel a sebességek (v_1 és v_2) konkrét értékét. A tömegközéppont sebességét (3) adja. A sebességek a tömegközépponti rendszerben ennek megfelelően:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - v_{TKP} = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_1 - m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_2 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \tag{13}$$

valamint

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - v_{TKP} = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 v_2 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 v_2 + m_2 v_2 - m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Tehát a két test sebessége ütközés előtt a tömegközépponti rendszerben:

$$u_1 = \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad \text{és} \quad u_2 = \frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}. \tag{15}$$

Látható a szimmetria, továbbá a megfelelő tömegekkel szorozva a sebességeket, a lendületek egyenlő nagysága és ellentétes iránya. Mivel a tökéletesen rugalmas ütközés a tömegközépponti rendszerben a lendületek és sebességek egyszerű megfordulását eredményezi, az ütközés utáni sebességek:

$$\begin{aligned} u'_1 &= -\frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad \text{és} \\ u'_2 &= -\frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{16}$$

A laboratóriumi rendszerben pedig a tömegközéppont sebességének hozzáadásával jutunk a sebességekhez:

$$\begin{aligned} v'_1 &= u'_1 + v_{TKP} = \frac{m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \tag{17}$$

valamint

$$\begin{aligned} v'_2 &= u'_2 + v_{TKP} = \frac{m_1 v_1 - m_1 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Tehát:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{és} \\ v'_2 &= \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Az eredmény itt is szimmetrikus. A szereplő vektorok irányát, itt az előjelet is figyelembe kell venni! Rögtön ellenőrizhetjük numerikus példánk adataival, hogy így is számolhatunk. Korábban említettük azonban, hogy numerikus feladatot kényelmesebb a megadott algoritmus szerint megoldani. Más a helyzet a paraméteres problémákkal.

Speciális esetekben, vagyis néhány érdekes adat esetén nézzük meg, mi adódik.

Ha $m_1 = m_2 = m$, akkor $v'_1 = v_2$ és $v'_2 = v_1$. Ez a sebességcsere esete.

Ha $m_1 \ll m_2$, vagyis ha az első test falnak ütközik, akkor $v'_1 = -v_1 + 2v_2$. Ha a második test szembe halad (sebessége negatív), akkor megnövekszik a visszapattanó első test sebességének nagysága (lásd pingponglabda és -ütő). Ha a második test áll, akkor egyszerűen visszapattan az első. Ha pedig a második test egy irányban halad az elsővel, de fele akkora sebességgel ($v_2 = v_1/2$), akkor az első test megáll az ütközés után.

Mi a feltétele annak, hogy a második test álljon meg, ha azonos nagyságú sebességgel ütköznek a testek? Legyen $v_1 = v$ és $v_2 = -v_1 = -v$. Ezekkel a második test sebessége:

$$0 = v'_2 = \frac{2\, m_1\, v - \left(m_2 - m_1\right) v}{m_1 + m_2}, \tag{20}$$

$$\text{ebből}\ \ 2\, m_1\, v - \left(m_2 - m_1\right) v = 0.$$

Tehát $3m_1 = m_2$ adódik, azaz akkor teljesül, ha a második test tömege az első test tömegének háromszorosa.

Tetszőleges k esetére is tudunk számolni. A változás a tömegközépponti rendszerben az ütközés utáni lendület, illetve sebesség nagyságának megállapításánál van. A sebességek:

$$\begin{aligned} u'_1 &= -k\frac{m_2\left(v_1 - v_2\right)}{m_1 + m_2} = \frac{k\, m_2\left(v_2 - v_1\right)}{m_1 + m_2} \quad \text{és} \\ u'_2 &= -k\frac{m_1\left(v_2 - v_1\right)}{m_1 + m_2} = \frac{k\, m_1\left(v_1 - v_2\right)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} v'_1 &= u'_1 + v_{TKP} = \\ &= \frac{k\, m_2\, v_2 - k\, m_2\, v_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_1\, v_1 + m_2\, v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{\left(m_1 - k\, m_2\right) v_1 + (1 + k)\, m_2\, v_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \tag{22}$$

valamint

$$\begin{aligned} v'_2 &= u'_2 + v_{TKP} = \\ &= \frac{k\, m_1\, v_1 - k\, m_1\, v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1\, v_1 + m_2\, v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{(1 + k)\, m_1\, v_1 + \left(m_2 - k\, m_1\right) v_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ha $k = 0$, visszakapjuk a tökéletesen rugalmatlan esetet, ha $k = 1$, a tökéletesen rugalmas esetet.

Itt is igaz, hogy numerikus feladatokban nyugodtan számolhatunk az algoritmussal, gyorsabban eredményhez juthatunk és még a képletre sem kell emlékeznünk.

Hogy a tömegközépponti rendszerrel mennyire hatékonyan lehet dolgozni, arra jó példa lehet a Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny 33. döntőjének mérési feladata. Itt két pénzérme ütköztetéséből tudtunk érdekes információkat kiolvasni [6, 7].

Remélhetően sikerült meggyőznünk a cikk olvasóit a módszer egyszerűségéről és fontosságáról. Ismereteink alapján már azon is elgondolkodhatunk, hogy a modern gyorsítókban (LEP, LHC) miért a tömegközépponti rendszerben ütköztetik a részecskéket, holott korábban a fix céltárgy volt szokásban. Ne feledjük, hogy itt a részecskék összenergiáját használják fel!

Irodalom

1. Holics László (szerk.): *Fizika 1–2*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
2. Holics László: *Fizikai összefoglaló*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989.
3. http://slideplayer.hu/slide/2121759/
4. users3.ml.mindenkilapja.hu/users/berzetok/uploads/cms.ppt
5. http://vallance.chem.ox.ac.uk/pdfs/Collisions.pdf
6. http://www.leoweypecs.hu/mikola/14_3_9meres.pdf
7. Kiss Miklós, Mikola Competition, ELTE TPI 17–19 August 2015, Proceedings (megjelenés alatt).