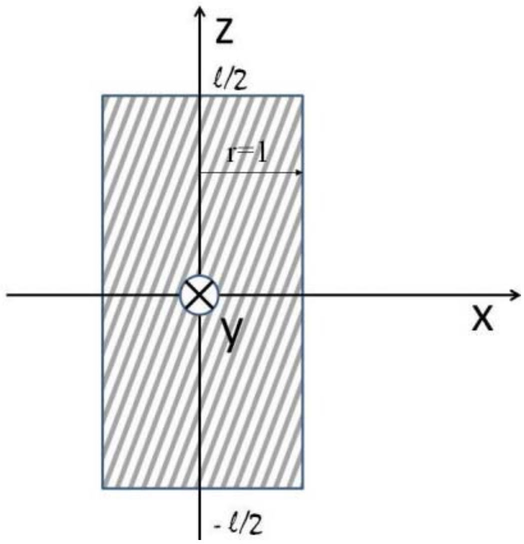
Hárs György, Varga Gábor – BME Fizikai Intézet

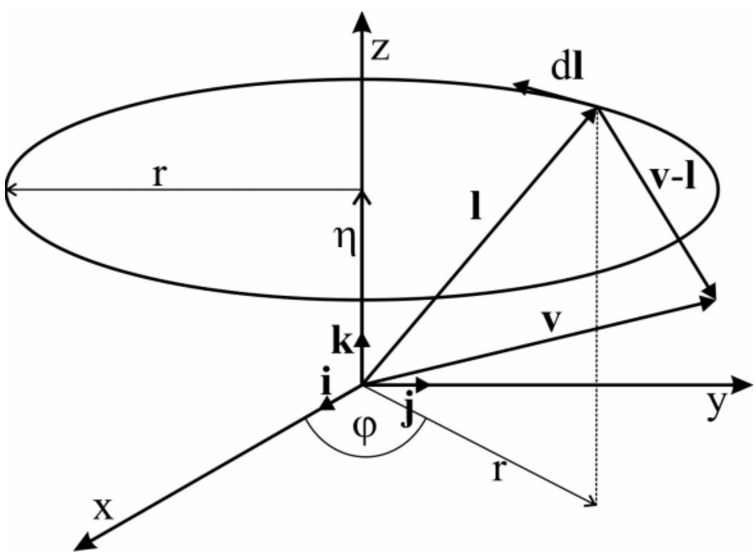
A mágneses vektorpotenciál, mint valóságosan létező vektormező

– melléklet –

A szolenoid mágneses vektorpotenciál (**A**) terének és mágneses indukció (**B**) terének számítása:



A szolenoid metszete. Forgástengelye a *z* tengely, míg *x* és *y* a forgástengelyre merőleges síkot képez.



A vektorpotenciál teret a körvezetők terének integrálásával kapjuk.

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I^*\mathbf{dl}}{|\mathbf{v}-\mathbf{l}|}$$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{i}r\cos\varphi + \mathbf{j}r\sin\varphi + \mathbf{k}\eta$$

$$\frac{\mathbf{dl}}{d\varphi} = \mathbf{i}(-r\sin\varphi) + \mathbf{j}r\cos\varphi$$

$$\mathbf{dl} = [\mathbf{i}(-r\sin\varphi) + \mathbf{j}r\cos\varphi]d\varphi$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{l} = (x - r\cos\varphi)\mathbf{i} + (y - r\sin\varphi)\mathbf{j} + (z-\eta)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v} - \mathbf{l}|^2 = D = (x - r\cos\varphi)^2 + (y - r\sin\varphi)^2 + (z-\eta)^2 = x^2 + y^2 + (z-\eta)^2 + r^2 - 2r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

$$D = x^2 + y^2 + (z-\eta)^2 + r^2 - 2r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

$$\mathbf{A}^*(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I^*\mathbf{dl}}{\sqrt{D}}$$

$$\mathbf{A}^*(x,y,z) = \frac{\mu_0 I^*}{4\pi}\left(\mathbf{i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-r\sin\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi + \mathbf{j}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)$$

$$I^* = \frac{NI}{l}d\eta$$

$$\mathbf{dA}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{NI}{l}d\eta\left(\mathbf{i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-r\sin\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi + \mathbf{j}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)$$

$$\mathbf{A}(x,y,z)) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{NI}{l}r\left[\mathbf{i}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta + \mathbf{j}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta\right]$$

$$A_{\max} = \mu_0\frac{NI}{l}\frac{r}{2}$$

$$\frac{\mathbf{A}(x,y,z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi}\left[\mathbf{i}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta + \mathbf{j}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta\right]$$

Komponensek szerint:

$$\frac{A_x(x,y,z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta$$

$$\frac{A_y(x,y,z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta$$

Forgásszimmetria miatt *x, z* sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + (z-\eta)^2 + r^2 - 2rx\cos\varphi$$ páros fv

$$\frac{A_x(x,z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta$$ Az integrandus páratlan fv $A_x(x,z)=0$

$$\frac{A_y(x,z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\eta$$ Az integrandus páros fv tehát $A_y(x,z)\neq 0$.

Általánosságban tehát:

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{A_{\max}}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)d\varphi\right]d\eta$$

A mágneses indukció vektorát a mágneses vektorpotenciál rotációjaként kapjuk:

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z) = \frac{A_{\max}}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}rot\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)d\varphi\right]d\eta$$

Vizsgáljuk az integrandus vektort!

$$rot\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi}{\sqrt{D}} + j\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{D}} & \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right) - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{D}}\right) + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{D}}\right)\right]$$

Az **i** komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right) = -\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(D^{-1/2}\right) = -\cos\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{dz} = \cos\varphi\left(\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(z-\eta) = \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy: $\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z-\eta)$.

A **j** komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{D}}\right)=-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(D^{-1/2}\right)=-\sin\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{dz}=\sin\varphi\left(\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(z-\eta)=\frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy: $\frac{\partial D}{\partial z}=2(z-\eta)$

A **k** komponens első tagja:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)=\cos\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial x}=-\frac{1}{2}\cos\varphi D^{-3/2}2(x-r\cos\varphi)=-\frac{(x-r\cos\varphi)\cos\varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{\partial D}{\partial x}=2(x-r\cos\varphi)$

A **k** komponens második tagja:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{D}}\right)=\sin\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial y}=-\frac{1}{2}\sin\varphi D^{-3/2}2(y-r\sin\varphi)=-\frac{(y-r\sin\varphi)\sin\varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{\partial D}{\partial y}=2(y-r\sin\varphi)$

A **k** komponens két tagja összevonva:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{D}}\right)=\frac{1}{D^{3/2}}\left(-x\cos\varphi+r\cos^2\varphi-y\sin\varphi+r\sin^2\varphi\right)=\frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z)=\frac{A_{max}}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{j}\frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{k}\frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}}\right)d\varphi\right]d\eta$$

$$A_{max}=\mu_0\frac{NI}{l}\frac{r}{2}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{NI}{l}r\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{j}\frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{k}\frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}}\right)d\varphi\right]d\eta$$

$$B_0=\mu_0\frac{NI}{l}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z)=\frac{B_0}{4\pi}r\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{j}\frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{k}\frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}}\right)d\varphi\right]d\eta$$

$$\frac{\mathbf{B}(x,y,z)}{B_0}=\frac{r}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{j}\frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}}+\mathbf{k}\frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}}\right)d\varphi\right]d\eta$$

$$\frac{B_x(x,y,z)}{B_0}=\frac{r}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right]d\eta$$

$$\frac{B_y(x,y,z)}{B_0}=\frac{r}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right]d\eta$$

$$\frac{B_z(x,y,z)}{B_0}=\frac{r}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right]d\eta$$

$$D=x^2+y^2+(z-\eta)^2+r^2-2r(x\cos\varphi+y\sin\varphi)$$

Forgásszimmetria miatt *x, z* sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D=x^2+(z-\eta)^2+r^2-2rx\cos\varphi$$ Ez páros fv φ-ben.

$$\frac{B_x(x,z)}{B_0}=\frac{r}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right]d\eta$$ Az integrandus páros fv φ-ben tehát $B_x(x,z)\neq 0$

$$\frac{B_y(x,z)}{B_0}=\frac{r}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right]d\eta$$ Az integrandus páratlan fv φ-ben $B_y(x,z)=0$

$$\frac{B_z(x,z)}{B_0}=\frac{r}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r-x\cos\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right]d\eta$$ Az integrandus páros fv φ-ben tehát $B_z(x,z)\neq 0$

A nem nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot.

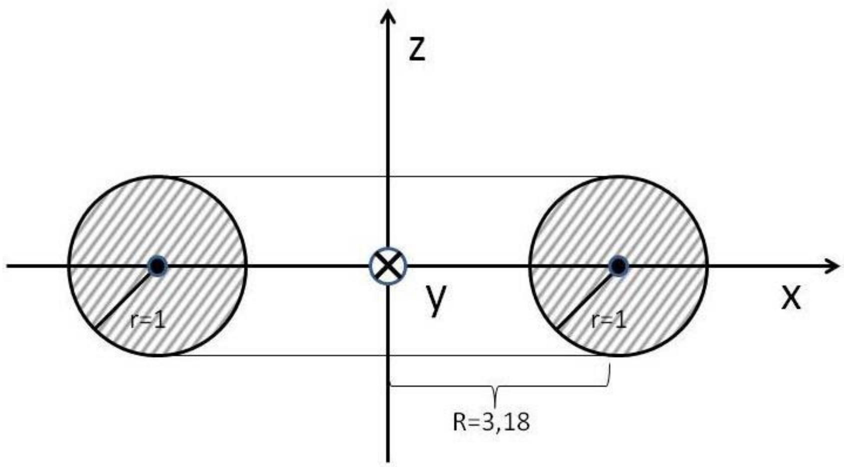
$$\frac{A_y(x,z)}{A_{\max}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}+\delta}d\varphi\right)d\eta$$

$$\frac{B_x(x,z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{\left(\sqrt{D}+\delta\right)^3} d\varphi \right] d\eta$$

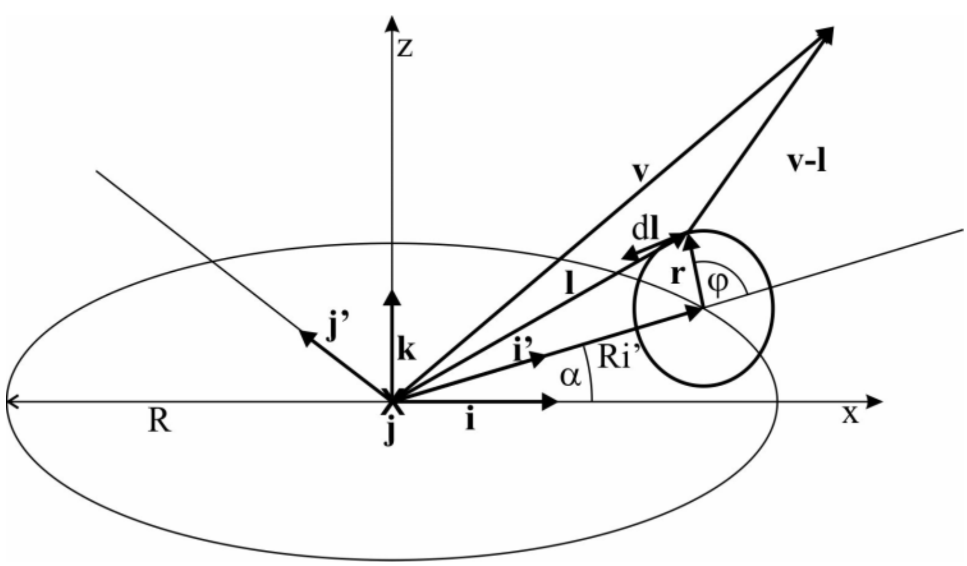
$$\frac{B_z(x,z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - x\cos\varphi}{\left(\sqrt{D}+\delta\right)^3} d\varphi \right] d\eta$$

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk:
A szolenoid rádiusza az egység $r = 1$, hossza $l = 20$, huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.

A toroid mágneses vektorpotenciál (**A**) terének és mágneses indukció (**B**) terének számítása:



A toroid metszete. Forgástengelye a *z* tengely, míg *x* és *y* a forgástengelyre merőleges síkot képez



$$\mathbf{A}^*(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I^*\mathbf{dl}}{|\mathbf{v}-\mathbf{l}|}$$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{i}\cos(90^o + \alpha) + \mathbf{j}\sin(90^o + \alpha) = \mathbf{i}(-\sin\alpha) + \mathbf{j}\cos\alpha$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}' r\cos\varphi + \mathbf{k}r\sin\varphi = r\cos\varphi(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha) + \mathbf{k}r\sin\varphi = \mathbf{i}r\cos\varphi\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\varphi\sin\alpha + \mathbf{k}r\sin\varphi$$

$$\mathbf{l} = R\mathbf{i}' + \mathbf{r} = R\mathbf{i}\cos\alpha + R\mathbf{j}\sin\alpha + \mathbf{i}r\cos\varphi\cos\alpha + \mathbf{j}r\cos\varphi\sin\alpha + \mathbf{k}r\sin\varphi$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{i}(R\cos\alpha + r\cos\varphi\cos\alpha) + \mathbf{j}(R\sin\alpha + r\cos\varphi\sin\alpha) + \mathbf{k}r\sin\varphi$$

$$\frac{\mathbf{dl}}{d\varphi} = \mathbf{i}(-r\sin\varphi\cos\alpha) + \mathbf{j}(-r\sin\varphi\sin\alpha) + \mathbf{k}r\cos\varphi$$

$$\mathbf{dl} = [\mathbf{i}(-r\sin\varphi\cos\alpha) + \mathbf{j}(-r\sin\varphi\sin\alpha) + \mathbf{k}r\cos\varphi]d\varphi$$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}-\mathbf{l} = (x - R\cos\alpha - r\cos\varphi\cos\alpha)\mathbf{i} + (y - R\sin\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha)\mathbf{j} + (z - r\sin\varphi)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v}-\mathbf{l}|^2 = D = (x - R\cos\alpha - r\cos\varphi\cos\alpha)^2 + (y - R\sin\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha)^2 + (z - r\sin\varphi)^2$$

A pitagoraszi összefüggés többszöri felhasználásával egyszerűbb alakra hozva:

$$D = x^2 + y^2 + z^2 + R^2 + r^2 - 2(Rx\cos\alpha + rx\cos\varphi\cos\alpha + Ry\sin\alpha + ry\cos\varphi\sin\alpha + rz\sin\varphi - Rr\cos\varphi)$$

$$\mathbf{A}^*(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I^*\mathbf{dl}}{\sqrt{D}}$$

$$I^* = \frac{NI}{2\pi}d\alpha$$

$$\mathbf{dA}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{NI}{2\pi}d\alpha\left(\mathbf{i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-r\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi + \mathbf{j}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-r\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi + \mathbf{k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)$$

$$A_0 = \mu_0\frac{NI}{2R\pi}\frac{r}{2}$$

$$\frac{\mathbf{dA}(x,y,z)}{A_0} = \frac{R}{2r\pi}\left(\mathbf{i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-r\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi + \mathbf{j}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-r\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi + \mathbf{k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$$

$$\frac{\mathbf{A}(x,y,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi+\mathbf{j}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi+\mathbf{k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$$

Komponensek szerint:

$$\frac{A_x(x,y,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$$

$$\frac{A_y(x,y,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$$

$$\frac{A_z(x,y,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$$

Forgásszimmetria miatt *x, z* sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$D=x^2+z^2+R^2+r^2-2(Rx\cos\alpha+rx\cos\varphi\cos\alpha+rz\sin\varphi-Rr\cos\varphi)$ α-ban páros fv

$\frac{A_x(x,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$ Az integrandus α-ban páros fv tehát $A_y(x,z)\neq 0$

$\frac{A_y(x,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$ Az integrandus α-ban páratlan fv $A_x(x,z)=0$

$\frac{A_z(x,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}d\varphi\right)d\alpha$ Az integrandus α-ban páros fv tehát $A_y(x,z)\neq 0$

Általánosságban tehát:

$$\mathbf{A}(x,y,z)=A_0\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}+\mathbf{j}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}+\mathbf{k}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)d\varphi\right]d\alpha$$

$$A_0=\mu_0\frac{NI}{2R\pi}\frac{r}{2}$$

$$\mathbf{A}(x,y,z)=\mu_0\frac{NI}{2R\pi}\frac{r}{2}\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}+\mathbf{j}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}+\mathbf{k}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)d\varphi\right]d\alpha$$

$$B_o=\mu_0\frac{NI}{2R\pi}$$

$$\mathbf{A}(x,y,z)=B_0\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}+\mathbf{j}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}+\mathbf{k}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)d\varphi\right]d\alpha$$

A mágnese indukció vektorát a mágneses vektorpotenciál rotációjaként kapjuk

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z) = B_0 \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} rot\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\alpha$$

Vizsgáljuk az integrandus vektort.

$$rot\left(\mathbf{i}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j}\frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}} & \frac{-\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}} & \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}} \end{vmatrix} =$$

Az alábbiakban felhasználjuk a következő három összefüggést:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 2(x - R\cos\alpha - r\cos\varphi\cos\alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = 2(y - R\sin\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z - r\sin\varphi)$$

Az **i** komponens:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}\right)$$

Kifejtve:

$$\cos\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial y} + \sin\varphi\sin\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial z} =$$

$$= \cos\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(y - R\sin\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha) + \sin\varphi\sin\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(z - r\sin\varphi) =$$

$$= -\frac{\cos\varphi(y - R\sin\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha) + \sin\varphi\sin\alpha(z - r\sin\varphi)}{D^{3/2}} =$$

$$= \frac{-y\cos\varphi + (R\cos\varphi + r - z\sin\varphi)\sin\alpha}{D^{3/2}}$$

A **j** komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}\right)=$$

Kifejtve:

$$-\cos\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial x}-\sin\varphi\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial z}=$$

$$=-\cos\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(x-R\cos\alpha-r\cos\varphi\cos\alpha)-\sin\varphi\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(z-r\sin\varphi)=$$

$$=\frac{\cos\varphi(x-R\cos\alpha-r\cos\varphi\cos\alpha)+\sin\varphi\cos\alpha(z-r\sin\varphi)}{D^{3/2}}=$$

$$=\frac{x\cos\varphi-(R\cos\varphi+r-z\sin\varphi)\cos\alpha}{D^{3/2}}$$

A **k** komponens:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{D}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}}\right)=$$

Kifejtve:

$$-\sin\varphi\sin\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial x}+\sin\varphi\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial y}=$$

$$=-\sin\varphi\sin\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(x-R\cos\alpha-r\cos\varphi\cos\alpha)+\sin\varphi\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(y-R\sin\alpha-r\cos\varphi\sin\alpha)=$$

$$=\frac{\sin\varphi\sin\alpha(x-R\cos\alpha-r\cos\varphi\cos\alpha)-\sin\varphi\cos\alpha(y-R\sin\alpha-r\cos\varphi\sin\alpha)}{D^{3/2}}=$$

$$=\frac{(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\sin\varphi}{D^{3/2}}$$

Behelyettesítjük a komponenseket:

$$\frac{B_x(x,y,z)}{B_0}=\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-y\cos\varphi+(R\cos\varphi+r-z\sin\varphi)\sin\alpha}{D^{3/2}}d\varphi\right)d\alpha$$

$$\frac{B_y(x,y,z)}{B_0}=\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\cos\varphi-(R\cos\varphi+r-z\sin\varphi)\cos\alpha}{D^{3/2}}d\varphi\right)d\alpha$$

$$\frac{B_z(x,y,z)}{B_0}=\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\sin\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right)d\alpha$$

Forgásszimmetria miatt *x, z* sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$D=x^2+z^2+R^2+r^2-2(Rx\cos\alpha+rx\cos\varphi\cos\alpha+rz\sin\varphi-Rr\cos\varphi)$ α-ban páros fv

Az integrandus α-ban páratlan fv $B_x(x,z)=0$

$$\frac{B_x(x,z)}{B_0}=\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(R\cos\varphi+r-z\sin\varphi)\sin\alpha}{D^{3/2}}d\varphi\right)d\alpha$$

Az integrandus α-ban páros fv tehát $B_y(x,z)\neq 0$

$$\frac{B_y(x,z)}{B_0}=\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\cos\varphi-(R\cos\varphi+r-z\sin\varphi)\cos\alpha}{D^{3/2}}d\varphi\right)d\alpha$$

Az integrandus α-ban páratlan fv tehát $B_z(x,z)=0$

$$\frac{B_z(x,z)}{B_0}=\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-x\sin\alpha\sin\varphi}{D^{3/2}}d\varphi\right)d\alpha$$

A nem nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot.

$$\frac{A_x(x,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\varphi\cos\alpha}{\sqrt{D}+\delta}d\varphi\right)d\alpha$$

$$\frac{A_z(x,z)}{A_0}=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{D}+\delta}d\varphi\right)d\alpha$$

$$\frac{B_y(x,z)}{B_0}=\frac{rR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\cos\varphi-(R\cos\varphi+r-z\sin\varphi)\cos\alpha}{\left(\sqrt{D}+\delta\right)^3}d\varphi\right)d\alpha$$

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk:
A toroid meneteinek rádiusza az egység $r = 1$, a toroid alakzat rádiusza R = 3.18, (ez a *R* rádiusz éppen 20 kerületű tekercset eredményez, mintha az előző számítás szolenoid tekercsét kör alakúvá hajlítottuk volna) továbbá a huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.