

fizikai szemle

A satellite view of Earth from space, showing the curvature of the planet and a bright blue streak of light in the lower right quadrant.

2022/5

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, Nemzeti Kulturális Alap

Főszerkesztő:
Lendvai János

Szerkesztőbizottság:
Bíró László Péter, Bokor Nándor, Czitrovsky Aladár, Füstöss László, Gyürky György, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Ormos Pál, Pálfalvi László, Papp Katalin, Simon Ferenc, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Takács Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Műszaki szerkesztő:
Kármán Tamás

A folyóirat e-mailcíme:
szerkesztok@fizikaiszemle.hu
A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:
http://www.fizikaiszemle.hu



A címlapon:

A Nemzetközi Űrállomásról filmezték le a troposzférából felfelé, a sztratoszférába tartó „kéknyaláb” villámot 2019-ben. A lassított felvétel megtekinthető a <http://fizikaiszemle.hu/extra/keknyalab> webhelyen.

TARTALOM

Fröblich Viktória: Fehér törpecsillagok körüli bolygók pusztulása 125
Milyen esetekben élbetük túl a fehéer törpecsillagok körül keringő bolygók a központi csillag halálát és milyen folyamatok játszódnak le ilyenkor.

Pongor Gábor: A bolygók járása cáfolja a kitalált középkor hipotézisét 129
Egy időben a hazai médiában is népszerűsített áltudományos hipotézis fizikai alapú cáfolata

Pálfi Krisztina, Horváth Gábor, Slíz-Balogh Judit: A Föld felszínén 131
fellépő gyorsulások a dobósportok biomechanikája háttéréül
– 2. rész: precesszió, nutáció, Coriolis- és centrifugális gyorsulás
Milyen batással van négy fiktív tehetetlenségi gyorsulás a dobások eredményeire?

A FIZIKA TANÍTÁSA

Bokor Nándor: Fahasábot, legót, plüssfigurát, fagyott és folyékony 135
almalét a tanterembe!
Az szerző olyan egyszerű kísérleti eszközöket javasol egy érdekes effektus szemléltetésére, amelyekkel a tanulók a tanteremben vagy akár otthon, saját maguk is egyszerűen tanulmányozhatják a jelenséget.

Takátsné Lucz Ildikó, Tasnádi Péter: Ami túlmutat az elektrosztatikán: 147
villámok az új Nemzeti alaptanterv tükrében. A villámok elektromágneses sugárzása, a villámvédelem kérdései
Az írás a villámok elektromágneses sugárzását, különleges villámokat vizsgál, majd kitér a villámvédelem néhány kérdésére és a diákok ezirányú tudására is.

HÍREK – ESEMÉNYEK

Kitüntetések március 15-e alkalmából 156

Rajkovits Zsuzsanna: Középköskolások sikerei az ICYS2022 157
konferencián

V. Fröblich: Destruction of planets around white dwarf stars

Pongor Gábor: The orbit of the planets disproves the hypothesis of fictional middle ages

K. Pálfi, G. Horváth, J. Slíz-Balogh: Terrestrial accelerations as background for the biomechanics of throwing sports – Part 2

TEACHING PHYSICS

N. Bokor: Woodlogs, Lego, soft toys, frozen and liquid apple juice in the classroom!

I. Takáts-Lucz, P. Tasnádi: Beyond electrostatics: lightnings in the light of the new National Curriculum

EVENTS

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacímre: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtítár, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.

Kéziratokat nem örzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszerűsített.

Megjelenik havonta (évente egyszer duplaszámmal), egyes szám ára: 1100.- Ft (duplaszámé 2200.- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588–0540 (online)

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését támogatják:



EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA



Nemzeti Kulturális Alap



FEHÉR TÖRPECSILLAGOK KÖRÜLI BOLYGÓK PUSZTULÁSA

Fröhlich Viktória

Eötvös Loránd Kutatási Hálózat
Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpont,
Konkoly Thege Miklós Csillagászati Intézet

Az égitestek, kiváltképp a bolygók keletkezésének vizsgálata a 21. századi csillagászat egyik leggyorsabban fejlődő és legtöbbet foglalkoztató ága. A nagy űrügynökségek dedikált űrtávcsőmissziókat terveznek a téma alapos megismerése érdekében (a teljesség igénye nélkül: Kepler, TESS, Ariel, James Webb-űrtávcső). Ezek mellett sok földi észlelési program és műszer – többek közt a Sloan Digital Sky Survey (SDSS), az Atacama Large Milimeter-Submillimeter Array (ALMA) – méréseiből is nyerhető adatok az exobolygó-kutatók nagy örömére. Mára az égboltfelmérések ötezernél is több exobolygóval árasztották el a kutatókat, de az adatok feldolgozása sokkal lassabban halad, mint ahogyan a felfedezések száma nő.

A legtöbb újonnan felfedezett exobolygó kis méretű, hosszú életű, alacsony felszíni hőmérsékletű csillagok, vagyis vörös törpék körül kering. Csillaguk általában nyugodt, és a kőzetbolygók közül sok csillagnak lakható övezetében kering, ahol a víz cseppfolyós halmazállapotban képes létezni. Vannak azonban különös kivételek: mindjárt az elsőként megerősített,¹ 1992-ben felfedezett exobolygórendszer a PSR B1257+12 jelű pulzár körül kering. 2020-ban találtak fehér törpecsillag körül keringő bolygót is, felborítva ezzel sok kutató elképzelését a bolygók keletkezésének és fennmaradásának mikéntjéről, azonban tágítva a horizontot a megfigyelendő célpontok terén. Ezek a rendszerek – amelyekben a gazdacsillag elhagyta a fősorozatot a Hertzsprung–Russell-diagramon, majd vörös óriássá fúvódott fel, fehér törpecsillagot hagyva maga után, esetleg szupernóva-robbanásban elpusztulva neutroncsillagként sugárzott tovább – olyan heves fizikai folyamatok révén jutnak végállapotukba,

¹Az első felfedezés ennél korábban, 1988-ban történt, azonban a bolygó jeleit sokáig csak mint „szubsztelláris test” katalogizálták. Az érvényesítésre 2002-ben került sor.

Köszönetemet fejezem ki *Regály Zsolt*nak a kiemelkedő témavezetésért, a cikk főbb gondolatainak megfogalmazásában nyújtott segítségért, valamint *Szabados László*nak a szöveg gondos áttekintéséért.



Fröhlich Viktória másodéves fizika BSc szakos hallgató az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, csillagász szakiránnyal. Az egyetem mellett a Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpontban demonstrátorként végez kutatómunkát *Regály Zsolt* témavezetésével. Kutatási területe a végállapotú csillagok körüli bolygórendszerek sorsának vizsgálata numerikus módszerek segítségével. A Magyar Csillagászati Egyesület és a Vega Csillagászati Egyesület programjainak rendszeres résztvevője, fáradhatatlan vizuális észlelő.

amelyek mellett nehéz elképzelni, hogy bármilyen bolygórendszer stabil maradhat körülöttük. Mára körülbelül tucatnyi Naprendszeren kívüli planétát sikerült kimutatni olyan csillagok mellett, amelyek túléltek csillaguk legvadabb, legkaotikusabb időszakát.

Fehér törpecsillagok

A fehér törpék kis méretű, de méretükhöz képest nagy tömegű, azaz kompakt csillagok. Tömegük legfeljebb 1,4 naptömeg lehet. Ha ezt, a Chandrasekhar-határnak nevezett maximális értéket átlépik, Ia típusú szupernóva-robbanásban hunynak ki. A legtöbb fehér törpe tehát ennél kisebb, átlagosan 0,6-0,7 naptömegű, körülbelül Föld-méretű objektum. Mivel a Tejútrendszer csillagállományának jelentős része nyolc naptömegnél kisebb tömegű csillagokból áll, galaxisunk csillagainak többsége a távoli jövőben fehér törpeként fogja folytatni életét. A fehértörpe-állapot kialakulásától számítjuk a törpe úgynevezett hűlési időszakát, ekkor az energiatermelés szinte teljesen megszűnik. A csillag hőmérséklete egyre csökken, a mindenkori kozmikus háttérsugárzásával válik egyenlővé, így végül fekete törpe lesz belőle. Ehhez azonban legalább 14 milliárd évre van szükség, így az Univerzumban még egyetlen csillag sem érte meg ezt a kort.

Fehér törpecsillagok körül keringő bolygóknak akkor volt lehetősége túlélni a központi csillag halálát, ha annak óriáscsillagga válása előtt kellően távol keringtek tőle ahhoz, hogy a felfúvódó csillag fotoszféráján kívül maradhassanak. Ennek azonban nem is kicsi az esélye. A csillag az óriás állapotban jelentős tömeget veszít, ezért a rendszerében keringő bolygók pályaelemei perturbálódnak. Kepler III. törvényének megfelelően a bolygók csillaguktól több tíz, szélsőséges esetben több ezer csillagászati egységre (CSE) is eltávolodhatnak.

Fehér törpék körül több esetben is regisztráltak egy igen különleges objektumot: a csillagot körülvevő porkorongot. Egy ilyen, a por mellett némely esetben gázban is gazdag környezet csak akkor mutathatja a megfigyelt jellemzőket (amelyekre hamarosan kitérünk), ha a csillag körül legalább egy bolygó jelenlétét feltételezzük. Sokáig csak közvetett bizonyítékaink voltak fehér törpék körül keringő bolygók léteire. Az áttörést *Andrew Vanderburg* és kutatócsapata hozta meg, akik a TESS űrtávcső mérései közt találtak rá egy fedésre utaló fényességcsökkenés jelére. A fedés során a bolygó minden keringése alatt egyszer elhaladt

csillaga előtt, így annak fényességében periodikus csökkenést lehetett észlelni. A WD 1856+534 körül keringő bolygó körülbelül jupitertömegű, csillagát 1,4 nap alatt kerüli meg.

Magas fémtartalmú fehér törpék

Minden csillag felszíni gravitációs gyorsulása jelentős, így bennük az anyag sűrűség szerint differenciálódott. Ez azt jelenti, hogy a gravitációs ülepedés a nehezebb elemeket egyre mélyebbre süllyeszti a csillag anyagában, a fotoszféra alá, ahol többé nem figyelhetők meg spektroszkópia segítségével. Fehér törpék esetében, kompakt objektumok lévén, ez a folyamat sokkal gyorsabban zajlik le. Felszínükön a nehézségi gyorsulás nagyságrendekkel nagyobb a magjukban hidrogént égető (a Hertzsprung–Russell-diagram fősorozatán levő) csillagokéhoz képest, így a felszín közelében szinte kizárólagosan hidrogén – ebben az esetben soroljuk az adott fehér törpét a DA típusúak közé – és hélium – ebben az esetben pedig a DB típusúak közé – található. A csillag spektrumában ezért általában ezen elemek abszorpciós vonalait kell látnunk.

Ha a fehér törpe felszínére valamilyen szennyező anyag (csillagászati értelemben vett fém, azaz héliumnál nehezebb elem, például Li, O, Ca, Fe stb.) kerül, az könnyedén detektálható, mivel a színekben ekkor a fentiekől eltérő abszorpciós vonalak is megjelennek (1. ábra). A különböző anyagok ülepedési ideje csak a DB típusú csillagok esetén lépheti át a néhány százezer évet, a DA típusnál azonban ennél sokkal rövidebb, akár néhány napos, szélsőséges esetben néhány ezer éves időskálán végbemegy az ülepedés. A fehér törpe hűlési időszakának elején még megfigyelhetők ugyan a nehezebb elemek nyomai, de ettől eltekintve kijelenthetjük, hogy ha egy fehér törpecsillag spektrumában fémek spektrumvonalait észleljük, akkor a szennyező anyag a csillagra akkréció, azaz a perdületének egy részét folyamatosan elvesztő gáz és por csillagra hullása útján került. A csillag atmoszférája ezek alapján jól reprezentálja a befogott anyag kémiai összetételét is. A szennyeződést kiváltó eseménynek a közelmúltban kellett történnie, mivel a gyors gravitációs ülepedés miatt viszonylag rövid ideig láthatók a fémek vonalai.

Az első, fémekkel szennyezett (ezáltal DAZ vagy DBZ-ként jelölt, ahol a Z mutatja a fémességet) fehér

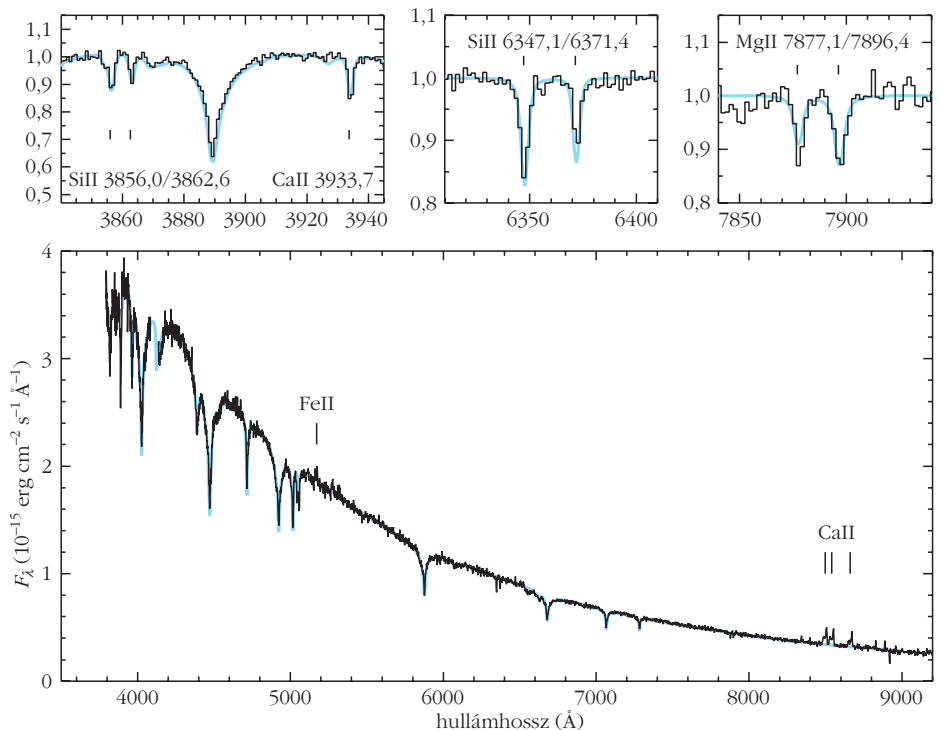
törpét *Adriaan van Maanen* észlelte 1917-ben. Ő maga még nem tudta, mit fedezett fel, csak az utókor spektroszkópiai mérései világítottak rá a csillag többszörösen is különleges voltára. Az objektum egy nagy sajátmozgású, egyedülálló csillag, amely így közvetlen bizonyítéka lett a fent említett akkréciós jelenség létezésének. Azóta a legkülönbözőbb elemeket sikerült kimutatni DAZ és DBZ típusú fehér törpékben, többek között O, Na, Mg, Al, Si, P, Ca, Fe, Co és Ni jeleit észlelték a csillagászok (lásd az 1. ábrát).

A szennyezés forrásaként a kutatók két esetet vizsgáltak eddig. Ha kis vagy közepes tömegű szemcsék, legfőképp aszteroidák ütköznek viszonylag gyakran központi csillagukba, akkor ezen kölcsönhatások nyomai hosszú távon lesznek észlelhetők a csillag atmoszférájában, ezt nevezzük folyamatos akkréciónak. Ezzel szemben sztochasztikus akkrécióról van szó, ha nagy tömegű testek, például bolygók zuhanak a csillagba. A fémekkel szennyezett csillagok aránya a fehér törpék között igen magas, a legfrissebb statisztikai becslések alapján a 20-30%-ot is eléri. Az egyik legfontosabb megválaszolatlan kérdés az, hogy milyen planetáris és anyagelrendeződések okozhatnak ilyen erőteljes és a mérések alapján DAZ típusú törpékben is több évtizedig fennálló szennyeződést ilyen idős csillagokban.

Porkorongok fehér törpék körül

Az eddigi megfigyelések alapján a fehér törpék nem elhanyagolható hányada körül porkorongok is észlelhetők. Az első ilyen korongot az SDSS J1228+1040 je-

1. ábra. Az SDSS 0845+2257, egy fémekkel szennyezett fehér törpe spektruma, kiemelve néhány fontosabb elem abszorpciós vonalait, illetve a Ca II-ion infravörös emissziós tripletjét.



lú csillag körül detektálták a korong által kibocsátott infravörös többletsugárzást érzékelve. Később egyre több porkorongról születtek megfigyelések, köztük DAZ és DBZ törpék körülíról is, számuk mára megközelíti az ötvenet. Meglepő módon mindeddig nem találtunk olyan porkorongot, amelyik ne fémekkel szennyezett fehér törpecsillag körül keringene.

Az eddigi mérések alapján egy átlagos porkorong idősebb fehér törpék rendszerében a csillag Roche-határán² belülre nyúlik, de nem éri el a csillag felszínét, fotoszféráját. Az így létrejött rést pedig a csillagra akkretáló, fémtartalmú gáz tölti ki, mivel a szilárd anyag a csillaghoz közel szublimál. A korong hőmérséklete maximálisan 5000 K, mivel ultraibolya tartományban már nem figyelhető meg többletkibocsátás. Kémiai összetétele inkább a Földéhez hasonló, mintsem a naprendszerbeli aszteroidákéhoz, tömege analóg egy átlagos naprendszerbeli planetézimáléval, körülbelül 10^{21} g.

A fehér törpék korongjai nagy valószínűséggel nem a csillag főági vagy óriásági életszakaszában keletkeztek, mivel ekkor az erős csillagszél hatására a korong anyaga nem tud a csillagba hullani, a gömb-szimmetrikusan és nagy sebességgel ledobott csillaganyagból pedig nem alakul ki lapos korong. Protoplanetáris korong,³ annak rövid élettartama (megközelítőleg hárommillió év) miatt szintén nem lehet az objektum.

A korai elméletek a por forrásának a csillagközi anyagot vélték, mostanra azonban ezt a felvetést a megfigyelések megcáfolták, a korongok anyaga ugyanis kémiai összetételében nem a csillagközi, hanem a Naprendszerben található bolygóközi anyagéhoz hasonló. A porkorongok forrásaként nem zárható ki a fehér törpék rendszereiben keringő exoholdak, mivel ezek elhagyhatják bolygójuk vonzáskörzetét. Egy másik teória szerint, ha a csillagba üstökös ütközne, az is detektálható mértékű fémet juttatna a légkörébe. Bolygórendszerben továbbá az is belsőbb pályákra készíthet planetákat, ha a csillag tömegvesztése révén néhány bolygó kifelé migrál, ezáltal megbolygatva a többi égitest pályáját, amelynek következtében egy bolygó a csillagba zuhanhat. Azonban ez a három jelenség tranzienst jellemező, a gyors ülepedési ráták miatt nagyon szerencsés időpillanatban kellene észlelni az adott csillagot, hogy a szennyeződést évtizedeken át megfigyelhessük.

Nagymértékű fémszennyeződést okozhatnak a rendszerben lévő aszteroidaövek is. A kisbolygóövben előfordulhat ugyanis, hogy az égitestek perturb-

balják egymást, így megnövelve a pályaexcentricitást. Ezáltal az aszteroidák a csillag Roche-határán belülre kerülhetnek, ott szétesnek, és anyaguk a csillag felszínére hullik. Azonban az elméleti megfontolások szerint ebben az esetben az évtizedes utánpótlás eléréséhez az aszteroidaöveknek a naprendszerbelinél jelentősen nagyobb tömegűnek kell lennie. A csillagok fémtartalmú légköre ebben a hipotézisben a kialakuló törmelék akkréciójának tudható be, amely a kőzetek árapályerők által vezérelt szétesésének a végterméke.

A hosszú távon fennmaradó akkréciót kiválthatja egy bolygónak a rendszerből való elszökése vagy gyors migrációja is. Ugyanis a pályáját gyorsan változtató bolygó erősen perturbálhatja az aszteroidák pályáját (jelentősen megnövelve annak excentricitását), így a kisbolygók nagyobb eséllyel morzsolódnának fel a Roche-határon belülre kerülve.

A Ca II emissziós triplet

Mára az ismert ötven porkorong közül húsznál is több spektrumában gázkomponens is felfedeztek a kutatók. A korong gázkomponensének két forrása lehet: egy óriásbolygó szétesése vagy egy Föld-típusú bolygó szétaprózódása. Óriásbolygó esetén a gáz forrása a bolygó anyaga, kőzetbolygó esetén pedig a kisméretű szilikátok szublimációja a szublimációs határon belül.⁴ Arra egyelőre nincs magyarázat, miért észleltek másfélszer annyi gázhiányos korongot, mint ahányban megfigyelhető a gázkomponens.

Amennyiben a korongban gáz is jelen van, a csillag sugárzása termikusan ionizálja a gázatomokat, így azok a hozzájuk tartozó gerjesztési frekvenciákon sugároznak. A korongokat legkönnyebben az egyszerűen ionizált Ca-ion (Ca II) infravörös emissziós tripletje (az átmenetek hullámhosszai rendre 8498 Å, 8542 Å és 8662 Å) által lehet felfedezni, mivel az ehhez tartozó átmenetek könnyen gerjesztődnek.

Körszimmetrikus korong esetében az emissziós vonalak szimmetrikus, dupla csúcsúak a Doppler-eltolódás jelensége következtében. A korong két átellenes pontjából érkező sugárzás így szimmetrikusan tolódik el hosszabb, illetve rövidebb hullámhosszak felé (2. ábra).

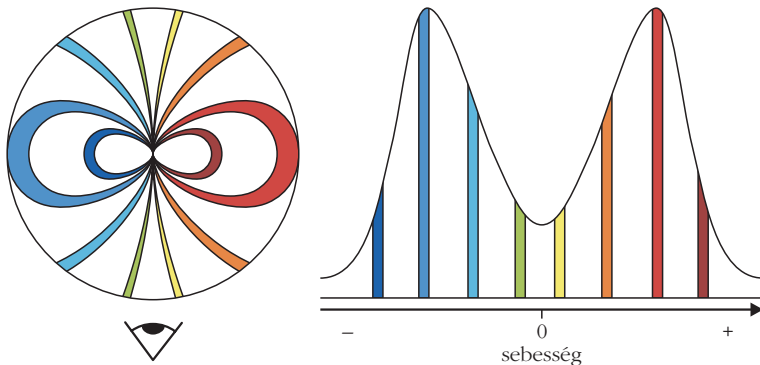
Ha a korong síkja a látóirányunkkal párhuzamos (a korongot az éléről látjuk), az effektus maximális nagyságú, hiszen a látóirányú sebességkomponensek ekkor a legnagyobbak. Ha azonban a korongra merőlegesen látunk rá, az effektus megszűnik, mivel ekkor a látóirányú sebesség minden pontban zérus.

Azt gondolnánk, hogy a fehér törpék körül felfedezett korongokból ilyen szimmetrikus emisszió érkezik. Ezzel szemben tucatnál is több olyan korongot fedeztek fel, amelyek dupla csúcsai aszimmetrikusak. Ilyen

²A Roche-határ egy átlagos (0,7 naptömegű) fehér törpe esetében ~0,005 CSE, az itt körpályán keringő bolygó periódusideje megközelítőleg öt óra. A Roche-határ függ a hipotetikus bolygó sűrűségétől, de egy Föld-típusú bolygó és egy gázóriás esetén közelítőleg csupán másfélszeres faktorról tér el.

³A protoplanetáris korong egy, a csillagok kialakulása során a csillag környezetében visszamaradt, szilárd és gáznemű alkotóelemekből álló, a perdületmegmaradás hatására ellaposodott korong. Benne a részecskék idővel bolygókezdeményekké, esetleg bolygókká állnak össze.

⁴Azon távolság a fehér törpétől, amelyen belül elegendően magas a hőmérséklet (~1500 K), a kisméretű szilikátok szublimációjához.



2. ábra. Körszimmetrikus korongokban a Ca II emissziós triplétt vonalai szimmetrikus dupla csúcsot mutatnak. Az ábrán jól látszik az egyes területek Doppler-eltolódásának mértéke. A korong pontjai az óramutató járásával ellentétes irányban keringenek, a korongra alulról nézünk rá.

rendszer többek között az SDSS J084539.17+225728, a Ton 345 (lásd a 3. ábrát), és a WD 1145+017. Az aszimmetria és a fehér törpék fémszennyezettsége, mint látjuk, összefügg, ezért egyszerre kell tudnunk megmagyarázni a két jelenséget. Emellett egyes mérések szerint a vonalprofil-aszimmetria időben változik (a csúcsok felcserélődnek), amit szintén meg kell tudnunk magyarázni.

A fehér törpék fémszennyeződésének, ahogyan fentebb is tárgyaltuk, több oka lehet. A legígéretesebb magyarázatnak a perturbált aszteroidamezők vagy egy bolygó szétesése tűnik. Mivel az aszteroidák pályáinak perturbációja, csillagukba esése sem tartható fenn hosszú távon, illetve mivel az akkréciós ráta ebben az esetben nem lenne állandó, érdekesebb a második lehetőséggel foglalkoznunk.

A csillag Roche-határa közelében keringő bolygó kettős veszélynek van kitéve: a fehér törpe olyan közel van, hogy a szilikátok a bolygófelszínen szublimálnak, illetve a bolygó az árapályerők hatására szétesik. Ez a két jelenség egyrészt gázt juttat a rendszerbe, másrészt a bolygó szétesésével nagyobb méretű aszteroidák is keletkeznek.

Egy bolygó szétesése több fázisban történik (bár ezek nem egzaktul elválasztható szakaszok, köztük átmenet van). Az első fázisban, néhány száz keringés alatt – a Kepler-nyírás miatt – a bolygó szétesése során keletkezett anyagcsomó elkezd széthúzódni a bolygó pályája mentén. A szétterülő bolygóanyag csillaghoz közelebbi része nagyobb sebességgel fog keringeni, mint a csillagtól távolabbi, így idézve elő egy sarlószerű anyageloszlást. A következő fázisban a keringő anyag gyűrűt formál, ami a bolygópálya eredeti excentricitását veszi fel, és retrográd irányban precesszál. E gyűrűben az anyag aszimmetrikus eloszlású, ezért a második fázisban mindenképpen aszimmetrikus vonalprofil várunk, még abban az esetben is, ha a bolygó körpályán keringett.

Ezen hipotézisek keretein belül a korábbi modellek azt feltételezték, hogy az aszimmetria a második fázisban keletkezik.

Azonban az aszimmetria létét csak igen rövid ideig tudják magyarázni, ha a bolygó körpályán keringett, mivel a Kepler-nyírás néhány száz keringés alatt szimmetrizálja a gyűrűt. Tehát az aszimmetria létrejöttéhez a bolygónak excentrikus pályán kellett keringenie. E modell további problémája, hogy az akkréció csak a vonalprofil-aszimmetria eltűnése után tud kialakulni, így nem észlelhetnénk aszimmetrikus vonalprofilú korong esetén fémszennyezést a fehér törpe felszínén.

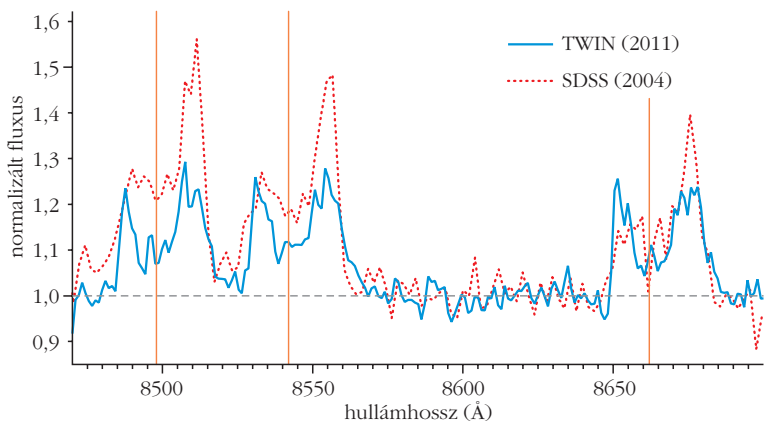
Így tehát érdemes a modellt olyan kiterjesztését megalkotni, amelyben a vonalprofil-aszimmetriát okozó korongstruktúra egy későbbi fázisban jön létre, mielőtt folytatatos az akkréció a fehér törpe felszínén. E modellben a gáz több ezer keringés alatt viszkozusan szétterül, kitölti a bolygópályát, és végül egy korongot formál a csillag körül. Ha a bolygó excentrikus pályán keringett, a maradványa által létrehozott korong globális értelemben excentrikus lesz. A protoplanetáris korongok elméleti vizsgálatainak pedig egy nagyon fontos felismerése, hogy az ilyen excentrikus korongokból érkező sugárzásban aszimmetrikus, dupla csúcsú vonalprofil észlelhető.

Legújabb eredmények

Ezekre a problémákra igyekszik megoldást nyújtani a *Regály Zsolt* által a Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpont Konkoly Thege Miklós Csillagászati Intézetében vezetett kutatócsoport. Munkánk során egy, eredetileg excentrikus pályán keringő bolygó folyamatos szétesése során kialakuló korongstruktúrát, a Ca II-emissziót, valamint különböző méretű aszteroidák és a gázkomponens akkrécióját vizsgáljuk numerikus hidrodinamikai szimulációk segítségével.

Vizsgálataink igazolták azt a teóriát, miszerint a pusztuló bolygónak excentrikus pályán kellett keringenie ahhoz, hogy mind a vonalprofil-aszimmetriát,

3. ábra. Példa az aszimmetrikus Ca II-ion infravörös tripléttjére a Ton 345 rendszerben. Látható azonban, hogy az aszimmetria hét év alatt eltűnt. A nyugalmi spektrumvonalak hullámhosszát narancssárga függőleges vonalak jelzik.



ban, hogy szakmai részről a hallgatás beleegyezésnek tekinthető. Ezért látom szükségét e rövid írásnak. Személyemben szintén nem a történeztáborból szólal meg valaki. Mégis azt remélem, hogy olyan megdönthetetlen cáfolatát tudom nyújtani H. Illig állításának, amely aránylag könnyen belátható érvelésen nyugszik, s így a közönség szélesebb körének érdeklődésére is számot tarthat.

Annak érdekében, hogy érvelésünket világosabbá tegyük, példaként tekintsük először a Nap látszólagos mozgását a Földről nézve. Minden nap délben „delelőn” áll, és 24 óra elteltével ugyanoda „ér” vissza. Így mozgása periodikus (azaz önmagába visszatérő), periódusideje pedig 24 óra. Ha valaki csalni akarna az idővel, csak ennyit, vagy ennek egész számú többszörösével csalhatna, esetleg egy kisebb, helyi közösséget megtévesztve. Ha ugyanis azt állítaná, hogy mások előzőleg elvettek például 8 órát a naptól, bárki könnyedén rá tudná bizonyítani, hogy valótlan állít, a Nap állásának és egy órának (napóra, homokóra, zsebóra stb.) a segítségével.

Illig hipotézisének cáfolatához egy olyan periodikus mozgást kell keresnünk, amelynek periódusideje jóval nagyobb, mint 300 év. Ismeretes, hogy Jézus születését egy égi jelenség kísérte, amelyet a bibliafordítások „betlehemi csillag”-ként említenek [6]. A nyugati világ csillagászai *Jobannes Kepler* [7] óta tudják, hogy ez a kifejezés a bolygók egy különleges együttállását jelentette, nevezetesen a Jupiter és a Szaturnusz együttállását, a Földről nézve a Halak jegyében. Az együttállás az égi mechanika szabályai szerint igen nagy pontossággal számítható. Kepler így ismerte föl, hogy a keresztény időszámítás kezdete egy kissé „elcsúszott”, mert ő Jézus születését 6 évvel korábbra számította a bolygók együttállása alapján. A mai csillagászok már pontosabban dolgoznak, ők nem 6, hanem 7 évvel teszik korábbra Jézus születését időszámításunk elfogadott kezdetéhez képest [6].

A bolygók mozgása periodikus, s így a Jupiternek és a Szaturnusznak is külön-külön periódusa van, amelyek elteltével visszatérnek korábbi helyzetükbe. De létezik és számítható kettejük közös „nagy periódusa” is, amelynél ugyanabban az állatövi jegyben, ugyanazon foknál láthatók a Földről nézve együttállásban, mint „eredetileg”. Ez az égi mechanika szerint minden 854 évben ismétlődik (tehát Kr. u. 848, majd 1702 folyamán, s legközelebb 2556-ban). Nos, ez azt jelenti, hogy ennyit vagy ennek egész számú többszörösét lehetne csak „elcsalni” az évekből, vagy semmit sem, mert különben a csalás kiderül. Egy-két év különbséget talán még nehezen vennénk észre, de a H. Illig állította mintegy 300 évet (a nagy periódus körülbelül 35%-át) már biztosan számítani és észlelni lehetne, ha valakik előzőleg csaltak *volna* az idővel. A csillagászok a Jupiter és a Szaturnusz mai helyzetének ismeretében ki tudják számítani, mikor lesz a következő nagy együttállás (a megjelölt körülmények között). Mint *Érdi Bálint* professzor úr (ELTE TTK Csillagászati Tanszék) rámutatott, *Laplace* (1749–1827) a

18. század folyamán részletesen tanulmányozta a Jupiter és Szaturnusz mozgását „visszafelé” az időben, és nem talált semmi különleges problémát (lásd például [8]). Nyugodtan állíthatjuk tehát, hogy sem III. Ottó császár, sem II. Szilveszter pápa nem csalt mintegy 300 évet. Megemlítjük továbbá, hogy a Kr. u. 1702-ben való „nagy együttállást” megfigyelték, s annak írásos dokumentálása megtalálható a szakirodalomban (lásd például [9]).

A fenti érvelés azzal egészíthető ki, hogy nem tételezi föl szükségszerűen a betlehemi csillag és az említett bolygóegyüttállás azonosítását. Sőt, még olyan személy számára is érvényes, aki a Biblia hitelességét és Krisztus születését is vitatja. A babiloni csillagnaptárak (mint például a szippári [10], illetve a babiloni [11] töredék), amelyet káldeus csillagászok készítettek Kr. e. 60 és 40 között, feltüntetik, hogy (mai időszámításunk szerint) Kr. e. 7-ben várható a Jupiter (Kákkábu pízu) és a Szaturnusz (Kaivánu) együttállása a Halak jegyében. A csillagnaptárak példányait többek között Berlinben (a szippárit) és Londonban (a babilonit) őrzik; az ékírást, amivel ezeket írták, már régen megfejtették. Nos, ezek a Bibliától függetlenül tanúsítják, hogy időszámításunk kezdetének közelében volt egy ilyen együttállás, s így érvelésünk hitele nem csorbul.

A fent említett „nagy periódusok” mind szerepelnek az USA Nemzeti Óceán- és Légkörkutató Hivatalának (NOAA) táblázatában [9], amely mintegy Kr. e. 200 és Kr. u. 1980 között foglalja össze a Jupiter és Szaturnusz együttállásait. Érdemes megemlíteni, hogy a táblázatban nem csak a „nagy” periódusokat, hanem a (más állatövi jegyben és foknál történt) „kis” együttállásokat is feltüntetik. Így például az 1940. február 15-i együttállást is, amelyet *Teres Ágoston* személyesen is megfigyelt Kecskemét határában ([6], II. fejezet, 96. old.). Ezáltal pedig az egész táblázatról kimondhatjuk, hogy minden adata „hitelesítő lett” a (kvázi-) periodikus mozgások következtében.

Remélem, hogy ez az adalék megkönnyíti a tisztánlátást az említett kérdésben. Egyben azonban biztos vagyok: közelről sem fog akkora szenzációt kelteni, mint H. Illig téves állítása.

Irodalom

1. H. Illig: *Das erfundene Mittelalter*. Econ Ullstein, Berlin (1998).
2. H. Illig: *Kitalált középkor*. Allprint, Budapest (2002).
3. Orosz I.: Meg nem történt történelem. *História* 2003/02.
4. Hetesi Zs.: A bizonyíték hiánya nem a hiány bizonyítéka. *Rubicon* 2003/5.
5. Kutrovácz G., Láng B., Zemlén G.: *A tudomány határai*. Typotex, Budapest (2008) 194–198.
6. Teres Á.: *Biblia és asztronómia. Mágusok és a csillag Máté evangéliumában*. 4. kiadás, Korda Kiadó, Kecskemét (2005).
7. J. Kepler: Discurs von der grossen Conjunction, in *Astronomi Opera Omnia I–VIII*. Ch. Frisch, Frankfurt (1870) VII, 701.
8. J. Laskar: Large scale chaos and marginal stability in the Solar System. *Celestial Mechanics* 64 (1996) 115–162.
9. http://laps.noaa.gov/albers/conjun/for008.js_bwd_web
10. J. B. C. Schaumberger: Textus cuneiformis de stella magorum. *Biblica* 6 (1925) 444–449.
11. K. Ferrari d’Occhieppo: The Star of Bethlehem. *Quart. Journal of the Royal Astron. Soc., London* 19 (1978) 517–520.

A FÖLD FELSZÍNÉN FELLÉPŐ GYORSULÁSOK A DOBÓSPORTOK BIOMECHANIKÁJA HÁTTERÉÜL

2. rész: Precesszió, nutáció, Coriolis- és centrifugális gyorsulás

Pálfi Krisztina, Horváth Gábor – ELTE Biológiai Fizika Tanszék
Slíz-Balogh Judit – ELTE Csillagászati Tanszék

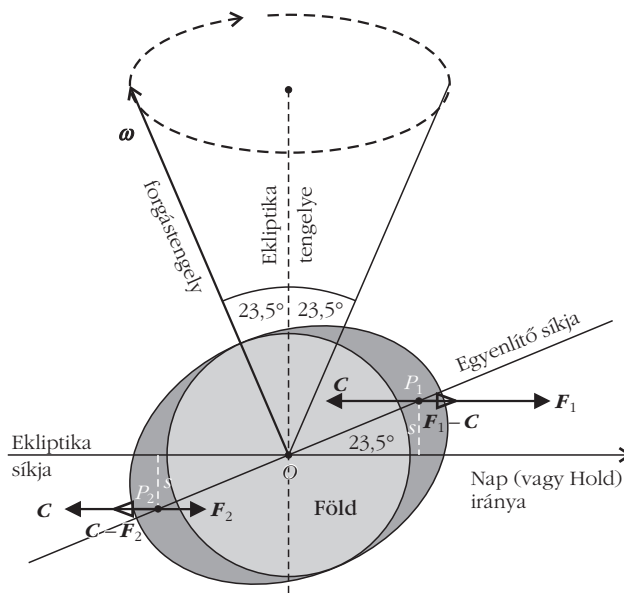
A Föld forgás miatti gyorsulásai

A Föld általános precessziója

A Föld tengely körüli ω forgási szögsebességvektorának iránya és nagysága egyaránt folyamatosan változik. Egyrészt e szögsebesség időben csökken, azaz a földi nap hossza nő, amint azt *A tengely körüli forgás lassulása* alfejezetben tárgyaltuk. Másrészt pedig e vektor iránya is változik. Az utóbbi egyik oka a csillagászatban precesszió (latin: *praecessio* = előrenyomulás) nevezett jelenség, ami két fő elemből áll: (i) általános (vagy normál) precesszió, amely magába foglalja a luniszoláris és a planetáris precessziót, valamint (ii) nutáció (latin: *nutatio* = billegés, ingás), amit a geofizikusok precessziózavarnak hívnak [12]. A geofizikában csak a Föld belső tömegátrendeződéseiből eredő pólusmozgást (pólusingadozást, pólusvándorlást) nevezik nutációnak, de ennek a földi tehetetlenségi gyorsulásokra kifejtett igen kicsi hatását a továbbiakban elhanyagoljuk.

Luniszoláris precesszió

Földünk forgástengelye egy súlyos pörgettyűjéhez hasonlóan precesszál. A Nap és a Hold gravitációjából származó forgatónyomaték a Föld forgástengelyét a keringési síkra (Ekliptikára) merőleges irányba igyekezik juttatni. Ugyanis, ahogy a 3. ábrán látszik, a Föld



3. ábra. A földi forgástengely luniszoláris precessziója kialakulásának magyarázatához. A Föld forgástengelyének luniszoláris precessziója miatt a földrajzi északi irány különböző csillagképeket érintve egy $23,5^\circ$ szögsugarú kört ír le a csillagos égen az Ekliptika pólusa körül ([12] alapján).

egy forgási ellipszoid, miáltal Egyenlítője mentén az ellipszoidba írt gömbhöz képest tömegtöbblettel rendelkezik. A Nap és a Hold úgy vonzza e tömegtöbbletet, hogy a kialakuló F_1 és F_2 erőpár eredő forgatónyomatéka az Ekliptika síkjára merőleges helyzetbe igyekezik forgatni a forgástengelyt. A Föld forgási ellipszoiddal közelíthető alakjának egyenlítői sugara ~ 21 km-rel hosszabb, mint a sarkok felé mérhető sugara. Egyenlítői síkja $\sim 23,5^\circ$ -ot zár be az Ekliptikával, amely síkban a Nap és e sík közelében a Hold és más bolygók is keringenek.

Először nézzük a Nap gravitációs vonzásából adódó forgatónyomaték földi precessziós hatását a 3. áb-



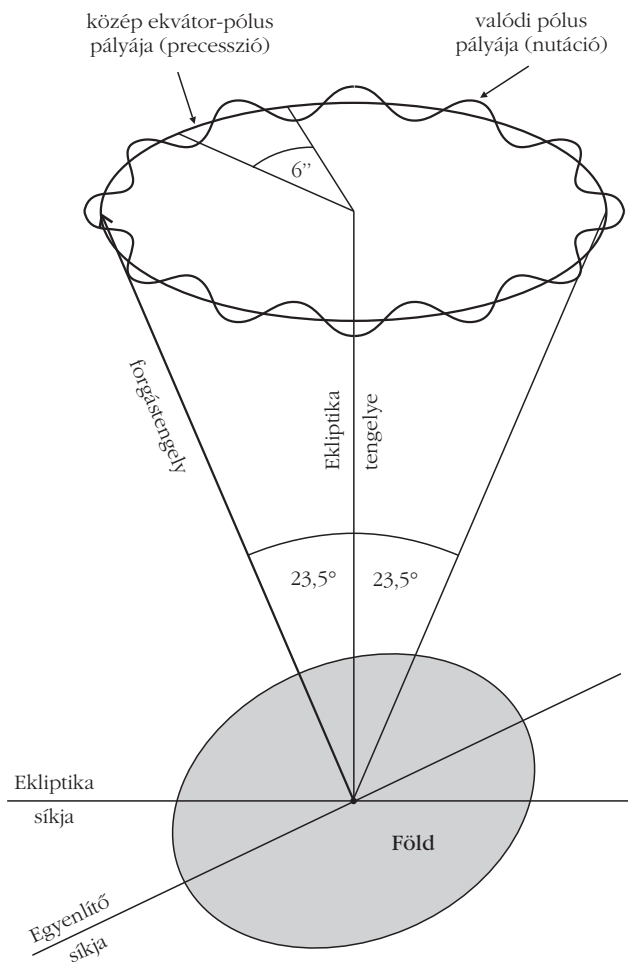
Pálfi Krisztina 2021-ben szerzett Fizika BSc diplomát az ELTE TTK-n. *A forgó és keringő Föld tehetetlenségi gyorsulásai a dobósportok biomechanikája háttéréül* című szakdolgozatát az ELTE Biológiai Fizika Tanszékén írta Horváth Gábor témavezetésével. Tanulmányait jelenleg a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar egészségügyi mérnök mesterszakán folytatja. Érdeklődési köre a biofizika és a programozás.



Horváth Gábor fizikus, az MTA doktora, egyetemi tanár, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumának vezetője. A vizuális környezet optikai sajátosságait és az állatok látását tanulmányozza, továbbá biomechanikai kutatásokat folytat. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa. Évtizedek óta aktív tudományos ismeretterjesztői munkát is folytat előadások és cikkek formájában.



Slíz-Balogh Judit a BME-n végzett matematikus-mérnöként, majd menedzserként dolgozott a Graphisoft SE szoftverfejlesztő cégnél. A Pázmány Péter Katolikus Egyetem Hittudományi szakán hittanári, majd az ELTE-n csillagász diplomát szerzett, ahol 2020 őszén doktorált a Fizika Doktori Iskola Rézecskefizika és Csillagászat programjában. Fő kutatási területe az égi mechanika, azon belül a Naprendszer Lagrange-pontjainak kaotikus dinamikája és képalakító polarimetriája.



4. ábra. A Föld forgástengelyének luniszoláris precessziója és nutációja.

ra alapján. A Föld a Nap körüli keringésekor a vele együtt mozgó koordináta-rendszerben dinamikus egyensúlyban van, amennyiben a Nap vonzó erejével ellentétes irányú keringési centrifugális erő tart egyensúlyt. A Föld forgási ellipsoidjába írt gömbön (magján) kívüli, Naphoz közelebbi és távolabbi kidudorodó tömegtöbblet középpontja P_1 és P_2 . A Napnak a Föld gömbi magjára ható vonzása e gömb O középpontjában összpontosul, a dudoroknál pedig a P_1 és P_2 pontokban. Mivel P_1 közelebb van a Naphoz, mint P_2 , ezért a P_1 -re ható és a Naptól mért távolság négyzetének reciprokával csökkenő F_1 vonzóerő nagyobb, mint a P_2 -re ható F_2 vonzóerő. A Nap körüli keringésből származó centrifugális gyorsulás a Föld minden pontjában azonos a Föld O centrumának C centrifugális gyorsulásával, miáltal a P_1 -re és P_2 -re ható centrifugális erő ugyanaz a C . Mindennek eredményeként P_1 -ben $F_1 - C$ eredő erő hat a Nap felé, míg P_2 -ben $C - F_2$ eredő erő a Naptól kifelé. Ezen eredő erőpár M forgatónyomaték-vektora a 3. ábra síkjára merőlegesen befelé mutat, s ezért az ω szögsebességvektort az Ekliptika pólusától az Ekliptika felé (a 3. ábrán lefelé) nézve az óramutató járásával egyező irányú precesszióra készíti.

A Naphoz hasonló, de erősebb hatást fejt ki a Földre a Hold is. A Hold Földre gyakorolt precessziós hatása a

Hold közelsége miatt jelentősebb járulékot ad, mint a Nap. Összességében a Nap és a Hold gravitációs vonzásából adódó precessziós mozgást nevezzük *luniszoláris precesszió*nak, a luni = holdi előtaggal utalva a Hold Napénál (szolárisnál) nagyobb hatására. A Föld forgástengelyének precessziója miatt a földrajzi északi irány az idő teltével különböző csillagok irányába néz. Az égi pólus jelenleg az Alfa Ursa Minoris (Polaris) közelében van. A luniszoláris precesszió $50,37''/\text{év}$ elmozdulást okoz, aminek periódusa közel 25 730 év lenne, ha a Napnak nem létezne több bolygója.

Nutáció (precessziózavar)

Különbéféle zavaró erők hatására a Föld forgástengelyének luniszoláris precessziójára bizonyos periodikus tagok rakódnak, amelyeket összefoglalóan *nutáció*nak (billegésnek) neveznek a csillagászok. Közülük a legnagyobb járulékat a Hold pályasíkjának 18,6 év alatt történő körbefordulásából adódik, aminek következtében a forgási szögsebességvektor csúcsa (ekvátorpólusa) nem pontosan körpályán mozog az Ekliptika tengelye körül, hanem egy 18,6 év periódusú, $6''$ hullámhosszú hullámos vonalat ír le a 4. ábra szerinti módon.

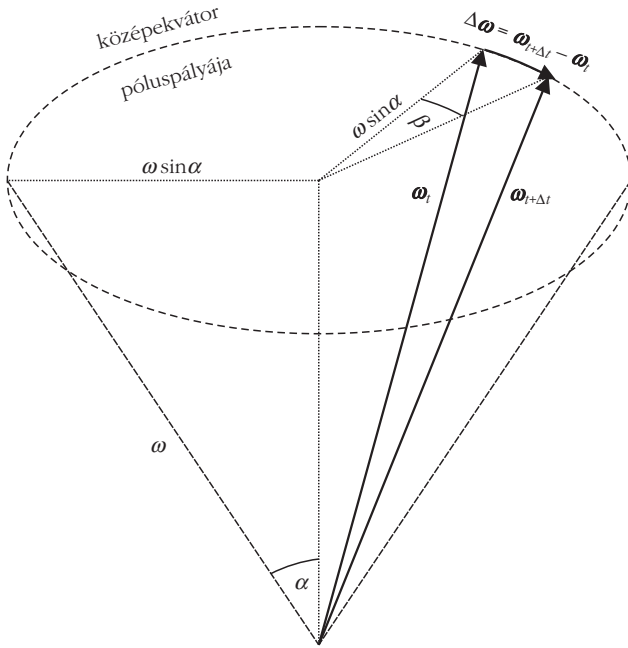
Planetáris precesszió

Mivel a Naprendszer többi bolygója nem az Ekliptika síkjában kering a Nap körül, ezért az Ekliptika síkja nem állandó, hanem $T_{\text{planetáris precesszió}} \approx 40\,000$ év $= 1,26144 \cdot 10^{12}$ s periódusidővel ingadozik a bolygók közepes pályasíkjához képest. Emiatt a földi Egyenlítő és az Ekliptika síkja közti minimális és maximális szög: $\alpha_{\min} = 22^\circ$ és $\alpha_{\max} = 24,5^\circ$. Így tehát az Ekliptika normálisa 40 000 év alatt körbehalad egy nagyjából $2,5^\circ$ -os nyílásszögű kúppalást mentén. Az Ekliptika pólusának mozgását is a Föld forgástengelyének precessziójaként észleljük. A csillagászok e jelenséget *planetáris precesszió*nak hívják, amit tehát az Ekliptika síkjának billegése okoz. A planetáris precesszió $-0,11''/\text{év}$ elmozdulást jelent a tavaszpont mozgásában. A tavaszpont elmozdulása az Ekliptika mentén a luniszoláris precesszió következtében $+50,37''/\text{év}$. A kettő eredője $(+50,37'' - 0,11'')/\text{év} = +50,26''/\text{év}$ az *általános precesszió*, aminek periódusa $T_{\text{általános precesszió}} \approx 25\,786$ év.

Tehát a luniszoláris és planetáris precesszió összessége az általános vagy más néven normál precesszió. A valóságban a normál precesszió során az Ekliptika síkjának változása miatt az égi pólus, azaz a Föld forgástengelyének északi iránya nem pontosan egy kör mentén mozog, hanem az állócsillagokhoz viszonyítva egy körpályával közelíthető, önmagába nem záródó görbe mentén.

Az általános precesszióból származó gyorsulás

A Föld ω szögsebességvektorának és a vele azonos irányú forgástengelyének az általános precesszióból származó tehetetlenségi gyorsulás megbecsléséhez közelítsük a luniszoláris és planetáris precesszióból adódó középvátozást póluspályáját az 5. ábra szerinti



5. ábra. A Föld ω szögsebességvektorának és a vele azonos irányú forgástengelyének általános precessziójából származó tehetetlenségi gyorsulás becsléséhez.

szaggatott vonalú körrel, ami mentén mozog az ω vektor csúcsa, ω pedig egy $\alpha = 23,5^\circ$ félnyílásszögű kúppaláston vándorol körbe.

Az 5. ábra szerint a középkvátor póluspályaköre $\omega \sin \alpha$ sugarának irányba elemi Δt idő alatt

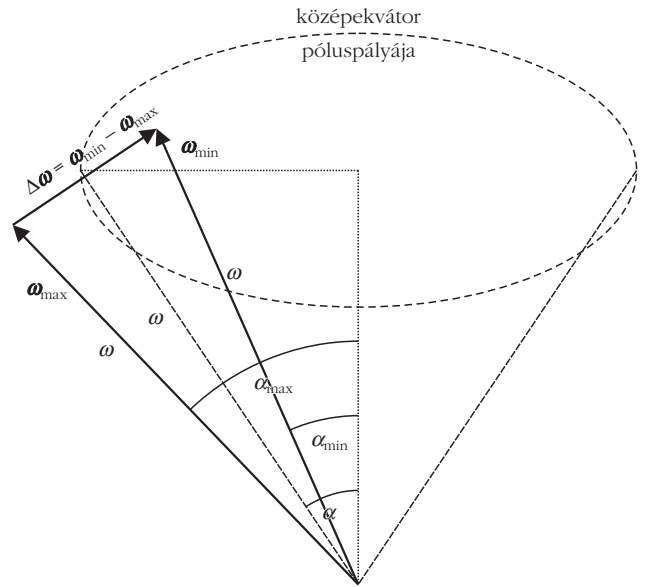
$$\beta = \omega_{\text{általános precesszió}} \Delta t = \frac{2\pi}{T_{\text{általános precesszió}}} \Delta t \quad (15)$$

elemi szöggel változik, ahol $\omega_{\text{általános precesszió}}$ az általános precesszió szögsebessége. (15) használatával és az 5. ábráról leolvashatóan az ω szögsebességvektor általános precesszió miatti Δt idő alatti elemi változásának nagysága:

$$\Delta \omega = \beta \omega \sin \alpha = \frac{2\pi}{T_{\text{általános precesszió}}} \Delta t \omega \sin \alpha. \quad (16)$$

A Föld tengelyforgási szögsebessége $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, átlagsugara $R = 6,3675 \cdot 10^6 \text{ m}$, a forgástengely átlagos $\alpha = 23,5^\circ$ félnyílásszögű kúppaláston való körbejárásának periódusideje $T_{\text{általános precesszió}} = 25\,786 \text{ év} = 8,13187296 \cdot 10^{11} \text{ s}$. Ezen adatok és (16) használatával kapjuk a Föld általános precessziójából eredő tehetetlenségi gyorsulást:

$$\begin{aligned} a_{\text{általános precesszió}} &= R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \\ &= \frac{2\pi R \omega \sin \alpha}{T_{\text{általános precesszió}}} = \\ &= 1,43 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 1,45 \cdot 10^{-10} g_{\text{Newton}}. \end{aligned} \quad (17)$$



6. ábra. A Föld ω szögsebességvektorának és a vele azonos irányú forgástengelyének nutációjából (billegéséből) származó tehetetlenségi gyorsulás becsléséhez.

A nutációból eredő gyorsulás

A Föld ω szögsebességvektora és a vele azonos irányú forgástengelye precessziókúpjának α félnyílásszöge T periódusidővel α_{\min} és α_{\max} között periodikusan billeg (nutál). Az ilyen nutációból származó tehetetlenségi gyorsulás megbecsléséhez tekintsük a 6. ábrát. A

$$\Delta t = \frac{T}{2} \quad (18)$$

fél periódusidő alatti szögváltozás:

$$\Delta \omega = 2 \omega \sin \left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} \right). \quad (19)$$

(1), (18) és (19) felhasználásával kapjuk az ezen nutáció által az $R = 6,3675 \cdot 10^6 \text{ m}$ átlagsugarú Föld felszínén keltett $a_{\text{Euler}} = \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}$ Euler-féle gyorsulás nagyságának maximumát:

$$\begin{aligned} a_{\text{Euler}}^{\text{max}}(\text{nutáció}) &= R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \\ &= \frac{4 \omega R}{T} \sin \left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

A planetáris precessziót vizsgálva azt kapjuk, hogy a Föld $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ szögsebessége $T = 40\,000 \text{ év} = 1,26144 \cdot 10^{12} \text{ s}$ periódusidővel billeg $\alpha_{\min} = 22^\circ$ és $\alpha_{\max} = 24,5^\circ$ között, ami (20) szerint

$$a_{\text{Euler}}^{\text{max}} = 3,20 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,26 \cdot 10^{-12} g_{\text{Newton}}$$

maximális gyorsulást eredményez. A Föld szögsebességvektorának $T = 18,6 \text{ év} = 586\,569\,600 \text{ s}$ periódusidejű, $9^\circ = 0,0025^\circ$ amplitúdójú luniszoláris nutációja

során a luniszoláris precessziós kúp fél nyílásszöge $\alpha_{\min} = 23,4975^\circ$ és $\alpha_{\max} = 23,5025^\circ$ között billeg (*4. ábra*), ami (20) szerint

$$a_{\text{Euler}}^{\max} = 13,78 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,40 \cdot 10^{-11} g_{\text{Newton}} \quad (21)$$

maximális gyorsulást eredményez.

Coriolis-gyorsulás

Tekintsünk egy $v = 20$ m/s tipikus sebességgel repülő sportszert (súlyt, kalapácsot, gerelyt vagy diszkoszot), ami az $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel forgó Föld felszínén $a_{\text{Coriolis}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ Coriolis-gyorsulással bír. Ha $\boldsymbol{\varphi}$ a \mathbf{v} és $\boldsymbol{\omega}$ vektorok közti szög, akkor e gyorsulás $v\omega \cdot \sin\boldsymbol{\varphi}$ nagysága $\boldsymbol{\varphi} = 90^\circ$ esetén maximális, aminek értéke

$$\begin{aligned} a_{\text{Coriolis}}^{\max} &= 2 v \omega = 2,91 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 2,96 \cdot 10^{-4} g_{\text{Newton}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ekkor \mathbf{v} merőleges $\boldsymbol{\omega}$ -ra. *Mizera* és *Horváth* [2], valamint *Horváth* [3] számítógépes modellezéssel részletesen vizsgálták a Coriolis-gyorsulásnak a súlylökés és kalapácsvetés dobótávjait befolyásoló hatását. Arra jutottak, hogy például a férfi kalapácsvetés 86,74 m (1986. évi világcsúcs) dobótávja az Egyenlítőn 4 cm-rel csökkenne a Coriolis-gyorsulás miatt, ha a dobásirány keletről nyugatra változna. Ugyanez a csökkenés 8 mm a férfi súlylökés 23,12 m (1990. évi világcsúcs) dobótávja esetében.

Centrifugális gyorsulás

Tekintsünk egy repülő sportszert, ami az $\omega = 2\pi/\text{nap} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel forgó, továbbá $R = 6,3675 \cdot 10^6$ m átlagsugarú Földön $a_{\text{centrifugális}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ centrifugális gyorsulással rendelkezik. E gyorsulás nagysága az Egyenlítőn – amikor a sportszer a Föld forgástengelyétől legtávolabb van – maximális:

$$\begin{aligned} a_{\text{centrifugális}}^{\max} &= R \omega^2 = 3,37 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 3,42 \cdot 10^{-3} g_{\text{Newton}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Mizera és *Horváth* [2], valamint *Horváth* [3] tanulmányozták számítógépes szimulációval e centrifugális gyorsulásnak a súlylökés és kalapácsvetés dobótávjait módosító hatását. Azt találták, hogy a kalapácsvetés 86,74 m dobótávja 45 cm-rel nőne a centrifugális gyorsulás hatására, ha a dobás a Sarkok helyett az Egyenlítőn történne keleti irányban. Ugyanez a növekedés 11 cm a súlylökés 23,12 m dobótávjánál.

1. táblázat

A forgó és keringő Föld felszínén fellépő gyorsulások becült értékei csökkenő nagyság szerinti sorrendben a Newton-féle gravitációs gyorsuláshoz képest.

árapálygyorsulás ($g_{\text{Newton}} = 9,832 \text{ m/s}^2$)	forgás miatti gyorsulás ($g_{\text{Newton}} = 9,832 \text{ m/s}^2$)
	$a_{\text{centrifugális}} = 3,42 \cdot 10^{-3}$
	$a_{\text{Coriolis}} = 2,96 \cdot 10^{-4}$
$a_{\text{Föld-Hold}} = 2,77 \cdot 10^{-6}$	
$a_{\text{Föld-Nap}} = 5,13 \cdot 10^{-8}$	
	általános precesszió: $a_{\text{Euler}} = 1,45 \cdot 10^{-10}$
	luniszoláris nutáció: $a_{\text{Euler}} = 1,40 \cdot 10^{-11}$
	planetáris precessziókori nutáció: $a_{\text{Euler}} = 3,26 \cdot 10^{-12}$
	forgáslassulás: $a_{\text{Euler}} = 3,74 \cdot 10^{-16}$
$a_{\text{Föld-Galaxis}} = 9,08 \cdot 10^{-25}$	

Összegzés és következtetés

Az *1. táblázatban* foglaltuk össze a cikkünkben megbecsült földfelszíni gyorsulások értékeit. Látható, hogy az árapálygyorsulások: az $a_{\text{Föld-Hold}}$, az $a_{\text{Föld-Nap}}$, az $a_{\text{Föld-Galaxis}}$, továbbá az általános precesszió, a luniszoláris nutáció, a planetáris precessziókori nutáció és a forgáslassulás a_{Euler} gyorsulásai a $g_{\text{Newton}} = 9,832 \text{ m/s}^2$ Newton-féle gravitációs gyorsulásnak nagyságrendileg csak 10^{-6} – 10^{-25} -öd hányadát teszik ki, miáltal nyugodtan elhanyagolhatók.

Ugyanakkor az $a_{\text{centrifugális}}$ és az a_{Coriolis} gyorsulás nagyságrendben 10^{-3} -ad és 10^{-4} -ed része a g_{Newton} -nak, amelyeket már érdemes figyelembe venni a dobósporkok dobótávjainak mérésében, illetve hitelesítésében.

Arra a végkövetkeztetésre jutottunk tehát, hogy a vizsgált 9 gyorsulás közül csak az $a_{\text{centrifugális}}$ és az a_{Coriolis} gyorsulásokat kell figyelembe venni a dobótávra kifejett hatásukban, az árapály és forgás miatti többi 7 gyorsulás pedig elhanyagolható. A kalapácsvetés és súlylökés dobótávjait az $a_{\text{centrifugális}}$ dm, illetve cm nagyságrendben képes változtatni, míg az a_{Coriolis} cm, illetve mm nagyságrendben [2, 3, 4].

Irodalom

- Mizera, F., Horváth, G.: Influence of environmental factors on shot put and hammer throw range. *Journal of Biomechanics* 35 (2002) 785–796.
- Horváth Gábor: *Biomechanika: A mechanika biológiai alkalmazásai*. Egyetemi tankönyv, 3. átdolgozott, bővített kiadás, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2009.
- Jánosi, I., Bántay, P.: Statistical test of throwing events on the rotating Earth: lack of correlations between range and geographic location. *European Physical Journal B* 30(2002) 411–415.
- Völgyesi Lajos: A Föld precessziós mozgása. *Fizikai Szemle* 63 (2013) 152–156.

FAHASÁBOT, LEGÓT, PLÜSSFIGURÁT, FAGYOTT ÉS FOLYÉKONY ALMALÉT A TANTEREMBE!

Bokor Nándor
BME Fizika Tanszék

Az alábbi írás témája – a címből nehezen kikövetkeztethető módon – az úgynevezett *teniszütő-tétel* (Tennis Racket Theorem), más néven a *közbülső tehetetlenségi nyomatékú tengely tétele*. A *Barátaim: Tigris és Micimackó* animációs sorozat *Mackó pocskék napja* című epizódjában van egy jelenet [1], amelyben egy levegőbe felhajított sárgarépa fejbetalál és bekapcsol egy játékrobotot, az végigmegy a szekrény tetején, ráesik egy székre lefektetett teniszütő nyelére, a teniszütő erre pörögve felrepül, és több fordulat után Micimackó fején landol. A jelenetet látva biztosak lehetünk benne, hogy az animáció készítői egyszerűen matematikailag előírták, hogy a teniszütő a levegőben szép szabályosan forogjon a tömegközéppontján átmenő tengely körül. Ha rendes fizikai modellt használtak volna, akkor rögtön látták volna, hogy az ütő nem így száll a levegőben. Aki teniszezik, játék után az öltözőbe menet gyakran érez kísértést, hogy szórakozottan feldobálja az ütőjét, mégpedig úgy, hogy először lapjával vízszintesen tartja, mint egy palacsintasütőt, majd a nyelénél fogva maga felé pörgetve feldobja, és egyetlen fordulat után ismét a nyelénél elkapja. Rögtön észre is vehet egy furcsaságot: a feldobott ütő pörgés közben automatikusan átfordul a levegőben, és a nem várt oldalával felfelé érkezik vissza a játékos kezébe. Ebből a gyakori tapasztalathból ered a cikk elején említett teniszütő-tétel elnevezés. A másik elnevezés háttere: a merev testeknek három fő tehetetlenségi nyomatéka van (a részleteket lásd lejjebb), és többségüknél ez a három mind különböző számértékű; van tehát köztük egy legkisebb, egy legnagyobb, és egy közbülső nagyságú. A *közbülső tehetetlenségi nyomatékú tengely körüli forgás* – épp ilyen a teniszütő azon forgása, amit a Micimackó-epizódban mutatnak – *instabil*, gyakorlatilag sosem játszódhat

le úgy, ahogy a mesefilmben látjuk. A [2] videóban különböző márkájú ütőkkel illusztrálják a tényleges effektust. A kísérlet egyszerűen elvégezhető, természetesen nemcsak teniszütővel, hanem bármilyen merev testtel, amelynek három fő tehetetlenségi nyomatéka mind különböző. (A mobiltelefonjukat szórakozottan feldobálók is rácsodálkozhatnak a meglepő, bucskázó mozgásra.)

A cikket kettős céllal írtam. Az egyik, hogy – egyetemi szintű tankönyvek [3] tárgyalására alapozva – olyan *elméleti összefoglalót* adjak erről az érdekes fizikai hatásról, amely egyrészt kellően precíz és mélyreható, másrészt részletei egy elsőéves mérnökhallgató vagy akár egy középiskolás tanuló számára is végigkövethetők. A másik cél – ezzel függ össze a cikk címe – olyan egyszerű kísérleti eszközöket javasolni a hatás szemléltetésére, amelyekkel a tanulók a tanteremben vagy akár otthon, saját maguk is könnyen próbálgathatják az effektust. A javasolt kísérletek kidolgozásánál az motivált, hogy látványosabbak, élményszerűbbek legyenek, mint a teniszütős változat, a kísérleti eszközök pedig kisméretűek, közvetlenül hozzáférhetőek vagy könnyen elkészíthetőek legyenek, és kevésbé törékenyek, mint a mobiltelefon vagy a tv-távírányító.

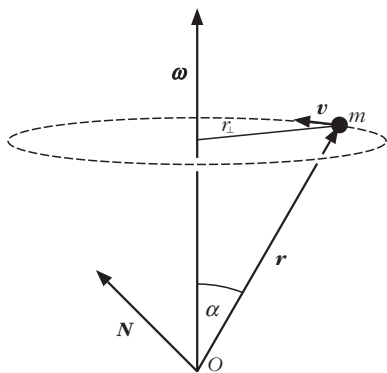
Elméleti magyarázat

A merev testek forgásának általános leírását lehetővé tevő matematikai „nehéztüzérségből” épp csak annyit hagyok meg, ami a jelenség pontos megértéséhez elég. Szerencsére a szükséges matematika nem bonyolultabb annál, amivel középiskolások, de különösen elsőéves hallgatók amúgy is találkozhatnak.

Az 1. ábrán egy \mathbf{r} helyvektorral rendelkező m tömegpont látható, amely körmozgást végez. A mozgást olyan vonatkoztatási rendszerből figyeljük, amelynek origója az O pont, innen mutat \mathbf{r} a tömegpontra. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ebben a vonatkoztatási rendszerben az \mathbf{r} „nyíl” kezdőpontja áll, végpontja pedig körpályán mozog. Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor a körmozgás síkjára merőleges, irányát a jobbcsavarszabályból tudjuk megállapítani. A tömegpont kerületi sebessége az ábra szerint $v = \omega r_{\perp} = \omega r \sin \alpha$. Az ábráról az is leolvasható, hogy \mathbf{v} merőleges az $\boldsymbol{\omega}$ és \mathbf{r} által kifeszített síkra, azaz $\mathbf{v} \parallel (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Ezt a két eredményt



Bokor Nándor egyetemi docens a BME-n szerzett villamosmérnök-diplomát 1993-ban, majd ugyanott fizikából PhD fokozatot 1999-ben. Munkájában – az optika számos területén végzett kutatásai mellett – legszívesebben a fizika, azon belül kiemelten a relativitáselmélet oktatásának pedagógiai kérdéseivel foglalkozik. Ez utóbbi témában számos publikációja jelent meg a *Fizikai Szemlében*, valamint a *Physics Education* és a *European Journal of Physics* folyóiratokban.



1. ábra. Körmozgást végző tömegpont.

összekombinálhatjuk egyetlen vektori szorzattá: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Mivel a sebesség a helyvektor változási üteme, az előző összefüggés így is írható:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1)$$

ahol a szimbólum fölé írt pont az adott mennyiség idő szerinti differenciálhányadosát jelöli.

A mechanikában nagyon hasznos fogalom az \mathbf{N} impulzusmomentum. Perdületnek is hívjuk, kicsit megtévesztő elnevezéssel, mert \mathbf{N} akkor – például egyetlen tömegpont mozgása esetén – is jól használható mennyiség, amikor semmi sem „perdül”. Egy \mathbf{r} helyvektorral rendelkező, $m\mathbf{v}$ impulzusú tömegpont – mint amilyent az 1. ábra mutat – O origóra vonatkozó impulzusmomentumát az

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2)$$

képlet definiálja. \mathbf{N} iránya a keresztszorzás jobbkézszabályával könnyen megállapítható (lásd 1. ábra). Az (1) és (2) képletekből leolvasható, hogy ha a tömegpont sebességét növelni kezdjük, a v -vel együtt $|\boldsymbol{\omega}|$ és $|\mathbf{N}|$ is arányosan nő, azaz $|\boldsymbol{\omega}|$ és $|\mathbf{N}|$ egymással is minden pillanatban egyenesen arányosak. (Ugyanakkor maga az \mathbf{N} vektor nem egyszerűen az $\boldsymbol{\omega}$ vektor állandó számszorosa, mert a két vektor nem feltétlenül párhuzamos, lásd az 1. ábrát.) Ugyanez a helyzet, ha nem egyetlen tömegpontról, hanem kiterjedt merev testről van szó. Az ilyen testnek ugyanis szükségszerűen olyan a mozgása, hogy minden pillanatban létezik a térben egy pillanatnyi forgástengely, amely körül a test összes pontja éppen ugyanazzal az $\boldsymbol{\omega}$ pillanatnyi szögsebességgel végez egy körmozgásdarabkát (kivéve azokat a tömegpontokat, amelyek éppen a forgástengelyen vannak). A merev test teljes impulzusmomentuma az egyes tömegpontok impulzusmomentumának összege:

$$\mathbf{N} \equiv \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

A jobb oldalon szereplő tagok nagysága az előző bekezdés szerint egyenként mind egyenesen arányos az adott tömegpont szögsebességével, amelyről viszont most láttuk, hogy egy-egy pillanatban minden tömeg-

pontra ugyanaz. Azt a felfedezést, hogy a merev test \mathbf{N} pillanatnyi impulzusmomentuma *lineáris kapcsolatban* áll a test $\boldsymbol{\omega}$ pillanatnyi szögsebességével, így írhatjuk fel:

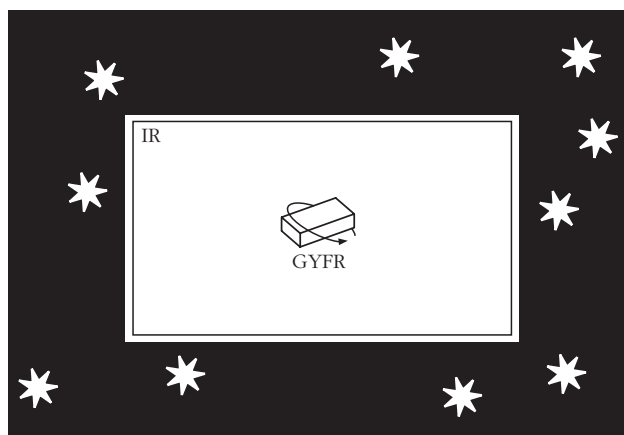
$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

ahol tehát $\boldsymbol{\theta}$ nem egyetlen szám, hiszen két nem feltétlenül párhuzamos 3D vektor közötti lineáris kapcsolatot fejezi ki. A $\boldsymbol{\theta}$ neve: tehetetlenségnyomaték-tenzor. Egy adott koordináta-rendszerben – amelyben \mathbf{N} és $\boldsymbol{\omega}$ vektorok a három komponensükkel írhatók fel – $\boldsymbol{\theta}$ egy 3×3 -as mátrix alakjában adható meg.

A (3) egyenletben szereplő \mathbf{N} és $\boldsymbol{\omega}$ vektorok egy adott vonatkoztatási rendszerben „mérődnek”, onnan nézve van fizikai tartalmuk. Ettől függetlenül ezekre a vektorokra – elfeledkezve fizikai jelentésükről –, mint adott hosszúságú és tájolású „nyilakra a térben” más vonatkoztatási rendszerekből is ránézhetünk, és a lineáris kapcsolatot kifejező (3) egyenletet természetesen ezekből a nézőpontokból is pillanatról pillanatra igaznak találjuk. Amikor pedig (3)-at kiírjuk három külön skalár komponensegyszerűként, azok konkrét alakja már nem csak attól függ, milyen vonatkoztatási rendszert választunk, hanem attól is, hogy azon belül milyen irányban vesszük fel a *koordinátatengelyeket*, amelyekre vetítve leolvassuk a két vektor komponenseit. Vonatkoztatási rendszerre mutat két példát a 2. ábra, amelyen egy világűrben szabadon lebegő űrkabin látunk, benne egy szabadjára engedett, bucskázó-forgó mozgást végző merev téglatesttel. (Az alábbi tárgyalás semmit sem veszít általános érvényéből, ha mostantól kezdve feltételezzük, hogy a téglatest tömegközéppontja nyugalomban van az űrkabinhoz képest.)

Az űrkabin, mint vonatkoztatási rendszer, *inerciarendszer* (IR): ha egy mozgást ennek falaihoz viszonyítva írunk le és elemzünk, joggal használhatjuk *Newton* törvényeit. Ha pedig képzeletben a bucskázó-forgó téglatesthez rögzítjük magunkat, és ehhez viszonyítva írjuk le a környező jelenségeket, egy másik vonatkoztatási rendszert kapunk; ebben úgy érezhetjük magunkat, mint a földi kiképzéskor a centrífugába be-

2. ábra. Vonatkoztatási rendszerek: inerciarendszer (IR) és „gyomorforgató rendszer” (GYFR).



szíjazott úrhajósok, akik a külvilágot vadul összevissza mozogni látják. Ezért a téglatesthez rögzített vonatkoztatási rendszert *gyomorforgató rendszernek* (GYFR) nevezem. A 2. ábra szorosan kapcsolódik a témánkhoz, mert a cikk elején említett feldobott teniszütő – a feldobás és az elkapás között legalábbis – szabadesést végez, súlytalanságban van, tehát éppen úgy „érzi magát”, mint a 2. ábrán látható téglatest, amit például az úrkabin utasa perdített be valahogyan, azután elengedte, és most figyel a mozgását. (Az úrhajós előnyösebb helyzetben van, mint a teniszező, mert a hasáb forgása tetszőlegesen hosszú ideig folytonosan megfigyelhető, míg a Földön a kezünkől kiengedett teniszütő 1-2 másodperc alatt leesik.)

A következő lépés, hogy a (3) egyenletet komponens alakban írjuk fel. Erre vonatkoztatási rendszerként *nem az IR-t, hanem a GYFR-t fogjuk választani*. Igaz, hogy végső soron arra akarunk fényt deríteni, milyen mozgást végez a téglatest (a GYFR) az úrkabin (az IR) falaihoz képest – vagy a teniszütő egy földi inerciarendszerhez képest –, de semmit sem veszítünk azzal, ha a *fordított kérdésre* találjuk meg a választ. Ha ugyanis le tudjuk írni az úrkabin mozgását a téglatesthez rögzített nézőpontból, akkor a minket érdeklő kérdésre is rögtön választ kapunk, hiszen a két relatív mozgás egyszerűen egymás fordítottja. Ez természetesen még nem magyarázza, hogy miért kifejezetten előnyösebb a GYFR-t választani nézőpontnak, mint az IR-t. A válasz: azért, mert míg az úrkabinból nehéz matematikai alakban megfogalmazni a kérdésünket (hogyan mozog a levegőben bucskázó téglatest?), addig a téglatesthez rögzített nézőpontból nagyon egyszerűen és elegánsan tudjuk matematikai formába önteni a fordított kérdést (hogyan mozog körülöttünk az úrkabin?). Erre az egyszerű és elegáns megfogalmazásra az ad lehetőséget, hogy a magára hagyott téglatestre nem hat semmilyen erő, tehát *nem hat rá forgatónyomaték sem, ezért az \mathbf{N} impulzusmomentuma időben állandó*. Az, hogy az \mathbf{N} időben állandó (tehát mindig „a térnek” ugyanabba az irányába mutat), csak inerciarendszerből nézve igaz, mert az előző mondatban dőlt betűvel írt fizikai törvény, az úgynevezett impulzusmomentum-tétel, a Newton-axiómákból következik, márpedig azok csak inerciarendszerben érvényesek. Tehát akárhogy is forog, bukfeneczik a magára hagyott téglatest az úrkabin belsejében, az \mathbf{N} -vektora *az úrkabinhoz képest állandó tájolású*; ha az \mathbf{N} „nyíl” kezdőpontját a téglatest álló tömegközéppontjába képzeljük, akkor végpontja az úrkabin falának mindig ugyanarra a pontjára mutat. Most már érthető, miért érdemes a GYFR nézőpontjába helyezkednünk: ha le tudjuk írni a GYFR-hez képest *ezen egyetlen vektor* mozgását (időbeli változását), akkor magának az úrkabinnak a mozgását sikerült leírni, ami viszont inverz módon az eredeti kérdésünkre is megadja a választ.

A természet még ezenfelül is a segítségünkre siet. Éppen a testhez rögzített GYFR-ben teszi lehetővé, hogy az \mathbf{N} időbeli változását leíró egyenleteket a lehető legegyszerűbb matematikai alakban fogalmazhas-

suk meg. Bármilyen ugyanis a merev test alakja (téglatest, teniszütő, krumpli stb.), a testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben az egymásra merőleges koordinátatengelyek irányának ügyes megválasztásával mindig elérhető, hogy a (3) egyenlet komponensekkel felírt alakja ilyen legyen:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \theta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

amelyben tehát a θ tehetetlenségnyomaték-tenzor *diagonális*, azaz csak a főátlóban vannak nemzérus elemek, és azok konstansok. Az egyenleteket egyenként kiírva:

$$\begin{aligned} N_x &= \theta_x \omega_x, \\ N_y &= \theta_y \omega_y, \\ N_z &= \theta_z \omega_z. \end{aligned} \quad (5)$$

E speciális koordináta-rendszer x , y , z tengelyeit *főtengelyeknek* hívjuk, θ_x -et, θ_y -t és θ_z -t pedig a test három *fő tehetetlenségi nyomatékának*. A főtegyek fizikai jelentése kiolvasható az (5) egyenletekből: ha a testet úgy pörgetjük be, hogy ω történetesen az egyik ilyen tengely irányába mutat, vagyis három komponense közül csak az egyik nem nulla, akkor (5) szerint az \mathbf{N} vektornak is csak ugyanez a komponense lesz nullától különböző, vagyis ekkor $\mathbf{N} \parallel \omega$. (Általános mozgásnál az $\mathbf{N} \parallel \omega$ nem szokott teljesülni.) A θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékok a tehetetlen tömeggel analóg fizikai fogalmak: azt fejezik ki, mennyire nehéz forgásba hozni a testet az egyes főtegyek körül. A főtegyek mindig átmennek a merev test tömegközéppontján. Téglatest esetén egybeesnek a test három szimmetriatengelyével. Az x , y , z betűkkel jelölt tengelyek a 6–9. képek mindegyikén az adott test főtegyeit mutatják.

Foglaljunk össze néhány fontos eddigi pontot. Az (x, y, z) koordináta-rendszert a GYFR-hez rögzítettük, origója a test tömegközéppontjában van, ami az IR-hez képest áll, a koordinátatengelyek pedig együtt forognak a testtel. Az ω vektor a test pillanatnyi szögsebességét jelenti az IR-ből nézve, \mathbf{N} pedig a test impulzusmomentuma; ez utóbbi az IR-ből nézve állandó (az úrkabinnak ugyanarra a pontjára mutat), a GYFR-ből nézve viszont – bár nagysága ebből a nézőpontból nézve is állandó – ide-oda billeg, változtatja orientációját a testhez rögzített koordinátatengelyekhez képest. A (5) egyenletekben szereplő vektor-komponensek az \mathbf{N} és ω vektoroknak ebben a különleges koordinátarendszerben leolvasott vetületei. Az egyenletekben megjelenő θ_x , θ_y és θ_z mennyiségek a test merevsége miatt időben állandók, de az \mathbf{N} - és ω -komponensek a test mozgása során változnak. Az \mathbf{N} vektor GYFR-ből észlelhető billegéseit az $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ függvények írják le, feladatunk ezek meghatározása.

A továbblépést az a felismerés adja, hogy mivel a test az űrkabinhoz képest éppen $\boldsymbol{\omega}$ pillanatnyi szögsebességgel forog, az űrkabin – és vele együtt az \mathbf{N} vektor is! – a testhez képest éppen $-\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forog. Vagyis a GYFR nézőpontjából az \mathbf{N} vektor éppen úgy viselkedik, mint az 1. ábrán az \mathbf{r} vektor az ábrát felrajzoló ember nézőpontjából, azzal a különbséggel, hogy most az \mathbf{N} végpontja ellenkező irányban fordul el, mint az 1. ábrán az \mathbf{r} végpontja. Ezek szerint lemásolhatjuk az (1) egyenletet, és $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{N}$, $\boldsymbol{\omega} \rightarrow (-\boldsymbol{\omega})$ betűcserékkel a mostani helyzetre érvényes egyenletet kapunk [a GYFR nézőpontjából]:

$$\dot{\mathbf{N}} = (-\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{N} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (6)$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtam a keresztszorítás úgynevezett antikommutatív tulajdonságát. (5) alapján a (6) egyenletet komponensalakban is kiírhatjuk [a GYFR nézőpontjából]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_x \dot{\omega}_x \\ \dot{\theta}_y \dot{\omega}_y \\ \dot{\theta}_z \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \theta_x \omega_x & \theta_y \omega_y & \theta_z \omega_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}, \quad (7)$$

ahol \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y és \mathbf{e}_z az (x, y, z) koordináta-rendszer egységvektorai, és a jobb oldalon a keresztszorítás szabályának könnyű megjegyzésére szolgáló úgynevezett determinánsalak szerepel. A keresztszorítást elvégezve az alábbi 3 komponensegyenletet kapjuk [a GYFR nézőpontjából]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_x \dot{\omega}_x &= \theta_y \omega_y \omega_z - \theta_z \omega_z \omega_y, \\ \dot{\theta}_y \dot{\omega}_y &= \theta_z \omega_z \omega_x - \theta_x \omega_x \omega_z, \\ \dot{\theta}_z \dot{\omega}_z &= \theta_x \omega_x \omega_y - \theta_y \omega_y \omega_x. \end{aligned} \quad (8)$$

Az (5) összefüggések segítségével kiküszöbölve az $\boldsymbol{\omega}$ -komponenseket a (8) egyenleteket ilyen alakba írhatjuk át [a GYFR nézőpontjából]:

$$\begin{aligned} \dot{N}_x &= \frac{\theta_y - \theta_z}{\theta_y \theta_z} N_y N_z, \\ \dot{N}_y &= \frac{\theta_z - \theta_x}{\theta_z \theta_x} N_z N_x, \\ \dot{N}_z &= \frac{\theta_x - \theta_y}{\theta_x \theta_y} N_x N_y. \end{aligned} \quad (9)$$

A (9) egyenleteket, amelyek az \mathbf{N} időbeli viselkedését írják le a testhez képest, a forgómozgás Euler-egyenleteinek hívjuk. Ha ezt a három csatolt differenciálegyenletet megoldjuk az $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ függvényekre, választ kapunk arra, hogy a merev test orientációja miként fog változni az IR-hez képest, ha a kezdő időpillanatban adott módon bepörgetjük, majd szabadon engedjük. Van valami, amit már számolás nélkül, ránézésre meg tudunk állapítani: ha sikerülne

„végtelen tizedesjegy pontossággal” valamelyik fő tengely körül bepörgetni a testet, akkor ez a fő tengely az IR-ben végig megőrizné irányát, a test ezután csakis e körül a tengely körül forogna. Ez onnan látszik – példának az x tengely körüli bepörgetést használom, de az érvelés a másik két tengelyre is ugyanez –, hogy ha a (9) egyenleteknek az $N_x(0) \equiv N$, $N_y(0) \equiv 0$, $N_z(0) \equiv 0$ kezdőfeltételeket adjuk, tehát az impulzusmomentum kezdetben hajszálpontosan x irányú, akkor mindhárom egyenlet jobb oldala azonosan nulla, tehát a GYFR-ből nézve egyik impulzusmomentum-komponens sem változik időben. Ez azt jelenti, hogy – ebben a példában – az \mathbf{N} végig az x tengely irányában fog állni, illetve megfordítva: az x tengely, ami most a forgástengely, az IR-ben végig ugyanabba az irányba fog mutatni. Ezt a fajta helyzetet *stacionárius forgásnak* nevezzük. Mindhárom fő tengely körüli forgás tehát stacionárius forgás, egyfajta egyensúlyi helyzet. A kérdés, hogy *stabilak-e* ezek az egyensúlyi helyzetek. Különösen arra vagyunk kíváncsiak, hogy miért lesz drasztikusan más az az eset, amikor a *közbülső* tehetetlenségi nyomatékú fő tengely körül pörgetjük be a testet, mint amikor a másik két fő tengely körül. Miért hívhatjuk a *közbülső* fő tengely körüli forgást *instabilnak*, és hogy néz ki pontosan a test mozgása ebben az esetben?

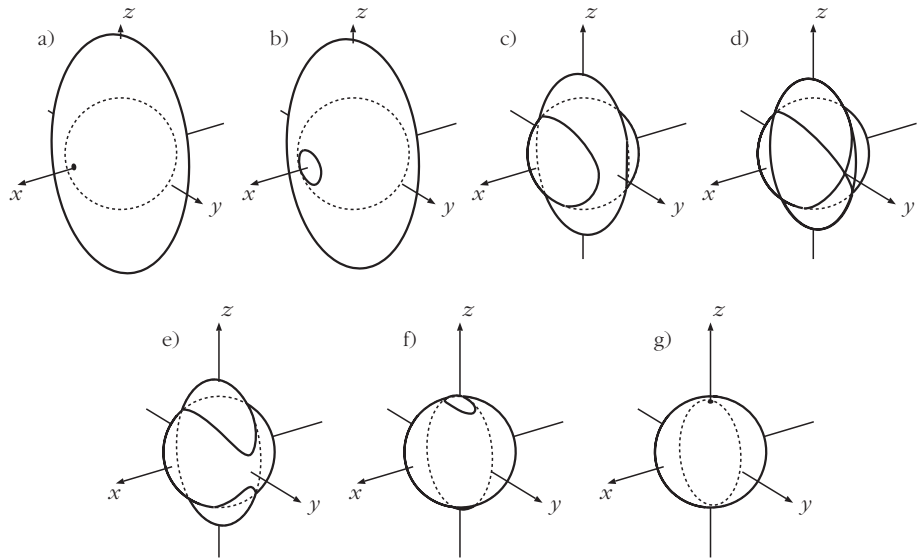
A (9) egyenletek teljesen szimmetrikusak az x , y , z alsó indexekre, azt gondolhatnánk, hogy az $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ időfüggvényeknek muszáj azonos módon viselkedniük. Ez azonban csalóka. Az olyan testekre, mint például a 6–9. képeken látható tárgyak, a θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékok mind különbözők, tehát nagyság szerint sorrendbe állíthatók. Ez viszont azzal jár, hogy a (9) Euler-egyenletek közül *kettőben* negatív lesz a

$$\frac{\theta_i - \theta_j}{\theta_i \theta_j}$$

együttható, *egyben* viszont pozitív. Ha például $\theta_x < \theta_y < \theta_z$ (mostantól a cikk példáiban a koordináta-rendszer mindig úgy veszem fel, hogy ez a reláció teljesüljön), akkor a (9) középső egyenlete, az N_y -ra vonatkozó fog másként viselkedni, mint a másik kettő. Általánosan tehát: azon N_i -komponens „mozgásegyenlete”, amely a *közbülső nagyságú* θ_i szerinti irányba mutat, alapvetően, jellegében eltér a másik kettőtől. Ezzel algebrailag máris érthetővé vált, miért várhatjuk, hogy a *közbülső* tehetetlenségi nyomatékú fő tengely körüli forgás teljesen más viselkedést mutasson, mint a másik két fő tengely körüli forgás.

Mielőtt konkrét példákon megvizsgálánánk, milyen megoldást adnak a (9) egyenletek különböző kezdőfeltételek mellett, érdemes megnéznünk egy másik, különösen elegáns magyarázatot a teniszütő-tétel jelenségére. Ez *geometriai* diagramokkal, intuitív módon világítja meg az y tengely eltérő viselkedését. A geometriai tárgyalás egy tisztán matematikai kérdésre épül: *hogyan néz ki egy gömb és egy általános (nem bengerszimmetrikus) ellipszoid áthatása a két idom*

relatív méretének függvényében? A 3. ábrsorozat mutatja az azonos középponttal rendelkező ellipszoidot és gömböt. Az ellipszoid mérete a 3.a és 3.g ábrák között folyamatosan csökken, és a koordinátatengelyeket úgy vettem fel, hogy azok egybeessenek az ellipszoid szimmetriatengelyeivel. Az ellipszoid három különböző féltengellyel rendelkezik (az ellipszoid-féltengely analóg fogalom a gömb sugarával). A 3.a ábrán az ellipszoid legkisebb féltengelye éppen akkora, mint a gömb sugara, tehát a gömb teljesen az ellipszoid belsejében helyezkedik el, és mindössze az x tengely két



3. ábra. Gömb és általános ellipszoid áthatása; a metszetgörbék változása a két test relatív mérete függvényében.

átellenes pontján érinti azt. Ha az ellipszoid méretét kicsit csökkentjük (3.b-c ábra), a két test metszete mindig két görbét ad, amelyek szimmetrikusan helyezkednek el az x tengely pozitív és negatív félegyeneséről. Ha az ellipszoid éppen akkora, hogy a középső féltengelye egyezik meg a gömb sugarával, a 3.d ábrán látható helyzet áll elő. Mondhatjuk, hogy az ellipszoid ekkor az y tengely két átellenes pontján „érinti a gömböt”, ez azonban feltűnően más helyzet, mint amit a 3.a ábrán az x tengelyen látunk. Az ellipszoidot tovább zsugorítva (3.e-f ábra) jellegre ugyanaz ismétlődik meg a z tengely irányában, mint ami a folyamat elején történt az x tengely mentén. Végül, amikor az ellipszoid már olyan kicsi, hogy a legnagyobb féltengelye egyezik meg a gömb sugarával, a gömb teljes egészében körülveszi az ellipszoidot, és a metszetgörbék ismét két ponttá zsugorodnak össze, ezúttal a z tengely két átellenes oldalán (3.g ábra). Figyeljük meg a 3.a, d, g ábrákon milyen drasztikusan más a két test áthatása, amikor az y tengely (az ellipszoid középső féltengelye) mentén „érintik egymást”, mint amikor az x vagy a z tengely (az ellipszoid legkisebb vagy legnagyobb féltengelye) mentén!

Nézzük, hogyan kapcsolódik a témánkhöz ez a geometriai érdekesség. Egy olyan merev test mozgási energiája, amelynek a tömegközéppontja éppen nyugalomban van, a

$$K = \frac{1}{2} \theta_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} \theta_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} \theta_z \omega_z^2 \quad (10)$$

alakban írható. (Ezt a mozgási energiát az inerciarendszerben mérik ekkorának, de a képletben szereplő θ - és ω -komponensek a testhez rögzített GYFR-ben, a főtengelyekkel kijelölt (x, y, z) koordinátarendszerben értelmezett értékek.) A (10) összefüggés levezetését mellőzöm, de maga a képlet középiskolásoknak is ismerős lehet, mert felbukkan a hőtanban: így írjuk fel egy többatomos (három forgási szabadságfokkal rendelkező) molekula forgási energiáját. Az

(5) összefüggések segítségével a (10) jobb oldalát átírhatjuk úgy, hogy szögsebesség helyett az impulzusmomentum komponenseivel legyen kifejezve:

$$K = \frac{N_x^2}{2 \theta_x} + \frac{N_y^2}{2 \theta_y} + \frac{N_z^2}{2 \theta_z}. \quad (11)$$

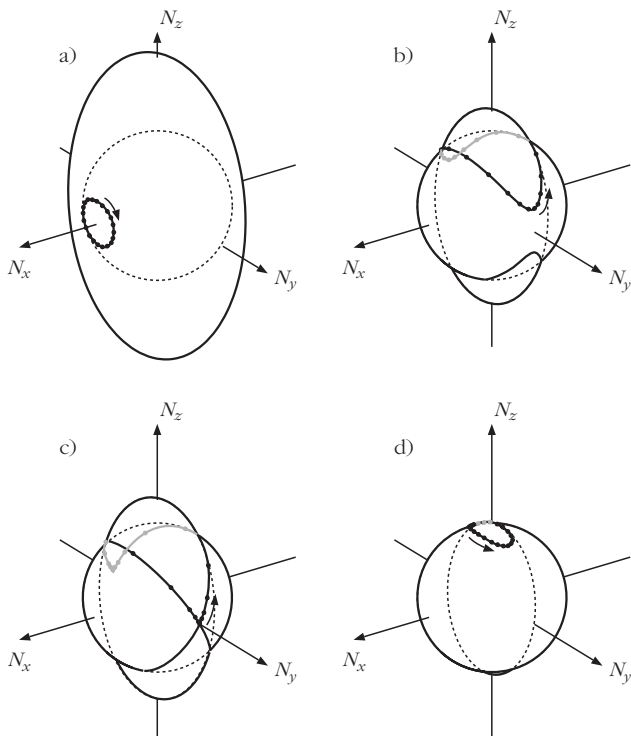
Vezessük be az

$$a_x^2 \equiv 2 K \theta_x, \quad a_y^2 \equiv 2 K \theta_y, \quad a_z^2 \equiv 2 K \theta_z \quad (12)$$

jelöléseket. A (12) jobb oldalain szereplő mennyiségek a test mozgása közben nem változnak, hiszen a bepörgetett és a levegőben magára hagyott test K mozgási energiája állandó, és a fő tehetetlenségi nyomatékok is azok (az utóbbiak csak a merev test főtengelyekhez képest mért tömegeloszlásától függenek). Az új jelölésekkel (11) az alábbi egyszerű alakba írható:

$$\frac{N_x^2}{a_x^2} + \frac{N_y^2}{a_y^2} + \frac{N_z^2}{a_z^2} = 1. \quad (13)$$

A (13) egyenletben egy origó-középpontú, a_x , a_y , és a_z féltengelyekkel rendelkező ellipszoid egyenletére ismerünk rá. Olyan ellipszoid ez, amelyet nem a valós 3-dimenziós térben, hanem az N_x , N_y , N_z merőleges tengelyekkel jellemzett, elvont „impulzusmomentum-térben” kell elképzelni. Az ellipszoid alakját – a féltengelyek arányát – a (12)-ből látható módon a θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékok határozzák meg, tehát például a 6-9. képeken látható tárgyak mindegyikére egy-egy jellegzetes ellipszoidalakot kapunk. Egy konkrét test különböző mozgásaihoz különböző nagyságú ellipszoid tartozhat, hogy mekkora, azt – szintén a (12)-ből látható módon – a test K mozgási energiája dönti el. Ez utóbbi okból a (13) ellipszoidot mozgásienergia-ellipszoidnak (K -ellipszoidnak) hívjuk.



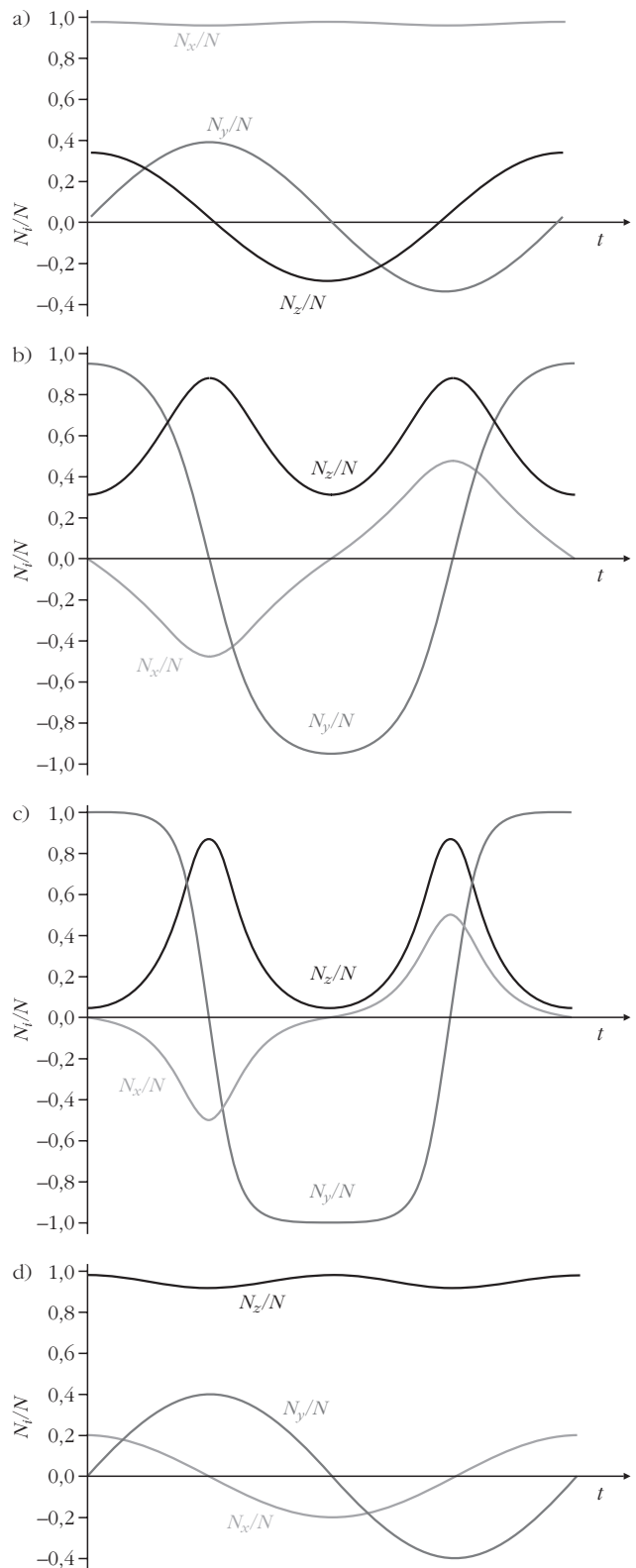
4. ábra. Az N -gömb és a K -ellipszoid áthatása, állandó értéken tartott impulzusmomentum és egyre kisebb mozgási energiák esetére.

Mint korábban láttuk, a test N impulzusmomentum-vektora is időben állandó, de csak az inerciarendszertől nézve. Az N_x , N_y , N_z komponensek viszont a testhez rögzített GYFR-ben vannak értelmezve. Ebből a nézőpontból nézve maga az N vektor nem állandó (változási üteme a (6) egyenletnek engedelmeskedik), de *hossza* igen:

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = N^2 = \text{állandó.} \quad (14)$$

A (14)-ben egy N sugarú gömb egyenletére ismerünk. Ezt a gömböt, mivel a *nagyságát* az impulzusmomentum értéke határozza meg, *impulzusmomentum-gömbnek* (N -gömbnek) nevezzük. Most már érthető, hogyan kapcsolódik a teniszütő-tételhez a gömb és ellipszoid áthatását mutató 3. ábra: mivel a szabadon hagyott test mozgása során mind a (13), mind a (14) egyenletnek teljesülnie kell, az N vektor végpontjának egyszerre rajta kell lennie a K -ellipszoid és az N -gömb felületén. Ez a végpont tehát *csak a két idom valamelyik metszetgörbéje mentén mozoghat*.

A 4. és 5. ábrákon ugyanazon merev test különböző mozgásait követhetjük nyomon az absztrakt impulzusmomentum-térben. (Pontosabban fogalmazva azt követhetjük nyomon, hogy a testhez rögzített nézőpontból az N vektor – és ezzel a testet körülvevő inerciarendszer, a „külvilág” – hogyan mozog. E mozgás fordítottját végzi maga a test a külső szemlélő szerint.) Ezek az ábrák megadják a választ a (9) egyenletek alatti bekezdésben feltett kérdésre: a 3 fő tengely körüli forgások közül melyek stabilak/instabilak, és miért? A 4–5. ábrákról le hagytam azt a három esetet, amikor a forgás *pontosan* valamelyik fő tengely, mint



5. ábra. Az N impulzusmomentum-vektor három komponensének időfüggése, a 4.a–d ábrákon vázolt esetekre.

forgástengely körül történik; az a három ábra teljesen úgy nézne ki, mint a 3.a, d, g ábrák. Tudjuk, hogy az a három eset egyensúlyi, stacionárius állapot (az indoklás a (9) egyenletek alatti bekezdésben található). A stabilitás kérdését úgy kell eldönteni, hogy kicsit

kimozdítjuk a testet egy-egy ilyen egyensúlyi állapotból, és megnézzük, ilyen körülmények között hogyan mozog tovább.

A 4–5. ábrákat a következőképpen készítettem: választottam 3 különböző számértéket – az ábrák megfelelő aleteire mindig ugyanazokat – a θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékoknak (úgy, hogy a $\theta_x < \theta_y < \theta_z$ reláció teljesüljön), és megválasztottam az \mathbf{N} vektor nagyságát, valamint hogy milyen kezdő irányban álljon a GYFR-ből nézve (ez utóbbi adat az ábrák (a)–(d) eseteire más és más, és ezt a kezdő irányt mindig úgy jelöltem ki, hogy a három fő tengely valamelyikéhez *közel* legyen). Ezek az előre megadott paraméterek a (11) összefüggés alapján egyértelműen rögzítették a K mozgási energia értékét, tehát a (13), illetve a (14) alapján felrajzolhatóvá vált a mozgási-energia-ellipszoid és az impulzusmomentum-gömb (4. ábra). Az \mathbf{N} végpontja az ellipszoid és a gömb valamelyik metszetgörbéjén mozog; hogy a két metszetgörbe közül melyiken, az az $N_x(0)$, $N_y(0)$, $N_z(0)$ kezdőértékekből kiderül. Ennek kiderítéséhez pedig, hogy ezen a metszetgörbén milyen irányban és milyen gyorsan fut végig az \mathbf{N} végpontja, egyszerű számítógépes programot írtam, amely a fent említett kezdőfeltételek mellett numerikusan integrálja a (9) differenciálegyenleteket. Az így kiadódott $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ időfüggvényeket a 4. ábra egyes eseteire az 5. ábra megfelelő grafikonjai mutatják. Az időfüggvények ismeretében a 4. ábrán a metszetgörbéken pöttyökkel jelöltem, hogy egyenletes időközönként éppen hol tart az \mathbf{N} vektor végpontja, a kis nyílak pedig \mathbf{N} mozgásának az irányát mutatják.

A 4–5. ábrákat átböngészve a következőket figyelhetjük meg:

- 4.a és 5.a ábrák: ha a testet *majdnem* az x tengely – a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú tengely – körül pörgetjük be ($N_x(0) \gg N_y(0)$, $N_z(0)$), akkor az \mathbf{N} végpontja mindvégig az N_x tengely közelében marad, akörül imbolyog. (Ezt az ω szögsebességű forgáshoz képest lassú imbolygó mozgást precessiónak nevezük.) A valós térbeli mozgásra lefordítva: a test x tengelye az IR egy rögzített iránya körül végez kis precessziókat. *A test x tengely körüli forgása tehát stabil*; hiszen amikor az x tengely körüli stacionárius forgáshoz képest egy kicsit kimozdítottuk a kezdőállapotát, mozgása végig az egyensúlyi állapot közelében maradt.

- 4.d és 5.d ábrák: ha a testet nagyjából a z tengely – a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú tengely – körül pörgetjük be ($N_z(0) \gg N_x(0)$, $N_y(0)$), hasonló a helyzet: az \mathbf{N} vektor végpontja mindvégig az N_z tengely közelében marad. A test z tengelye az IR egy rögzített iránya (az \mathbf{N} iránya) körül precesszál. *A test z tengely körüli forgása is stabil*.

- 4.b és 5.b ábrák: itt a testet úgy indítjuk útjára, hogy majdnem az y tengely – a *közbülső* tehetetlenségi nyomatékú tengely – körül pörgetjük be ($N_y(0) \gg N_x(0)$, $N_z(0)$). Egészen más mozgást kapunk, mint az előző két esetben. Két dologra figyelhetünk fel. Egyrészt a mozgás során N_y periodikusan előjelet vált a testhez rögzített nézőpontból nézve, vagyis a test szá-

bályos időközönként *átfordul* a térben, y tengelye az IR-ből nézve oda-vissza billeg. *A test azon forgása tehát, amelyet az y tengely körül indítunk, instabil*; hiszen amikor az y tengely körüli egyensúlyi forgási állapothoz képest egy kicsit eltérő állapotból indítottuk útnak, mozgása az idő folyamán drasztikusan eltávolodott ettől az egyensúlyi állapottól. Az y tengely oda-vissza átfordulását mutató ábrákkal érthetővé vált a cikk elején említett teniszütős tapasztalat. A 4.b ábrából az is látható, hogy az \mathbf{N} végpontját jelképező pöttyök a $\pm N_y$ tengely közelében *sűrűsödnek*. Ez azt jelenti, hogy a test több időt tölt a két szélső állapotban, vagyis a nagyjából $\pm y$ tengely körüli forgásokkal, mint azzal, hogy „átbucskázzon” az egyik szélső esetből a másikba. Ez a jelenség még jobban megfigyelhető a 4.c és 5.c ábrákon, ahol $N_y(0) = 0,999N$, tehát a testet képzeletben szinte pontosan az y tengely körüli forgással bocsátottam útnak. (A 4.c ábrán tehát egy hajszálnyit más az ellipszis és a gömb áthatása, mint a 3.d ábrán!)

Az 5. ábrán az időtengelyt nem kalibráltam számokkal. Minden grafikont vízszintes irányban akkorára nyomtam össze, hogy a folyamatoknak éppen egy teljes periódusa férjen rá. Ez a periódusidő azonban az egyes esetekre eltérő. Az 5.b és 5.c ábrák között például nem csak az a különbség, hogy az utóbbin az N_y/N két szélső állapota „vízszintesebb”, és hosszabb ideig tart az előjelváltás időtartamához képest, hanem az is – ez az ábrákból nem látszik, csak a számszerű részletekből –, hogy a teljes periódusidő is *hosszabb*, mint az 5.b ábrán. Tehát minél inkább sikerül a kezdeti bepörgetéskor az \mathbf{N} -t az y tengely irányába állítani, annál jobban elnyúlik a folyamat teljes periódusa. Ha sikerül(hetne) végtelen tizedesjegy pontosságra az y tengely körül bepörgetni a testet, akkor az oda-vissza billegés periódusideje a végtelenhez tartana, tehát a test sosem fordulna át, mindvégig az y tengely körül forogna. Ez (lenne) az az egyensúlyi, stacionárius forgás, amiről fentebb már volt szó.

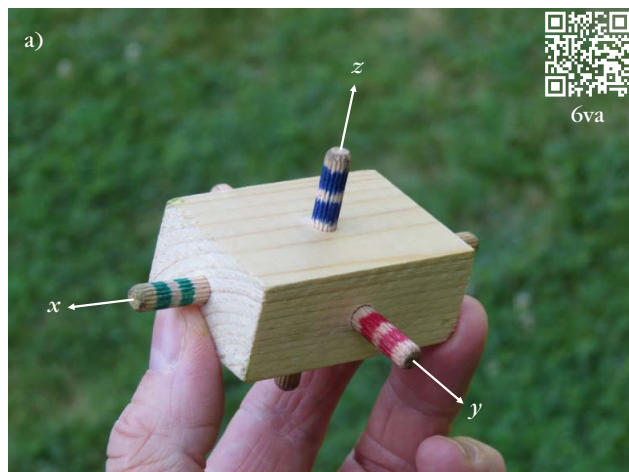
Az x tengely és a z tengely körüli forgás tehát stabil. De *egyformán* stabilak-e? Ha a forgást végző testben valamilyen belső disszipatív folyamat zajlik – a következő szakaszban, a kísérletek között látunk majd erre példát –, akkor a test K forgási energiája nem marad időben állandó, egy része hővé alakul. A lecsökkent forgási energia *kisebb K -ellipszoidot jelent*. Ugyanakkor a test impulzusmomentuma, tehát az \mathbf{N} -gömb mérete állandó marad, hiszen a belső erők nem fejtenek ki a testre eredő forgatónyomatékot. Ha ilyen körülmények között a testet kezdetben például nagyjából az x tengely körül pörgetjük be, tehát körülbelül a 4.a ábrán látható állapotból (az egyik „pöttyből”) indítjuk ki, a K csökkenése miatt az \mathbf{N} vektor precessziós mozgása nem válhat tartóssá, és a mozgás végső soron „a 4.d ábrán túli” állapotban köt ki, amikor a K -ellipszoid már a lehető legkisebb, és csak az N_z tengely két pontjában érinti az \mathbf{N} -gömböt. Disszipatív hatások jelenlétében tehát a test mozgása végső soron z tengely körüli forgássá alakul: *a test legstabilabb forgása a legnagyobb tehetetlenségi nyo-*

matékú főtengely körüli forgás, ehhez tartozik adott impulzusmomentum mellett a lehető legkisebb mozgási energia. A következő szakaszban látni fogjuk, hogy e jelenség bemutatására leghétköznapibb tárgyaink némelyikével kifejezetten egyszerű és látványos kísérletet lehet végezni.

Kísérletek

Az y tengely körül forgásba hozott test oda-vissza billegését Dzsani-bekov-hatásnak is nevezik, *Vlagyimir Dzsani-bekov* űrhajós tiszteletére. Dzsani-bekov egy 1985-ös űrutazás alkalmával fedezte fel, hogy amikor egy szárnyas anyacsavart lepörget a csavaráról, az a levegőben – a súlytalanságban – úgy pörög tovább, hogy szimmetriatengelyét oda-vissza billegtetni a térben. Inkább újrafelfedezés volt ez, hiszen a közbűlső tehetetlenségi nyomaték tétele már a 19. század első felétől ismert volt a fizikában, de Dzsani-bekov előtt talán senkinek nem volt még alkalma ennyire döbbenetes látványként megtapasztalni. Most már mindannyian megtehetjük, például egy YouTube-on található NASA-videóklip megtekintésével [4]. Érde-

6. kép. Tiplikkel ellátott fahasáb, három különböző fő tehetetlenségi nyomatékkal: $\theta_x < \theta_y < \theta_z$. Lásd a *6va* és *6vb* videóklipet, amelyek megtekinthetők a QR-kódokra kattintva, illetve az 1. és 2. lábjegyzet segítségével.



mes meggyőződni róla, hogy ez a változat tényleg mennyivel látványosabb, mint a levegőbe dobott teniszütő egyetlen átfordulása. A dolog kulcsa a *súlytalanság*, hiszen a kikapcsolt hajtóművel lebegő űrhajóban, mint inerciarendszerben, az egyhelyben lebegő és csak forgó mozgást végző test tetszőlegesen hosszú ideig tanulmányozható. Igaz, hogy a feldobott teniszütő is súlytalanul, szabadon mozog a levegőben, de repülése nagyon rövid ideig tart, és az alatt is lassan forog a levegőben. Célunk, hogy földi körülmények között is hasonló személyes élményt éljünk át, mint Dzsani-bekov vagy a NASA-videóklipet rögzítő űrhajósok. Ehhez célszerű a nagy teniszütő helyett inkább valamilyen kis tárgyat használni, és azt *nagy kezdő szögsebességgel* bepörgetni. Az űrhajósok maguk is súlytalanul lebegnek, tehát kényelmes nézőpontból tudják a test forgását figyelni: a térnek mindig ugyanarra a pontjára szögezhetik tekintetüket. Ezt elvileg a Földön is utánozhatnánk (például megtehetnénk, hogy egy 20 méter magas ugrótoronyból vízbe ugranánk, és az elrugaszzkodás pillanatában bepörgetnénk és rögtön ki is engednénk a kezünkől a kis tárgyat, ilyen módon a vízbeérésig körülbelül 2 másodpercig közlelről figyelhetnénk a tárgy forgását), ez azonban kicsit körülményes és talán veszélyes is lenne. Érdekes inkább stabilan állni a földön, amikor a tárgyat eldobjuk. Ezzel feladjuk az inerciarendszerbeli nézőpontot, hiszen a szabadon, relaxált állapotban mozgó tárgy hozzánk képest parabolapályán *gyorsul*, és ezt tekintetünkkel sajnos követnünk kell, viszont az effektus sok esetben így is nagyon szépen látható. A mozgás részletesebb megfigyeléséhez pedig a tárgyról *lassított felvételen* videót készíthetünk. Ehhez nem feltétlenül kell drága és nagy berendezés, sok diáknak van például olyan mobiltelefonja, amelyben beépített funkció a lassított felvétel. Én a Canon SX60-HS típusú, bridge-kategóriás fényképezőgépet használtam mind a normál videók, mind a lassított felvételek elkészítésére. Ez a fényképezőgép (igaz, nagyon kis felbontás mellett) 8-szorosra lassított videók felvételére képes.

Talán a legegyszerűbb alakzat, amellyel a teniszütő-tétel demonstrálható, a téglatest. A 6. kép két nézetből mutat egy fából készült téglatestet, amelynek oldalközéppontjaiba 6 fatipli van merőlegesen befúrva. (Hálás köszönetemet fejezem ki *Pósfai Józsefnek*, aki a 6. képen látható mellett több méretben és méretarányban készített nekem ilyen remek kísérleti eszközöket.) A tiplik egyrészt fizikailag is láthatóvá teszik a fő tehetetlenségi tengelyeket, másrészt – és ez sokkal fontosabb – az eszközt a tipliknél fogva könnyű nagy szögsebességgel bepörgetni a főtengelyek körül. Hogy a videókon és az élő kísérletben is jobban követhetők legyenek a test különféle mozgásai, a tengelyek pozitív oldalát különböző színekkel jelöltem meg: zölddel az x , pirossal az y , kékkel pedig a z tengelyét. Mint a *6va videó*¹ mutatja, valós időben, sza-

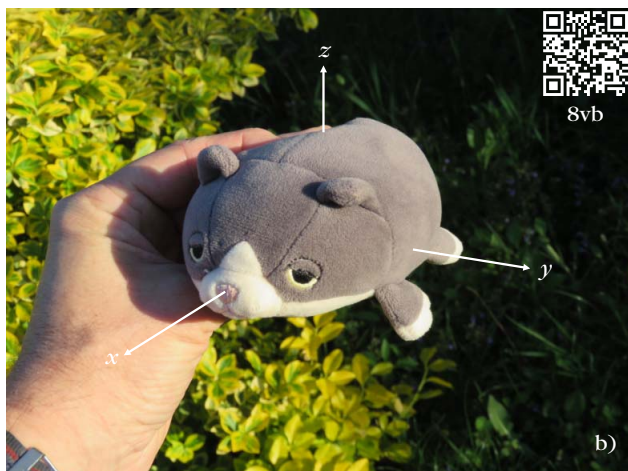
¹Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/6va> helyen.



7. kép. Három különböző tárgy legóból. A fekete tengely az adott tárgy a) legkisebb, b) közbülső, c) legnagyobb fő tehetetlenségi nyomatóka. Lásd a 7va és 7vb videóklipet, amelyek megtekinthetők a QR-kódokra kattintva, illetve a 3. és 4. lábjegyzet segítségével.

bad szemmel is jól látható az y tengely körüli forgás instabil jellege, illetve az x és z tengely körüli forgások stabilitása. Ha az y tengely körül pörgetjük be a testet, az 5.c ábra kapcsán részletezett okból nagy eséllyel nem az átbutcskázás közben fogjuk elkapni, hanem akkor, amikor éppen egész számú átfordulást végezett. Nagyon kis gyakorlás kell ahhoz, hogy a testet fel-feldobálva mindig egy teljes átfordulás után, ellentétes oldalával érjen vissza a kezünkbe az y tengely. Ez jól látható a 6va videó középső szegmensében, amelynek felvételét szinte semekkora gyakorlás

8. kép. Plüsstárgyak, három különböző fő tehetlenségi nyomatóka: $\theta_x < \theta_y < \theta_z$. Lásd a 8va és 8vb videóklipet, amelyek megtekinthetők a QR-kódokra kattintva, illetve az 5. és 6. lábjegyzet segítségével.



nem előzte meg. A 6vb videó² ugyanezen test mozgását mutatja a három fő tengely körül, lassított felvételben. A megfigyelési idő „széthúzásával” nagyon szépen visszakapjuk az űrhajósok által filmre vett döbbenetes látványt. (Szubjektív megjegyzés: a dobálgatható fahasáb nem csak kísérleti eszköznek, hanem ki-kapcsolódást nyújtó „fidget” játéknak is nagyszerű.)

Legóból is nagyon egyszerűen építhetünk kísérleti eszközt. A 7. képen látható modellek elkészítésénél az motivált, hogy a Dzsánibekov-féle szárnyas anyához hasonló szimmetriájú eszközzel végezzek kísérleteket. Itt nem egyetlen tárgyat pörgettem be a három fő tengelye körül, hanem háromféle tárgyat egy-egy fő tengelye körül. Ehhez egy olyan egyszerű alapelemet készítettem, amelybe különböző hosszúságú tengelyeket lehet illeszteni: a 7.a, b és c képeken a fekete tengely hossza rendre 12, 6, illetve 3 egység. A fekete tengely az így kapott tárgyaknak rendre a legkisebb, a közbülső, illetve a legnagyobb tehetlenségi nyomatókú fő tengelye lett, ezt tükrözik a tengelyek eltérő betűjelei a 7.a, b és c képeken. A 7Va videó³ valós sebességgel figyelhető meg a 3 test mozgása. A videó középső szegmensében tisztán kivehető és nagyon izgalmas látványt nyújt a tárgy teljes átfordulása a térben. A 7vb videó⁴ ismét azt szemlélteti, hogy érdeemes lassítva is megnézni a háromféle mozgást.

Az elméleti leírásban felbukkant K -ellipszoid adhatja az ötletet, hogy a kísérleteinkhez keressünk olyan tárgyat is, amelynek tényleges alakja általános ellipszoid vagy ahhoz hasonló. Ezeknek külön pedagógiai haszna van: a diákokkal meg lehet beszélni, hogy a (homogén tömegeloszlásúnak tekintett) tárgy ellipszoid alakja milyen kapcsolatban van az absztrakt impulzusmomentum-térben létező K -ellipszoid alakjával. (A válasz: jellegét tekintve fordított kapcsolatban. A K -ellipszoid az N_x tengely irányában a leglelapultabb, míg a tárgy az x tengely mentén a leghosszabb, mindkettő azért, mert az x tengely körüli forgáshoz tartozik a legkisebb tehetlenségi nyomatók.) A 8. képen látható plüsstárgyak közel ellipszoid alakúak. Szigorúan véve nem merev testek, ráadásul a

²Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/6vb> helyen.

³Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/7va> helyen.

⁴Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/7vb> helyen.

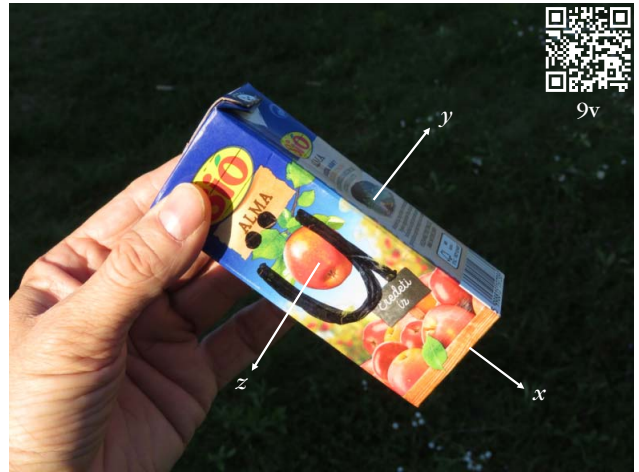
8.b képen szereplő kutyának lifegő füle, farka, lábai vannak, de – mint a $8va^5$ és $8vb^6$ lassított videón látható – ezek a plüsstárgyak is teljesen alkalmasak a tenisütő-tétel bemutatására.

A következő példával visszatérek a téglatesthez (9. kép). Ez talán a legegyszerűbb kísérleti eszköz az összes közül, és bizonyos szempontból a legtanulságosabb. A dobozos gyümölcslet – de a dobozos tej-szín is éppen ilyen jól működik – aránylag nagy tömege miatt egy kézzel is könnyű felhajítani a levegőbe úgy, hogy jó pontossággal az y tengelye körül kezdjen pörögni. A mozgás azonban nem úgy folytatódik, ahogy egy merev testtől a tenisütő-tétel alapján várnánk: a doboz az eldobás után szinte azonnal befordul olyan irányba, hogy amerre eredetileg az y tengelye nézett, most a z tengelye fog nézni, és *onnantól kezdve végig a z tengely körül forog*. A kísérlet nagyon jól megfigyelhető szabad szemmel, illetve valós sebességű videón, már csak azért is, mert a doboz feltűnően más irányban áll, amikor elkapjuk, mint amikor feldobtuk: „lapjával” bepörgetve dobtuk fel, és mindig az „élével” érkezik vissza a kezünkbe. A $9v$ videó⁷ középső szegmense ezt a jelenséget mutatja lassítva. (A lassított videón ismét hagytam, hogy a tárgy leessen a földre, hogy szabadesése minél hosszabban megfigyelhető legyen.) E jelenség okáról fentebb már volt szó: a test azért állapodik meg a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú tengely körüli forgásnál, mert pörgése közben van egy mechanizmus – az almalé turbulens áramlása a dobozban –, amely disszipálja a kezdeti forgási energia egy részét. Az almalés dobozt tehát a *4.c ábrának* megfelelő állapotból indítottam ki, és abban a forgási állapotban stabilizálta magát, amelyben a K -ellipszoid olyan kicsi, hogy már csak az N_z tengely mentén érinti az N -gömböt. (Szemléletes kép lenne, csak pontatlan, azt mondani, hogy a folyamat közben a K -ellipszoid fokozatosan „belezsugorodott” az N -gömbbe. Azért pontatlan, mert amíg a doboz belsejében a folyadék-molekulák különböző irányokban áramlanak, nem használható a teljes mozgási energia leírására a – csak merev testre érvényes – (11) összefüggés, tehát a K -ellipszoid fogalma sem.) Ha azt akarjuk, hogy az almalés doboz is produkálja a Dzsani-bekov-hatást, *merev* testet kell csinálni belőle. Erre két egyszerű módot találtam: az első esetben az almalét fél napig a mélyhűtőbe tettem, tehát a dobozt a kísérlet alatt már jéggé fagyott almalé töltötte ki. Ezt mutatja a $9v$ videó első szegmense. A dobozra filctollal nagy „J” betűt írtam, hogy könnyen megkülönböztethető legyen az eredeti kísérlettől. Mint a videón látható, a fagyott almalés dobozzal szépen bemutatható a Dzsani-bekov-hatás. A másik lehetőség: meginni az almalevet. Az üres doboz már merev testként viselkedik. Ez lát-

⁵Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/8va> helyen.

⁶Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/8vb> helyen.

⁷Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/9v> helyen.



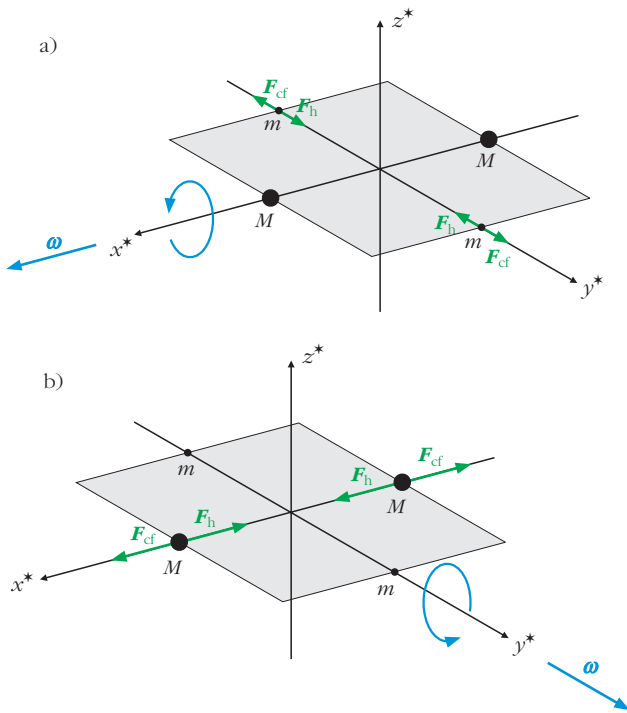
9. kép. Dobozos almalé, három különböző fő tehetetlenségi nyomatékkal: $\theta_x < \theta_y < \theta_z$. Lásd a $9v$ videoklipet, amely megtekinthető a QR-kódra kattintva, illetve a 7. lábjegyzet segítségével.

ható a $9v$ videó harmadik szegmensén, amelyen a dobozra filctollal nagy „Ü” betű van írva (az üres almalés doboz látható a *9. képen* is). Vannak azért eltérések: az üres doboz nagyon kis tömegű, sokkal nehezebb vele a kísérletet elvégezni, mint a fagyott almalés dobozzal. Még két kézzel fogva sem könnyű olyan kiegyenlítettten feldobni, hogy éppen az y tengely körül kezdjen gyors forgásba. Ha a kísérletet a szabadban végezzük, a kis tömeg miatt arra is ügyelni kell, hogy teljes szélcsend legyen. Ha nincs, a diákokkal azt is meg lehet figyelni és diszkutálni lehet, milyen változásokat okozhat az elméleti esethez képest egy-egy széllelés.

A fenti kísérleti eszközök csak néhány példát mutattak arra, hogy egyszerű tárgyakat használva is élvezettel és sokoldalúan lehet tanulmányozni a tenisütő-tételt és a hozzá kapcsolódó jelenségeket. Ha az embert elkapja a tenisütő-tétel láza, a lakásában járva-kelve szinte mindenütt kipróbálásra érdemes kísérleti eszközöket talál.

Kiegészítés az elmélethez: a Terry Tao-féle magyarázat

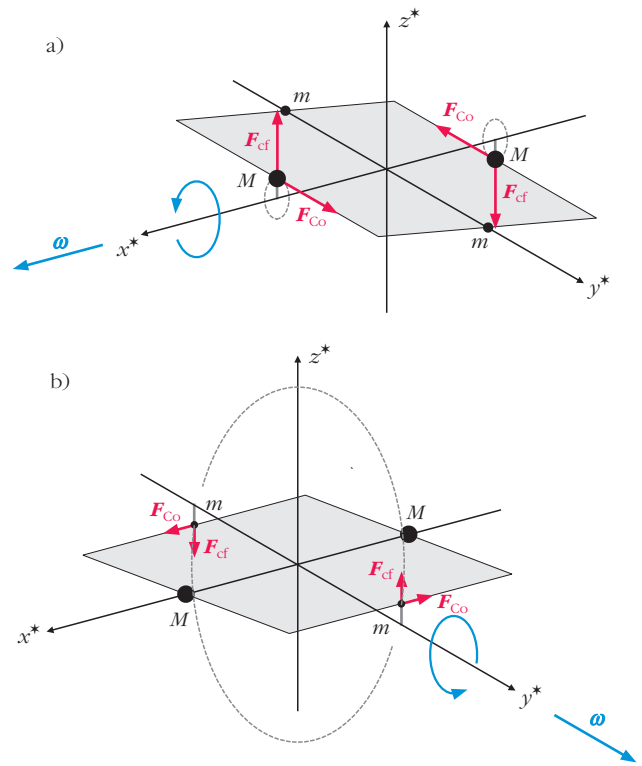
A cikk fenti, csatolt differenciálegyenletekre, elvont impulzusmomentum-térre hivatkozó elméleti összefoglalója esetleg hiányérzetet hagyhat az olvasóban. Nincs-e olyan, legalább kvalitatív magyarázat a tenisütő-tételre, amely a test tömegpontjaira ható *erők* segítségével az átbucskázást okozó „fizikai mechanizmust” világítja meg, és így talán közvetlenebbül érthető egy elsőéves vagy egy középiskolás számára? A választ (de igen, van) és a magyarázatot Terry Tao matematikus adta meg néhány évvel ezelőtt egy internetes fórumon [5]. Az alábbiakban ezt az érvelést foglalom össze. Tekintsük a *10.a ábrán* látható merev testet. Ez egy elhanyagolható tömegű (az ábrán szürkével jelölt) négyzet alakú lapból, valamint 2-2 hozzáerősített pontszerű tömegekből áll, amelyekre $M \gg m$. Kis utána-gondolással belátható, hogy a *10.a ábrán* az x^* , y^*



10. ábra. $2(M+m)$ tömegű merev test forgása pontosan a) a legkisebb, illetve b) a közbülső tehetetlenségi nyomatékú tengely körül.

és z^* tengelyek rendre a test legkisebb, közbülső és legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú fő tengelyeivel esnek egybe, összhangban az eddigi betűjelöléseinkkel. A test mozgásának elemzését viszont most *nem* a testhez rögzített GYFR-ből és nem is az IR-ből végezzük, hanem egy olyan vonatkoztatási rendszerből, amely az IR-hez képest az adott pillanatban éppen *a test ω pillanatnyi szögsebességével forog*. Erre utal a tengelyek megcsillagozása is; fontos tudatosítani, hogy ezek a tengelyek *nincsenek a testhez rögzítve*, hanem valamelyikük – hogy melyik, azt mindig előre eldöntjük – mindvégig a pillanatnyi ω irányával esik egybe, a másik kettő pedig ezzel az ω -val forog az IR-hez képest. A 10.a és a 11.a ábrákon az x^* tengely esik egybe az ω vektorral, tehát ez a test mozgásának pillanatnyi forgástengelye, a 10.b és a 11.b ábrákon pedig az y^* tengely. A test mozgását az m és M tömegpontokra ható *erők* segítségével fogjuk elemezni, amelyekbe a csillagos vonatkoztatási rendszerben bele kell érteni a centrifugális erőt és a Coriolis-erőt is, hiszen ez a vonatkoztatási rendszer az IR-hez képest forog. (A neve a továbbiakban: forgó vonatkoztatási rendszer, „FVR”.)

A 10.a ábrán a test pontosan a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú fő tengelye körül forog, az x^* forgástengely egybeesik a test x fő tengelyével. Ilyenkor az ω mellett (az ábrán nem jelölt) \mathbf{N} impulzusmomentum is az x^* tengely irányában áll (emlékeztetőül az ok: az (5) összefüggések). A test a FVR-ből nézve nyugalomban van. Erőkkel úgy magyarázhatjuk ezt az egyensúlyt, hogy mindkét m tömegre hat egyfelől a forgó nézőpontból származó fiktív \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő, másfelől a szürke lapban valóságosan ébredő \mathbf{F}_h húzóerő, és a két erő kiejti egymást. Stabil-e ez az



11. ábra. A 10. ábrán látható merev test forgása, amikor a pillanatnyi forgástengely (az x^* , illetve az y^* tengely) kicsit eltér a test a) legkisebb, illetve b) közbülső tehetetlenségi nyomatékú fő tengelyétől.

egyensúly? A választ már tudjuk: igen. De nézzük, hogyan indokolhatjuk ezt erőkkkel. Tekintsünk egy olyan, kicsit kibillentett helyzetet, amikor az x^* pillanatnyi forgástengely nem egészen esik egybe a test x tengelyével. Ezt a helyzetet a 11.a ábra mutatja. Ekkor a két M tömegpont nincs rajta a forgástengelyen, tehát $M r \omega^2$ nagyságú \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő hat rájuk, amely igyekszik az M -eket a forgástengelytől eltávolítani, tehát az egész testet az (x^*, y^*) síkhoz képest még jobban kibillenteni (r az M tömegpontok x^* tengelytől mért távolsága, amit az ábrán betűvel nem jelölök). Egy ilyen kibillentéssel szemben az m tömegeknek „nincs semmi kifogása”, hiszen az ő pozíciójuk az (x^*, y^*, z^*) koordináta-rendszerben ettől nem változik. A forgástengelytől távolodni kezdő M -ekre viszont, amint a FVR-ben valamilyen \mathbf{v}^* sebességre tesznek szert, egyenként $\mathbf{F}_{Co} = 2M\mathbf{v}^* \times \boldsymbol{\omega}$ Coriolis-erő kezd hatni, kezdetben a 11.a ábrán jelzett irányban. A két M tömegpont megpróbál elmozdulni a Coriolis-erők irányába, ez viszont – a lemezben ébredő mechanikai feszültségek közvetítésével – a kis m tömegpontok helyén is érezteti hatását, hiszen ahhoz, hogy az M tömegek a Coriolis-erőnek engedelmessé váljanak a (x^*, z^*) síkból, „magukkal kell rántaniuk” az m tömegeket is, amelyekről most már az van elvárva, hogy kimozduljanak az (y^*, z^*) síkból. A nagy M tömegek a kis m tömegeket meggyőzően tudják „rábeszélni” erre a kimozdulásra, mert a Coriolis-erők az M -mel arányosak, tehát nagyok, az m tömegpontok pedig, kis tömegük miatt, nem tudnak ellenállni a lemezben ébredő nagy

húzó-nyíró erőknél. A Coriolis-erő így tehát eredményesen eltéríti a M tömegeket az x^* tengelytől elfelé mutató iránytól, és pályájukat begörbíti. Mihelyt a pálya begörbül, a Coriolis-erő iránya is elfordul a 11.a ábrán jelzett irányhoz képest befelé, az x^* tengely felé, hiszen \mathbf{F}_{Co} mindig merőleges az M tömegek pillanatnyi sebességére. Végeredményben – állítja Tao okfejtése – a két M tömegpont az x^* tengely körül „inog”, ahogy a 11.a ábra vékony szaggatott görbéi jelzik, és az egész test – mereven megtartva az alakját – az x^* tengely körül „billog”.

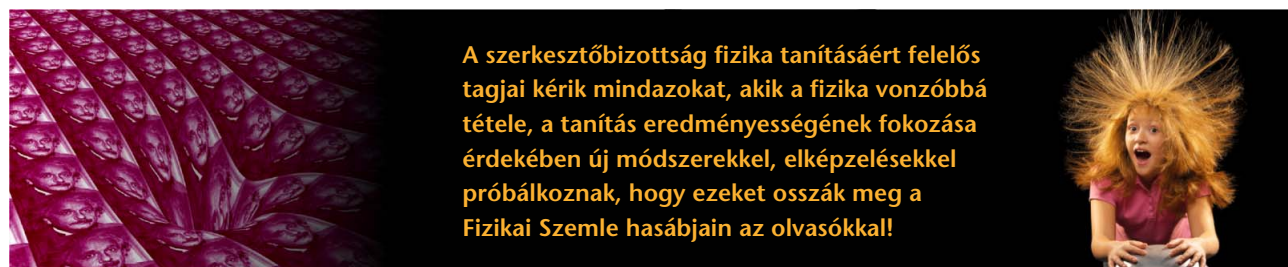
A 10.b és 11.b ábrák lényegében ugyanezt a situációt mutatják, csak az m és M tömegek szerepcseréjével, de ez a szerepcseré az érvelés végeredményét drasztikusan módosítja. A 10.b ábrán a forgástengely az y^* tengely, ami most egybeesik a test *közbülső* tehetetlenségi nyomatékú fő tengelyével. Az ω a 10.a ábrához hasonló módon párhuzamos az N impulzusmomentummal, a test a FVR-ből nézve ismét nyugalomban van (mindkét M tömegnél a rájuk ható \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő és \mathbf{F}_h húzóerő kiegyenlíti egymást). Tudjuk, hogy az egyensúlyi állapot ezúttal *instabil*. Hogyan lehetséges ez? A magyarázathoz ismét billentsük ki egy kicsit a testet az egyensúlyi helyzetből: pörgessük be úgy, hogy az y^* pillanatnyi forgástengely ne pontosan essen egybe a test y tengelyével (11.b ábra). A két m tömegpont lekerült a forgástengelyről, tehát $m r \omega^2$ nagyságú \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő hat rájuk, amely igyekszik őket a forgástengelytől még jobban eltávolítani, azaz a testet az (x^*, y^*) síkhoz képest még jobban megdőnteni. Ez az egyre nagyobb kibillentés nyugodtan végbemehet, az M tömegek nem fejtenek ki vele szemben ellenállást, mert ez az elmozdulás az ω pozíciójukat háborítatlanul hagyja: ők továbbra is az x^* tengely két átellenes pontján maradhatnak. A forgástengelytől távolodni kezdő m -ekre a FVR-ben a Coriolis-erő is elkezd hatni a 11.b ábrán mutatott irányokban, ez az erő mindkét testre $\mathbf{F}_{Co} = 2 m \mathbf{v}^* \times \boldsymbol{\omega}$, ahol \mathbf{v}^* az adott test sebessége a FVR-ben. Csakhogy ezek a Coriolis-erők az m -mel arányosak, tehát nagyon kicsik. Amikor megpróbálják – a lemezben ébredő mechanikai feszültségek közvetítésével – a nagy M -eket kimozdítani az (x^*, z^*) síkból, ezen tömegpontok nagy tehetetlensége miatt kudarcot valtanak. A kis m -eknek tehát csak az a mozgása maradhat meg, amellyel szemben a nagy M -ek nem fejtenek ki ellenállást, tehát az, hogy a centrifugális erő hatására tovább távolodnak az y^* forgástengelytől, és a test egyre jobban bedől az (x^*, y^*) síkhoz képest. Az y tengely körüli forgás tehát *instabil*, mert ha az y ten-

gelyt egy picit kibillentjük a y^* forgástengely irányából, akkor gyorsulva egyre jobban eltérül ettől az iránytól. Ez az eltávolodás természetesen nem folytatható a végtelenségig. Onnantól kezdve, hogy az m tömegpontok átlendülnek az (x^*, z^*) síkon, a rájuk ható centrifugális erő, amely továbbra is elfelé mutat az y^* tengelytől, már lassítja őket, míg végül az m -ek az y^* tengely közvetlen közelében megállnak, és az egész folyamat kezd visszafelé lejátszódni, azután pedig periodikusan ismétlődik.

A Terry Tao-féle, kissé elnagyolt magyarázat érdeme, hogy azokhoz is közelebb viheti a teniszütő-tétel megértését, akik számára az erők – köztük a tehetetlenségi „erők” – világa ismerős terep, de talán megrettennek a K -ellipszoidra és N -gömbre épülő, absztraktabbnak tűnő gondolatmenettől. Ugyanakkor a Tao-féle érvelés csak a 10.a ábrán láthatóhoz hasonló, speciális tömegeloszlású tárgyakra működik meggyőzően, és legfeljebb kvalitatív magyarázatot ad. Emellett olyan koordináta-rendszert használ, amelyben az ω van nyugalomban, ez pedig nem is inerciarendszer, nem is a tárgyhoz rögzített nézőpont, és az, hogy a tárgy hogyan mozog e vonatkoztatási rendszerhez képest, nehezebben átlátható magyarázatot ad a jelenségről, mint ha eleve arra a kérdésre adná meg a választ, hogy miként mozog a tárgy az IR-hez képest. Mindenképpen érdemesnek látom ezért az érdeklődő diákokat megismertetni a K -ellipszoidra és N -gömbre épülő geometriai levezetéssel is, még akkor is, ha az minden érintettől nagyobb erőfeszítést igényel. Az a levezetés bármilyen alakú tárgyra általánosan működik, és *kvantitatív* magyarázatot ad a tárgy mozgásának összes fontos részletére. Ráadásul a geometriai tárgyalásmód – amely egyébként Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) és áttételesen Louis Poincaré (1777–1859) nevéhez fűződik – eleganciájával, matematikai szépségével szinte ugyanolyan lenyűgöző élményt nyújthat tanárnak és diáknak, mint a fizikai jelenség, amelyet leír.

Irodalom

1. https://www.aparat.com/v/skH9C/My_Friends_Tigger_and_Pooh_-_Pooh's_Badful_Day_-_?t=556
2. <https://youtu.be/IhnHC-u2gdw?t=59>
3. Budó Á.: *Mechanika* (1965); M. Levi: *Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal Control* (2014); H. Goldstein, Ch. Poole, J. Saffo: *Classical Mechanics* (2000); T. L. Chow: *Classical Mechanics* (2013); R. D. Gregory: *Classical Mechanics* (2006); J. R. Taylor: *Classical Mechanics* (2005)
4. <https://www.youtube.com/watch?v=1x5UjwEEvpQ>
5. <https://mathoverflow.net/questions/81960/the-dzhanibekov-effect-an-exercise-in-mechanics-or-fiction-explain-mathemat>



A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kérik mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Fizikai Szemle hasábjain az olvasókkal!

AMI TÚLMUTAT AZ ELEKTROSZTATIKÁN: VILLÁMOK AZ ÚJ NEMZETI ALAPTANTERV TÜKRÉBEN

– A villámok elektromágneses sugárzása, a villámvédelem kérdései

Takátsné Lucz Ildikó – Érdi Vörösmarty Mihály Gimnázium
Tasnádi Péter – ELTE TTK Meteorológiai Tanszék

Cikkünk előző részében [1] a nagy légköri elektromos áramkörrel, a villámok keletkezésével, a villámlás időbeli lefolyásával foglalkoztunk. Áttekintettük, milyen háttérismeretek szükségesek a villámlás folyamatának megértéséhez, és ezek hogyan interpretálhatók a középiskolai fizikaoktatásban az új NAT (Nemzeti alaptanterv) keretei között. Az új kerettantervben hangsúlyosabbá válik a korábban kiegészítő vagy olvasmányrészben található villámvédelem kérdése, ezen belül a villámhárító működése, valamint a zivataros időben való helyes magatartás kialakításának igénye. Úgy gondoljuk azonban, hogy e jelenségkör tanítását, a villámcsapás veszélyeinek leírását nem lehet csupán az elektrosztatika témakörére korlátozni. A téma több részletének megértéséhez szükségesnek tartjuk a villámok tárgyalásának beemelését a tananyag más (mágneses indukció, elektromágneses sugárzások) fejezeteibe is.

A villámok által keltett elektromágneses hullámok a frekvencia függvényében, a keletkezés helyétől különböző távolságig észlelhetők és lehetőséget adnak a villámok lokalizációjára. Hatásuk fontos szerepet játszik a villámok által okozott károkból is. A továbbiakban ezért először a villámok elektromágneses sugárzását vizsgáljuk meg az alacsonyabb

frekvenciáktól a magasabbak felé haladva, majd – a teljesség igénye nélkül – kitérünk a villámvédelem néhány kérdésére.

A villámok elektromágneses tere

A felhő-föld villámok gyakorlatilag függőleges kisülési csatornája hatalmas antennaként viselkedik és a kisülés során nagyon széles frekvenciasávban, a néhány hertzes frekvenciáktól az optikai frekvenciákon keresztül a lágy gamma-sugárzás 10^{19} hertzes frekvenciájáig bocsát ki elektromágneses sugárzást. A széles frekvenciasáv miatt természetes, hogy a teljes spektrum nem mérhető egyetlen detektorral, így annak tanulmányozása nem egyszerű, a kísérleti vizsgálatok általában csak meghatározott résztartományokra (rádiófrekvenciás, optikai, nagyenergiájú) vonatkoznak. További nehézséget okoz a villámcsapások véletlenszerű bekövetkezése, ami lehetetlenné teszi a detektálás idejének tervezését. Emiatt ígéretesnek tűnik a mesterségesen kiváltott villámcsapások vizsgálata is. A korszerű mérési lehetőségekről és az eredményekről jó tájékoztatást ad *A. Gurevics* és munkacsoportja [2]. A csoport 2016-ban a Tien Shan hegységben végzett a villámok elektromágneses sugárzási tartományának vizsgálatára szimultán méréseket a rádió (0,1–30 MHz), az ultraibolya ($\lambda = 240\text{--}380$ nm), az infra- és látható vörös ($\lambda = 610\text{--}800$ nm) tartományban, valamint megkísérelték nyomon követni a 0,1–4 MeV-es gamma-sugárzást is. A nagy időfelbontású mérések összehasonlításából a villámlás időbeli szerkezetére, a villámlás szakaszainak szerepére következtettek.

A villámok elektromágneses hullámhossztartományait (a rádióhullám, az optikai és gamma-tartományt) eltérő mechanizmussal magyarázhatjuk. A rádióhullámok a villám hatalmas antennaként történő működésének tulajdoníthatók, a fény azzal magyarázható, hogy a felforrósodott villámcsatornában ionizált és gerjesztett részecskék mozognak, amelyek fényt bocsátanak ki. A nagyenergiájú (az angol energetics terminológia szószerinti fordításaként „energetikus”-nak is nevezhető) részecskék létezése sokáig kérdéses volt, keletkezésük a villám körül keletkező erős elektromos térben relativisztikus sebességre gyorsuló elektronok ionizáló hatásának tulajdonítható.

A villámok elektromágneses tere általában sztatikus, sebességi és sugárzási mezőből tevődik össze. A *sztatikus tér* leírására a Coulomb-mezőt használjuk. A

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantergypedagógiai Kutatási Programja támogatta.



Takátsné Lucz Ildikó az ELTE Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása alprogram PhD-hallgatója, az MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport tagja, az Érdi Vörösmarty Mihály Gimnázium matematika–fizika szakos tanára.



Tasnádi Péter matematika–fizika tanár, meteorológus, az ELTE TTK nyugalmazott egyetemi tanára. Tíz évig volt a TTK Oktatási dékánhelyettese. Egyetemi, középiskolai és általános iskolai tankönyvek szerzője. Kutatási területe a dinamikus meteorológia és a fizikatanítás szak módszertana, korábban a fémfizika volt.

sztatikus töltések mágneses mezőt nem keltenek maguk körül. Ha a pontszerű töltés állandó sebességgel mozog, akkor Coulomb-mezeje ennek megfelelően változik, a tér szerkezetének gömbszimmetriája pedig torzul. A kétféle Coulomb-mező megkülönböztetésére az utóbbit *sebességmezőnek* vagy *indukált Coulomb-mezőnek* nevezzük. A *sugárzási mezőt* gyorsuló töltések hozzák létre. *Mágneses mező* csak akkor jön létre, ha a töltés állandó sebességgel mozog, vagy gyorsuló mozgást végez, ezért a mágneses mező úgynevezett sebességmezőre és sugárzási mezőre bontható.

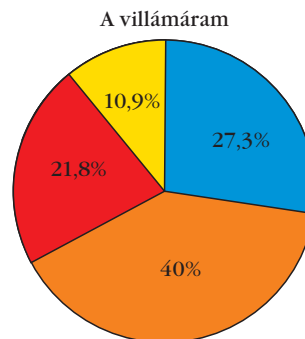
Az elektromágneses mezőt alkotó sztatikus mezőnek $1/r^2$ és $1/r^3$ szerint változó komponense is van, míg a sebességmező $1/r^2$ -tel változik, ahol r a villámcsatornától való távolság. A sugárzási mező egy $1/r$ és egy $1/r^2$ -es tagból áll. Ennek érdekessége, hogy mindkét tag energiát tud szállítani egyik helyről a másikra. A különbség mindössze annyi, hogy míg az $1/r$ -es tag a távoli sugárzási mezőt írja le, addig az $1/r^2$ -es tag a villámcsatorna közelében levőt [3].

Középiskolai tudás és tananyag

A villámok elektromágneses tere leginkább az elektromágneses hullámok tanításához kapcsolva tárgyalható. Legalább vázlatosan ismerni kell a villámok szakaszait és a villámokban zajló töltésmozgást. (Ezt előző cikkünkben tárgyaltuk.) Magát a jelenségekört akár egy-két tanórán, akár az elektromágneses hullámok témakörben szétszítva is feldolgozhatjuk. Érdemes felvetni a kérdést, hogy a villámáram vajon egyen-, váltakozó vagy változó áram-e és ennek milyen következményei vannak. Megkérdezhetjük azt is, hogy mit gondolnak diákjaink arról, hogy milyen színű a villám és ennek mi lehet az oka. Végezhetünk becslést egy villámcsapás energiájára vonatkozóan, megmutathatjuk, hogy hasznosításának milyen korlátai vannak. E kérdések megbeszélésével számos, a villámokkal kapcsolatban kialakult tévhit elosztható. 55 diákot kérdeztünk meg, mi a véleményük a fenti kérdésekről. Válaszaikat tükrözik az 1. ábra diagramjai.

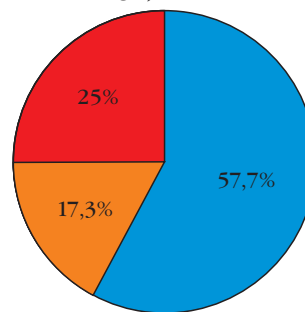
A rádióhullámok tartománya

A villámok elektromágneses sugárzásának tárgyalását célszerű egyszerű kísérlettel kezdeni. A villámokat tantermi körülmények között szikrákkal helyettesíthetjük. Ha bekapcsolt rádiókat közép-, illetve rövidhullámú sávban megfelelő hangoljuk (körülbelül 1 MHz frekvencia megfelelő szokott lenni) és a rádió mellett ebonitruddal dörzsölünk, akkor megfigyelhetjük, hogy a rádió sercegő hangot ad. Természetesen, ha a tanóra idején az idő zivataros, a rádió a villámok hatására is serceg. A jelenség értelmezésével már el is érkezzünk a „villám” által kibocsátott elektromágneses spektrum rádióhullámú tartományához. A kvalitatív magyarázat egyszerű: az elektromosan töltött testek nem csupán sugározni képesek, hanem a rájuk eső



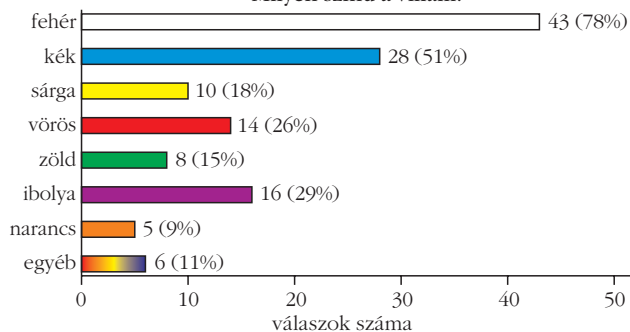
■ egyenáram ■ váltakozó áram ■ változó áram ■ egyik sem

A villám energiájának hasznosítása...



■ technikailag még nem megoldott, de érdemes vele foglalkozni
 ■ már megoldott
 ■ gazdaságilag nem kifizetődő, nem érdemes vele foglalkozni

Milyen színű a villám?



1. ábra. Válogatás a diákok kérdőívéből.

elektromágneses sugárzás egy részét el is nyelhetik. Ekkor a sugárzás elektromágneses tere a töltött részecskéket rezgésbe hozza és a sugárzási energia egy része a részecskék rezgési energiájává alakul át. Ez az energiaátadási folyamat figyelhető meg a fent említett esetben is. A villámlás elektromágneses sugárzása a vevőkészülék antennáját elérve a benne levő elektronokat a Lorentz-erőn keresztül rezgésbe hozza, és a rádió megfelelően hangolt rezgőkörét gerjeszti.

A villámok rádióhullámú tartományának értelmezésében tehát építhetünk az antenna sugárzásával való analógiára. Az antennák tulajdonságainak ismeretében egyszerű számítást is végezhetünk, de tudatosítanunk kell azt, hogy ez inkább csak illusztráció és nem a valóság modellje. A villámot hatalmas unipoláris antennának tekintve az antenna hossza a rezonanciamódban éppen a kisugárzott hullámhossz negyede. A 2–8 km magasságból lecsapó felhő-föld villám az egyszerű mo-

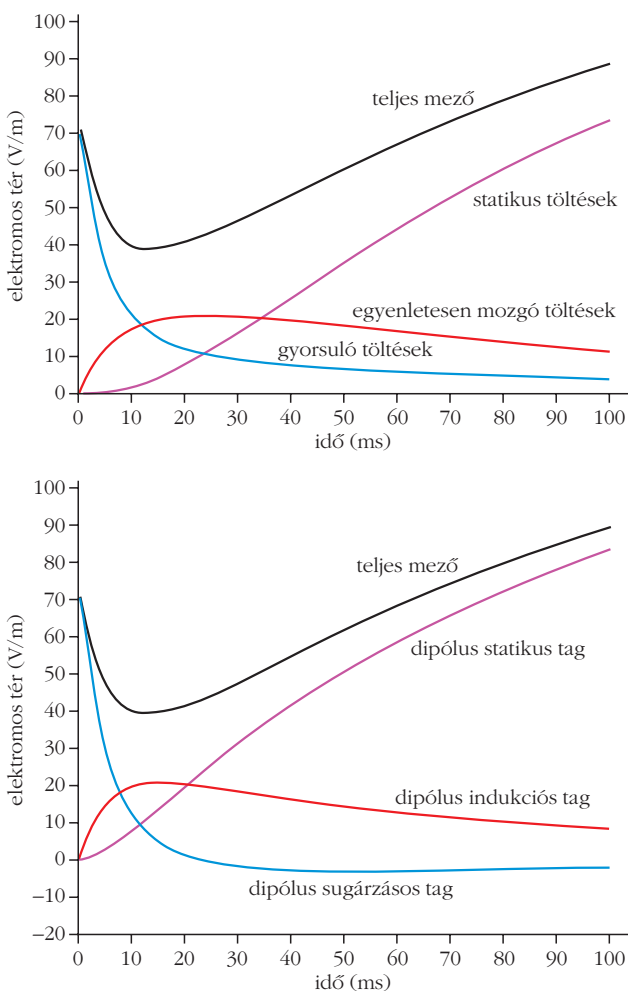
dell szerint az antenna 10–40 kHz közötti tartományban sugározna. A becslés a hosszuhullámú rádióhullám tartományba esik. Ilyen hullámokat a villámok valóban sugároznak, de a rádióhullámú tartomány maximális energiája a MHz nagyságrendű tartományba esik. A becslést elsősorban az teszi megkérdőjelezhetővé, hogy a villám nagy antennája nem a rajta futó periodikus jelek miatt kelti az elektromágneses hullámot, hanem a néhány gyors egymásutánban bekövetkező lökészerű töltésáramlás miatt. Emiatt az antenna, mint fizikai kép használható, de az antennára vonatkozó számítások közvetlenül csak kritikával alkalmazhatók.

A villámok elektromágneses terének *mérésére* a kutatók kétféle módszert alkalmaznak: az egyik esetben nagy időfelbontásban mérik az elektromágneses mezőt (az $\mathbf{E}(t)$ függőleges és vízszintes komponensét, valamint az indukált $\mathbf{B}(t)$ mágneses mező időbeli lefolyását), majd Fourier-transzformációt alkalmaznak a spektrum meghatározására. Ekkor a méréseket egyetlen villámesemény során végzik. A másik módszer alkalmazásával különböző frekvenciákra hangolt rádióve-

vőkkel az adott frekvenciákon mérik a villámlás spektrális amplitúdóját. Ez utóbbi eljárás hátránya azonban, hogy az így mért adatok az egész villámki-sülést (lépcsős vezető, visszacsapások stb.) jellemzik, az egyes villámesemények nem választhatók szét. A mérést követően ugyanúgy Fourier-sorfejtést alkalmaznak, mint az első esetben.

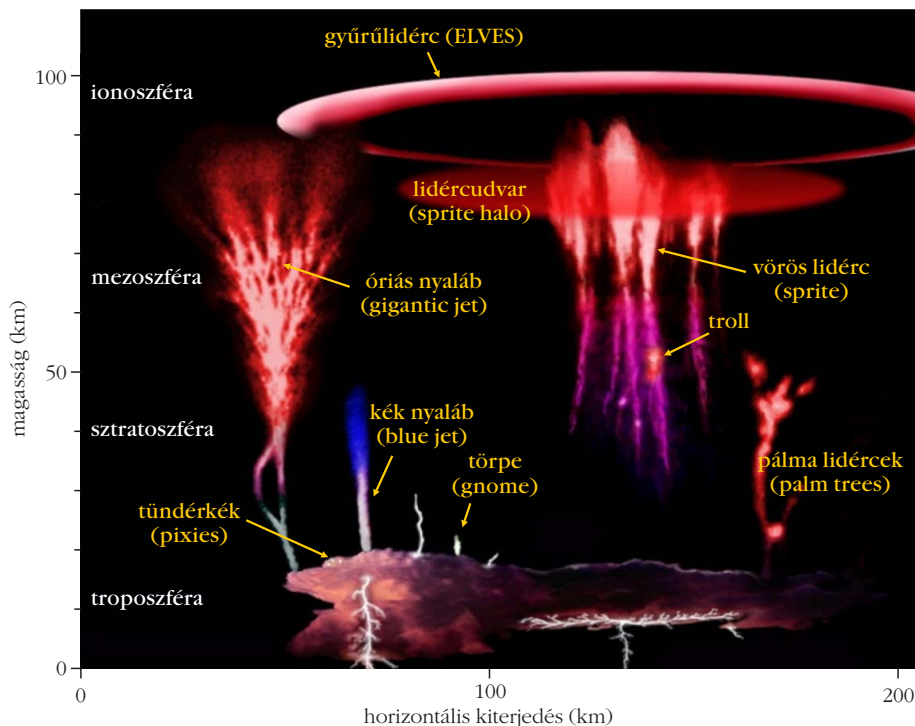
Az *elméleti modellekben* a kísérleti adatokhoz illesztett antenna áram-idő függvényekre alapozva, az elektrodinamika alaptörvényei alapján (Maxwell-egyenletek) határozzák meg az $\mathbf{E}(t)$ elektromos és a $\mathbf{B}(t)$ mágneses mezőt. A modellek többsége a visszacsapó villámhoz (return stroke) [1] illeszkedik, mert döntően az határozza meg a villám terét. A leggyakrabban alkalmazott modellek a gyorsuló töltéssel történő leírást, vagy az antennák elméletében használatos rövid dipólokkal való közelítést használják [3]. Az utóbbi esetben a villámcsatornát kis áramelemekre osztják fel, amelyek terét rövid dipólokkal írják le. A teljes villámcsatorna elektromágneses mezejének meghatározásakor az egyes áramelemek elektromágneses mezőit jellemző mennyiségeket összegzik a teljes csatorna hosszában. Mindkét modelltypussal jól leírható a villám elektromágneses mezeje, de az összetevő komponensek fizikai interpretációja csak a gyorsuló töltéses modell esetén illeszkedik a villám-ban lezajló folyamathoz. A 2. ábra grafikonjai mutatják, hogy az eredmények formálisan milyen tagokból tevődnek össze. Mindkét leírás matematikailag messze meghaladja a középiskolai szintet. Ráadásul a dipólközelítésből adódó tagok, bár összegük megadja a mért teret, fizikai jelentése nem egyértelmű.

2. ábra. Az elektromos mező időfüggése. A grafikonon az elektromos mező egyes komponenseinek és az eredő mezőt leíró függvény időbeli változását láthatjuk két különböző módszer alapján (föül: gyorsuló töltés mezőjét vizsgálva, alul: dipóltechnika alapján) a villámcsatornától 5 km távolságban, abban az esetben, ha a villámáram 12 kA, a visszacsapó áram sebessége $1,5 \cdot 10^8$ m/s.



A villám elektromágneses sugárzása az emberi szem számára látható tartományban

A villámlás olyan elektromos kisülés, amelyben az anyag plazmaállapotban található. A villámcsatorna környezetében tapasztalható rendkívül magas hőmérsékleten a levegő ionizálódik. Mivel a villámok színképe a teljes spektrumot tartalmazza, így színük fehér. Természetesen azonban láthatunk köztük ibolya-, bíbor- vagy ritkábban sárga-, illetve zöldes színűeket is. Az ionizáció során a levegő atomjai, molekulái gerjesztődnek, ennek megszűnésével pedig rájuk jellemző, karakterisztikus sugárzást bocsátanak ki. Ez határozza meg a villám látható színét. A levegőben előforduló nitrogén miatt kékes, míg az oxigénnek köszönhetően zöldes színűnek láthatjuk a villámokat. (Az utóbbi jelenség természetesen sokkal ritkábban tapasztalható.) A villámlás színét azonban számos más légköri tényező is befolyásolja: például a levegő nedvességtartalma, a levegőben található szennyező részecskék, illetve a villámcsatorna és a megfigyelő közötti távolság. Ha nagy mennyiségű vízgőz található a levegőben, akkor a villámlás színe vörösésbe hajlik. Ennek oka a víz hidrogénatomjai által kibocsátott erős, vörös fényben keresendő. A kékes színű villám nagy mennyiségű jégesőre utal, a villámok lila vagy lilás árnyala-



3. ábra. Felsőléggöri elektrooptikai emissziók (forrás: Barta V., Bór J., Sători G.: Felsőléggöri elektrooptikai emissziók és megfigyelésük Sopronból).

tú színeit is a magas léggöri páratartalom okozza. A meglehetősen ritkán előforduló sárga színt a levegőben lévő magas porkoncentráció okozza. A színek vizsgálata nemcsak a levegő összetételének tanulmányozására ad lehetőséget, hanem segítségével a villámszortna hőmérséklete is megállapítható.

A földi gamma-kitörések, a villámok legnagyobb energiájú elektromágneses sugárzásai

A földi gamma-felvillanások, vagy a tudományos világban elterjedtebb elnevezésük szerint a TGF-ek (terrestrial gamma-ray flashes) a villámok által keltett legnagyobb energiájú elektromágneses jelek. A kutatók szerint ezek akkor jönnek létre, amikor a zivatarok hatására generált erős elektromos térben a töltött részecskék felgyorsulnak és relativisztikus sebességgel mozgó gyors, úgynevezett „szökő” elektronokat hoznak létre. *Alekszandr Gurevics* orosz fizikus már a múlt század kilencvenes éveiben a villámok keletkezését is a kozmikus záporok gamma-sugárzása által keltett gyors elektronokkal értelmezte. Az azonban nem volt ismert, hogy maga a villámlás is kelt gamma-sugárzást, bár ezt *C. T. R. Wilson* már 1924-ben megjósolta. Wilson rájött arra, hogy a „szökő” elektronok a levegő atomjaival, molekuláival való ütközések során veszítenek energiájukból és további ionokat keltenek. Az ionizáció során gyors és lassú elektronok, valamint pozitronok is keletkeznek. Az elektronok és pozitronok reakciója gamma-sugárzást is kiválthat. A gamma-sugárzás mellett az elektronok hirtelen lefékeződése miatt röntgensugárzás is keletkezik. A folyamat rész-

leteiben még a mai napig sem teljesen ismert, de annyi egészen bizonyos hogy a keletkezett röntgen- és gamma-sugárzásért a szökő elektronok a felelősek. Ezeket a sugárzásokat először 1994-ben sikerült detektálni, a Föld körül keringő Compton Gamma Ray Observatory műholddal. Kezdetben pusztán elméleti úton végzett számítások alapján feltételezték, hogy a TGF-ek maximális energiája 10 MeV-ra tehető, de a későbbi mérések szerint bebizonyosodott, hogy a felvillanások energiája elérheti a 100 MeV-ot is. Napjainkban a kutatók a földfelszín közelében is megfigyeltek már 10 MeV energiájú felvillanásokat. Léteznek olyan tanulmányok is, amelyek azt igazolják, hogy ilyen röntgen- és gamma-sugárzást a villámok a lépcsős vezetési és a dárдавillám szakaszokban is gerjesztenek.

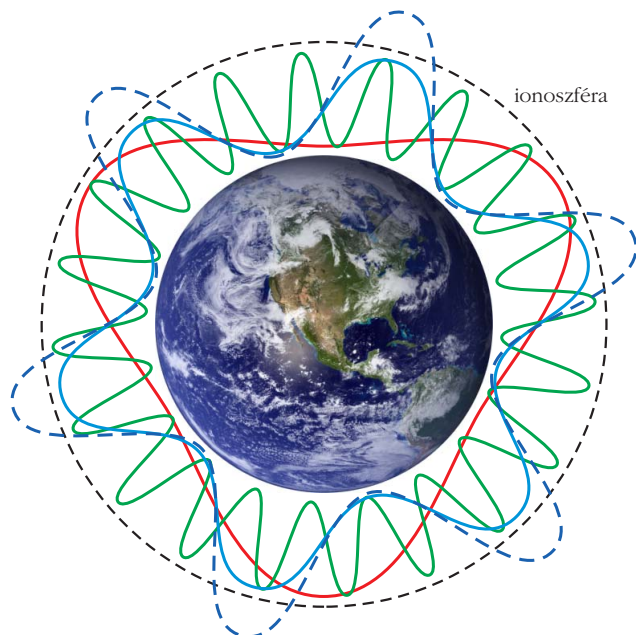
Mivel a keletkezett röntgen- és gamma-sugárzás földfelszín felé haladó részét a légkör elnyeli, a sugárzás tanulmányozásában jelentős előrelépést jelentett, amikor 2018 áprilisában pályára állították az ASIM (Atmosphere-Space Interactions Monitor) nevű űrállomást, amely mérőműszereinek segítségével lehetőség nyílt TGF-ek széleskörű vizsgálatára.

Zivatarok különleges kísérő hatásai

A napjainkban egyre gyakrabban kialakuló extrém időjárási eseményeknek köszönhetően az emberek figyelme érthetően elsősorban a villámok pusztító hatására irányul. Ennek ellenére azt gondoljuk, hogy ha akárcsak ismeretterjesztő jelleggel is, de érdemes pár szót ejtenünk a villámok hatására a felsőléggöri kialakuló elektrooptikai jelenségekről (3. ábra) és a Föld és az ionoszféra közötti hullámvezetőben létrejövő Schumann-rezonanciákról.

„Szellemeik, törpék”, és egyéb tünemények

A magyar tudományos szóhasználatban FEOE (Felsőléggöri ElektroOptikai Emissziók) néven ismertté vált jelenségekről a szemtanúk beszámolóinak alapján az első feljegyzés 1885-ben született [5]. Ezt követően többször észleltek hasonló jelenségeket, mivel kézzel fogható bizonyítékok (fotók vagy videók) nem álltak rendelkezésre velük kapcsolatban, ezért a tudományos világ nem mutatott nagy érdeklődést irántuk. Annak ellenére, hogy Wilson a zivatar-tevékenységek tanulmányozása során már 1925-ben következtetett jelen-



4. ábra. Vázlatos ábra a földfelszín és az ionoszféra közötti üregrezonátorban kialakuló Schumann-rezonanciákról (forrás: NASA/Simoes, https://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/news/lightning-waves.html).

létükre, az érdeklődés középpontjába csupán a második világháború után kerültek. Ekkor ugyanis a légi közlekedés megélénkülésével az utasok és pilóták egyaránt egyre gyakrabban számoltak be hasonló jelenségekről. Váratlan felvillanásuk és igen rövid élettartamuk miatt észlelésük nagy kiterjedésük ellenére korántsem egyszerű. Változatos formában, színekben pompáznak. Ez adott ihletet a kutatóknak a jelenségek elnevezésére is. Találhatunk közöttük olyanokat, amelyek neve az eredetükre vagy jellemző tulajdonságukra utal, mint például a vörös lidércek (sprites = Stratospheric/Mesospheric Perturbations Resulting from Intense Thunderstorm Electrification), gyűrűlidércek (elves = Emissions of Light and VLF perturbations from EMP events) és kéknyalábok¹ (blue jets), illetve olyanokat is, amelyek a képzelet szülöttei, mint például a manók (trolls), a törpék (dwarfs) és a szellemek (ghosts). Kialakulásuk eltérő módon magyarázható ugyan, de a villámtevékenységek után a felhőkben maradó töltéseknek, illetve a zivatarfelhők töltésmegosztó hatásának mindig meghatározó szerepe van.

A felsőlégi elektroomoptikai jelenségek témaköre messze túlmutat a középiskolai tananyagban. Tapasztalataink szerint azonban a téma újdonsága, érdekessége rendkívül motiváló hatású, emiatt elemi feldolgozását érdeklődő diákok esetén kiegészítő anyagként vagy szakköri foglalkozásra ajánljuk. Különböző internetes forrásokban számos lélegzetelállító videót találhatunk, lehetőségünk van lassítva is megnézni a felvételeket és gyönyörködni bennük. A témához kapcsolódóan e cikk egyik szerzője (L.I.) tananyagot

¹Lásd a címlapot, valamint a teljes villámot bemutató videót a <http://fizikaiszemle.hu/extra/keknyalab> webhelyen.

készített, amely az alábbi linken érhető el: http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/szakhallg/anyagok/legkor_elekto-optika.pdf

A „Föld szívverése”, a Schumann-rezonancia

A villámspektrumnak léteznek nagyon alacsony frekvenciás összetevői is. Ezek közül az ELF (Extreme Low Frequency, 3 Hz – 3000 Hz) tartományba esők kis csillapodással nagy távolságra jutnak el. E hullámok a jól vezető ionoszféra és a tökéletes vezetőnek tekinthető földfelszín közötti térrészben a Föld kerülete mentén haladnak körbe, önmagukkal interferálva olyan állóhullámokat (más néven elektromágneses rezonanciákat) hoznak létre, amelyekhez tartozó hullámhossz a Föld kerületének osztója (4. ábra). E rezonanciákhoz a Maxwell-egyenletekből a peremfeltételek figyelembevételével meghatározható frekvenciák tartoznak (körülbelül 8, 14, 20, 26 Hz stb.). Ezeket nevezzük Schumann-rezonancia (SR) frekvenciáknak. Ha az ionoszférát és a földfelszín tökéletes vezetőnek feltételezzük, akkor a SR-frekvenciák az alábbi összefüggésnek megfelelően alakulnak:

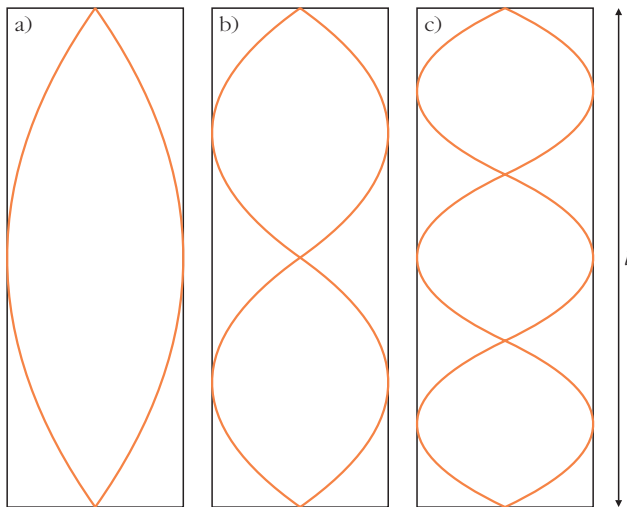
$$f = \frac{c}{2\pi R} \sqrt{n(n+1)},$$

ahol R a Föld sugara, c a fény terjedési sebessége vákuumban és n tetszőleges egész szám [6]. Valójában az ionoszféra nem tekinthető tökéletes vezetőnek, ezért a mért frekvenciák valamivel alacsonyabbak, mint amelyek az egyenletből kiszámíthatók.

A Föld légkörében a Föld különböző helyein másodpercenként 40-100 villámlás zajlik. Ezek jelentik a SR-ek gerjesztő forrásait. Adott időpillanatban mindegyikük létrehoz egy SR-mezőt, így az összetett mező szerkezete valójában nagyon bonyolult. Mivel az egyes villámeseményekhez tartozó frekvenciák minden villámlás esetén ugyanazok, a frekvenciákra hangolt vevőkkel ezek a frekvenciák különválaszthatók, így lehetőség nyílik a villámtevékenység feltérképezésére. A SR- tranziensek vizsgálatával a zivatarfelhők felett lejátszódó felsőlégi, igen rövid időtartamú, elektrooptikai emissziók (például vörös lidércek, gyűrűlidércek, óriás nyalábok) rejtelseinek megfejtéséhez is közelebb juthatunk [7–10]. A legalacsonyabb frekvenciaértékhez tartozó hullámhossz nagyjából megegyezik a Föld kerületével. Ezt a körülbelül 8 Hz-es frekvenciát a Föld természetes frekvenciájának tekintik és gyakran a „Föld szívverésének” is nevezik. Az elnevezés annak köszönhető, hogy ez a frekvencia a természetben gyakran fordul elő, például a legtöbb emlősállat agyfrekvenciájára is ez az érték jellemző.

E frekvenciákat pusztán elméleti úton 1952-ben *Winfried Otto Schumann* már megjósolta, majd 1960-ban kísérleti úton is kimutatták őket. Az ő tiszteletére nevezzük e rezonanciákat Schumann-rezonanciának.

A SR-ről a középiskolában akkor érdemes igazán beszélnünk, ha a mechanika témakörében korábban már megfigyeltük a rugalmas kötélben rögzített, illetve

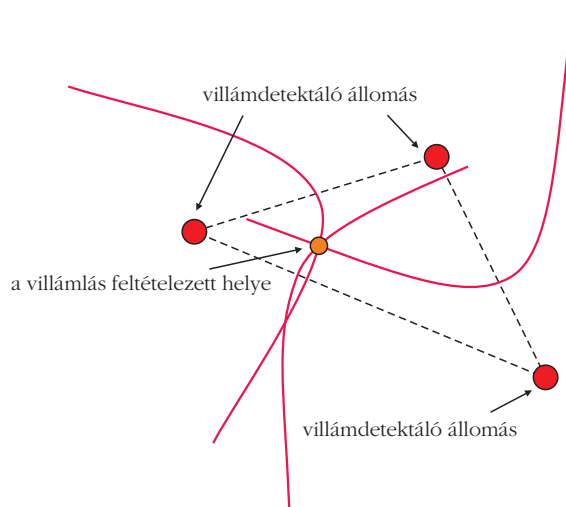


5. ábra. Mindkét végén zárt levegőoszlop rezonanciafrekvenciái. $f = nc/(2l)$, ahol n egész szám, c a hang terjedési sebessége levegőben, l a levegőoszlop hossza.

szabad végről visszaverődő hullámokat, a hullámok interferenciája révén kialakuló állóhullám-mintázatot, vagy a hanghullámok esetén különböző határfeltételek mellett a levegőoszlopok rezgéseit tanulmányoztuk (5. ábra). Az elektromágneses hullámok rezonanciájának tárgyalását kiválóan megalapozza, ha korábban már megismerkedtünk azzal is, hogy például adott hosszúságú, mindkét végén zárt levegőoszlop esetén hol keletkeznek csomópontok és duzzadóhelyek, hogyan határozhatók meg az egyes állóhullámokhoz tartozó rezonanciafrekvenciák. Ha ezek az ismeretek már a rendelkezésünkre állnak, akkor a részletes leírást megérthetjük, hogy a Föld felszíne és az ionoszféra közötti úgynevezett üregrezonátorban az elektromágneses hullámok is hasonló módon létre állóhullámokat.

A villámcsapás helyének meghatározása

A középiskolai fizikaoktatásban különös hangsúlyt fektetünk a fizika törvényeinek gyakorlati alkalmazásaira, korszerű technikai eszközeink működési elveinek alapszintű ismeretére. Így – amikor a tájékozódásban ma már nélkülözhetetlen GPS működésével ismerkedünk – megemlíthetjük a villámok lokalizációjának módszerét is. A lokalizációt a villámok elektromágneses sugárzása teszi lehetővé. A sugárzás különböző mérőeszközök segítségével detektálható és a villámlás helye ezáltal meghatározható. Erre többféle eljárás is alkalmazható. A legelterjedtebb közülük az irányméréses és a beérkezési-idő-különbség mérésén alapuló úgynevezett *TOA-módszer* (Time of Arrival). Az előbbi esetben az egy-egy antennapáron beérkező jelek fáziskülönbségét mérik. Ezt követően a villám pontos pozícióját háromszögeléssel határozzák meg. A TOA-eljárásnál azt használják ki, hogy a forrástól különböző távolságban elhelyezkedő állomásokra a jelek eltérő időben érkeznek. Ezt az időkülönbséget mérik, majd az időadatokat GPS segítségével szinkronizálják.



6. ábra. Villám helymeghatározása TOA (Time of Arrival) módszerrel (forrás: Mészáros R.: Meteorológiai műszerek és mérőrendszerek, regi.tankonyvtar.hu).

A villámlás helyétől r_1 , r_2 és r_3 távolságban lévő A , B , C pontokban található 3 állomás (vevő). Ezek egymástól való távolsága ismert, a 6. ábra jelöléseinek megfelelően d_1 , d_2 és d_3 . Az elektromágneses hullámok azonos tulajdonságú pontjai (például a csúcserkékek) az állomásokra t_1 , t_2 és t_3 időpontban érkeznek. Mivel a villámlás helyét nem ismerjük, ezért célunk az r_1 , r_2 és r_3 meghatározása. Felhasználva, hogy az elektromágneses hullámok terjedési sebessége c , a mért időkülönbségekre fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\frac{r_1}{c} - \frac{r_2}{c} = t_1 - t_2,$$

$$\frac{r_2}{c} - \frac{r_3}{c} = t_2 - t_3.$$

A $t_1 - t_3$ különbség felírására nincs szükség, hiszen az nem ad a felírtaktól független egyenletet. A két egyenlet mindegyike egy-egy hiperbolát határoz meg, amelyek metszéspontjában történt a villámlás. Ha a villámlás a 3 állomás által meghatározott háromszögön kívül jött létre, akkor a hiperbolák két pontban is metszhetik egymást, ezért nem tudnánk egyértelműen meghatározni a villámlás helyét. Ennek elkerülése céljából a mérést 4 állomáson végzik el és a három hiperbola metszéspontja jelöli ki a villámlás pozícióját (6. ábra).

A villámvédelem kérdésköre

Az új NAT-ban kiemelt fejlesztési feladatként jelenik meg a villámvédelem alapjainak elsajátíttatása, a tanulók felkészítése villámcsapás-veszélyes helyzetekben való helyes magatartásra. A téma feldolgozása során fontos hangsúlyoznunk, hogy a villámvédelemben alkalmazott különböző módszerek gyökerei régre nyúlnak vissza és egyszerű tapasztalati eljárásokon alapulnak. (Például a védőszöges módszert először *Benjamin Franklin* javasolta már a 18. század-

ban, a gördülő gömbös eljárás kidolgozása pedig *Horváth Tibor* (1927–2018), a BME (Budapesti Műszaki Egyetem) egyetemi tanárának nevéhez fűződik.) Empirikus ismereteink alapján születtek meg a különböző szabványok, amelyek a mai napig érvényesek és meghatározzák a villámvédelmi rendszerek kiépítésének módját.

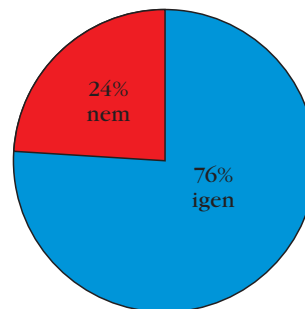
Amit a diákok tudnak a villámvédelemről

Megkérdeztünk 55, kilencedik, illetve tizedik osztályos középiskolai diákot, hogy mit értenek villámvédelmen. A tanulók többsége a lakóingatlanok, ingóságok és a középületek villámlás és annak hatásaival szembeni megóvását említette. A villámvédelem azonban ennél sokkal összetettebb kérdés. A teljeskörű villámvédelem az alábbi négy területet foglalja magába:

- a létesítmények és berendezések *védelme*,
- a *károk enyhítése*, amikor a villámvédelem nem működik tökéletesen,
- a villámok *előrejelzése*, az emberek cselekvésre való figyelmeztetése,
- *oktatás*, amelynek a megelőzés szempontjából van kiemelkedő szerepe. (Célja, hogy az emberek felismerjék a villámveszélyes helyzeteket és tisztában legyenek azzal, hogy adott szituációban mit kell tenniük a balesetek elkerülésére, a károk megelőzésére, illetve enyhítésére.)

A villámokkal kapcsolatban számos tévhit él a köz tudatban. (Tévhitnek vagy tévképzetnek nevezzük a tudományos elméletekkel össze nem egyeztethető, mélyen gyökerező, rendkívül stabil téveszméket.) Fizikatanításunk egyik kiemelkedő feladata a tévhitek felismerése és kiküszöbölése. Kíváncsiak voltunk arra, hogy ezek a közismert tévhitek mennyire élnek tanulóinkban, érdemes-e időt szánnunk e kérdésekre a tanórákon. Nézzük, mit is gondolnak róluk diákjaink! Összegyűjtöttünk egy csoportba osztoztuk. A tévhitek három csoportba osztoztuk. Az első csoportba tartozók a villámok tulajdonságaihoz, a másodikba soroltak a villámveszélyes helyzetekben való viselkedéshez, a harmadikba pedig a külső és belső villámvédelemhez kapcsolódnak. Terjedelmi korlátok miatt, a teljesség igénye nélkül, csupán szemléltetés céljából kiragadunk néhányat közülük. A kérdőívek kitöltésében 55 fő, 9–10. osztályos gimnáziumi tanuló vett részt, a két évfolyamról körülbelül azonos létszámban. Az adatok az általuk adott válaszokra vonatkoznak. A kérdések elsősorban feleletválasztós, illetve eldöntendő (igaz-hamis), néhány esetben rövid választ igénylők voltak. Úgy gondoljuk, hogy hasonló jellegű rövid felmérés elvégzése a témára való ráhangolódásként minden osztályban hasznos lehet, és mindössze pár percet vesz igénybe (természetesen a ráfordított idő függ a kérdések számától). A teszt akár Google Úrlapon, akár web 2.0 applikáción keresztül játékos formában (Quizizz) is feladható. Mindkét esetben tanárként azonnali visszajelzést kapunk az össze-

Helyes földre hasalni villámláskor?



7. ábra. A diákok válaszai.

sített eredményekről. Igény szerint akár egyéni, akár kérdések szerinti elemzés is elvégezhető. Ezek ismeretében mindenképp javasoljuk a kérdéssor megbeszélését, amit például a mi esetünkben a diákok izgatottan vártak.

No, de lássuk az eredményeket!

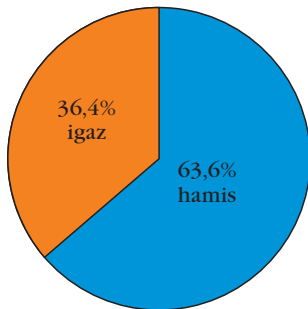
Kérdés. *Településtől távol eső, nagy kiterjedésű, sík területen ér bennünket a zivatar. Intenzíven villámlik. Ismerve a mondást, hogy a villám mindig a talajból kiemelkedő, legmagasabb pontba csap le, ezért a vihar elvonultáig a földre basalunk. Helyesen cselekedtünk-e?*

A válaszok megoszlását a 7. ábra mutatja. Amikor a villám a talajba csap, akkor a villámáram a lecsapási helytől kiindulva sugárszerűen terjed kifelé a földfelszínen, ahogy ezt a 8. ábrán megfigyelhető villámáramnyomok is mutatják. Ha a Föld felszínének két nagyon távoli pontját nézzük, akkor a talaj ellenállása a Föld rendkívül nagy keresztmetszete miatt elhanyagolható. (A vezető ellenállása a vezető keresztmetszétével fordítottan arányos.) A lecsapási hely környezetében a talaj potenciálja pontról pontra változik. A villám lecsapási pontjától számított távolsággal a potenciál értéke csökken, így a talaj két pontja között fellépő feszültség nő. (Ha két ilyen pont az ember lépéshosszána távolságában van, akkor az így kialakult feszültséget lépésfeszültségnek nevezzük.) Az

8. ábra. A villámáram nyomai egy golfpályán (forrás: weather.com).



A villám nem csap kétszer ugyanoda.



9. ábra. A diákok válasza.

egyenlő potenciálú helyek kijelölik az ekvipotenciális görbéket. Ha két különböző potenciálú pontot vezetővel kötünk össze (például, ha az ember vagy az állat két lába két ilyen különböző potenciálú helyen helyezkedik el), akkor a vezetőn keresztül megtörténik a potenciálok kiegyenlítődése. Ez okozhat áramütést, akár az élőlények halálához is vezethet, attól függően, hogy az áram útvonala érint-e létfontosságú szerveket például szívet. Ha elnyúlva fekszünk le a földre, akkor nagy a valószínűsége annak, hogy testünk két veszélyes potenciálú pontot köt össze. Mivel az emberi test nagyon jó vezető, ezért a villámáram a testünkön keresztül fog folyni, így veszélyt jelent ránk. Tehát szabad téren, viharban, ne hasaljunk a földre! Ha lépésfeszültség-veszélyes területre kerülünk, akkor kis lépésekkel vagy páros lábon ugrálva hagyjuk azt el, mivel a lépés hosszának növelésével a lépésfeszültség értéke is nő.

Kérdés. Szerinted igaz vagy hamis az alábbi állítás, hogy a villám nem csap kétszer ugyanoda?

A válaszok megoszlását a 9. ábra mutatja. Az állítás cáfolataként megemlíthetjük, hogy az Empire State Building épületébe például egyetlen zivatar alkalmával rövid időn belül 15-ször csapott villám. Ez csupán egyedi eset, ezért további magyarázatra van szükség. Ha adott helyen az eredeti villámcsapást létrehozó meteorológiai körülmények többször is megvalósulnak, akkor megállapítható, hogy nagy valószínűséggel csap le ugyanoda a villám. Mi határozza meg, hogy hova csap le a villám? A villám azt a tereptárgyat sújtja, amelyiket a villámcsúcs köré rajzolt körülbelül 30-50 m sugarú gömb legelőször érinti. E gömb sugarát a szakirodalom *lecsapási távolságnak* nevezi. (A lecsapási távolság a következő empirikus összefüggés alapján határozható meg: $R = 10 \cdot I^{0,65}$, ahol R a lecsapási távolság méterben és I a visszacsapás árama kiloamperben kifejezve.)

Építmények és elektromos eszközök villámvédelme

Ha villámvédelemről esik szó, akkor a legtöbben elsősorban a *külső villámvédelemre* gondolnak, amelynek elsődleges célja az épületek, tárgyak közvetlen villámcsapástól való megvédése. Ugyanakkor fontos

elektromos eszközeink megóvása is a villámok elektromágneses hatásától. Ezzel a területtel a *belső villámvédelem* foglalkozik.

Bevezetésképp tanulóinknak azt a feladatot adhatjuk, hogy figyeljék meg a környezetükben levő építményeken miként valósítják meg a villámvédelmet, erről készítsenek fotót. A fényképek tanórán történő elemzésekor a diákok maguk felismerhetik és beazonosíthatják a villámhárító főbb részeit, megbeszélhetjük, hogy mi az egyes részek szerepe a villámvédelemben. A tanórai közös munka hasznos kiindulópontja lehet az is, ha például diákjaink utánajárnak a villámvédelem hazánkban érvényes néhány törvényi szabályozásának; érdeklődnek szüleik, ismerőseik körében, hogy a lakóházuk milyen villámvédelmi rendszerrel ellátott.

Vegyük szemügyre először a külső villámvédelem kérdését!

A külső villámvédelem

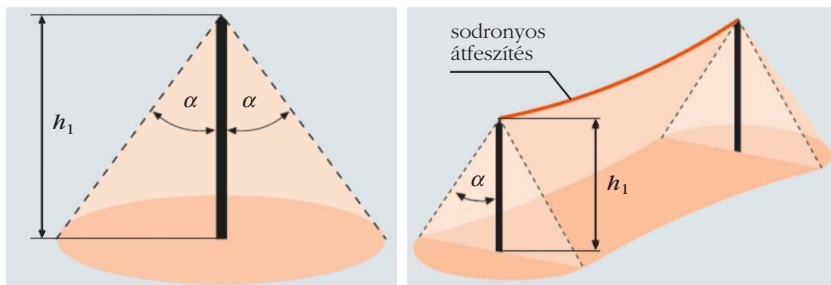
A megfelelő villámvédelmi rendszer kiépítése nagy körületekintést igényel. A villámfigyelő rendszerek adatgyűjtési eredményei alapján meg kell vizsgálni az adott területen lecsapó villámok sűrűségét, a védendő objektum magasságát és alapterületét, amely alapvetően meghatározza a gyűjtőterületet, továbbá a természetes és épített környezetet. Figyelembe kell venni olyan, a villámcsapás kockázatát növelő tényezőket is, mint például a domb- vagy hegytetőn, nedves területen vagy vízparton való elhelyezkedés. Közvetlen villámcsapás következtében számolnunk kell másodlagos tényezőkkel. Ebben a tekintetben kiemelendő szempont a tető, illetve a tetőszerkezeti elemek éghetősége, valamint, hogy milyen egyéb fémtárgyak és elektromos berendezések találhatóak a tetőn.

A szakemberek a villámparaméterek (a becsapási pontban az áramhullám csúcsértéke és lecsapáskor a kiegyenlítő töltés mennyisége, a kezdeti felfutó szakaszon fellépő árammeredekség, valamint a fajlagos energia) figyelembevételével négyféle villámvédelmi fokozatot határoztak meg. A legmagasabb a 98%-os védelességet nyújtó I. fokozat és a legalacsonyabb a 81%-os IV. fokozat. A szükséges villámvédelmi fokozatot MSZ EN 62305-2 valamint az OTSZ (Országos Tűzvédelmi Szabályzat) alapján állapították meg.

Mielőtt megvizsgálánk a villámvédelem egyik legegyszerűbb eszköze, a villámhárító működését, néhány kísérlettel célszerű bemutatni diákjainknak a csúcschátás és az árnyékolás jelenségét (Faraday-kalitka), valamint kitérni elemi magyarázatukra.

A villámhárító

A villámhárító funkcióját tekintve három részből áll: a villámokat felfogó, általában csúcsban végződő fém rúdból; a levezetőből, amely a töltéseket továbbítja a földelés felé; illetve a földelésből. A *felfogó csúcs* szerepe kettős. Egyrészt biztosítja, hogy a kisülés rajta



10. ábra. A kúp-, illetve sátoralakú védett terület védőszögös eljárás esetén (forrás: Villám-védelmi tervezési segédlet).

nagyobb épületeknél a *gördülő gömbös* módszert használják. Lapos tetejű épületek vagy vízszintes, illetve függőleges falfelületek védelme céljából a *védőhálós módszer* az elterjedt. Előfordulhat az is, hogy egyidejűleg többféle módszert alkalmaznak.

A *védőszögös* módszer esetén a villámvédelem fokozata és a felfogó elhelyezése együttesen határozza meg a védett térrészt (10. ábra).

keresztül valósuljon meg, így megvédi értékeinket. A főkisülés ugyanis ott jön létre, ahol a felhőből a föld felé tartó előkisülés találkozik a villámhárítóból kiinduló ellenkisüléssel. Fontos azt is megemlíteni, hogy a villám akkor csap a villámhárító csúcsába, ha ez az a pont, amely legelőször kerül a villámcsúcstól lecsapási távolságba. (Lecsapási távolságnak azt a távolságot nevezzük, amely esetén a villámcsúcs és a tereptárgy között a vezetési csatorna biztosan kialakul.)

A *levezető* feladata, hogy a töltéseket továbbítsa a földelés felé úgy, hogy közben maximális védelmet biztosítson az épület minden részének. Ezért, ha a tető vagy a ház fala gyúlékony anyagból készült, akkor a kiépítés során a tetőtől, illetve a faltól legalább 15 cm-es biztonsági távolságot hagynak. Magas épületek esetén 10-20 méterenként alakítják ki a levezetőket. A tűz elkerülése céljából a tetővel párhuzamosan futó levezető részeit gyűrű alakú vezetőkkel kapcsolják össze.

Végezetül a villámhárító harmadik szerkezeti egysége a *földelés*, amely a többlettöltést vezeti el a földbe, ahol szétoszlatja azt. A megfelelő földelés kritériuma, hogy nagy felületen érintkezzék a talajjal, ezzel megakadályozva a nagy villámáram-sűrűség és így az átütés lehetőségének kialakulását. A földelést a ház körül gyűrű alakban, a faltól legalább 1 m távolságban és 0,5 m mélyen helyezik el, mivel a földben elvezetésre kerülő töltések a talaj pontjai között potenciálkülönbséget hoznak létre, amely a lépésfeszültség (a talaj felszínén két körülbelül 70 cm távolságban levő pont közötti feszültség) kialakulásához vezethet, ami újabb veszélyforrást rejt magában. A nagyobb biztonság érdekében több, egymással párhuzamosan futó gyűrűrendszert építenek ki.

A villámhárító tervezése során három módszert alkalmaznak. Az egyszerűbb formájú, kisebb épületek esetén a *védőszögös*, míg a bonyolultabb szerkezetű,

Ha a felfogót függőlegesen rögzítik a tetőre, akkor a védett térrészt a védőszögnek megfelelő félnyílásszögű kúpfelület határolja. A tetőgerinccel párhuzamosan futó felfogó esetén pedig ezt a térrészt – az ábrának megfelelően – az úgynevezett „sátorlap” határozza meg. A védőszög meghatározására szabványosított, empirikus tapasztalatokon alapuló szabályokat alkalmaznak.

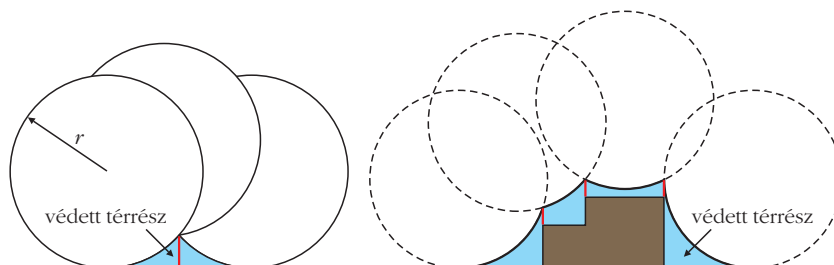
Több felfogó rúd esetén a védett térrész meghatározására a *gördülő gömbös* [11] eljárást alkalmazzák (11. ábra).

A módszer lényege, hogy a védendő objektumon vagy tárgyak együttesén képzeletben olyan gömböt gurítunk végig, amelynek sugara a lecsapási távolság. Ha a villám a gömb középpontjába érkezik, akkor ez a gömb jelöli ki azt a térrészt, ahova a villám lecsap, a rajta kívül eső részek védettek. A felfogó rudakat úgy kell elhelyezni, hogy megakadályozzák a gördülő gömböknek a védendő objektummal való érintkezését. A gördülő gömb sugarát nagyon sok tényező befolyásolja, így meghatározása nem egyszerű feladat. Általánosan megállapítható azonban, hogy minél kisebb a gördülő gömb sugara, annál kisebb a védett térrész. A legkisebb védettségi szint a 60 méteres lecsapási távolsághoz, a 60 méteres gördülőgömb sugarhoz tartozik. Ez egyben azt is jelenti, hogy a 60 m-nél magasabb épületek oldalát is meg kell óvni a villámcsapásokkal szemben. Erre, valamint a lapostetős épületek villámcsapás elleni védelmére használják a *védőhálós* eljárást. A módszer fizikai hátterében a korábban már említett Faraday-kalitka effektus áll. Természetesen a védendő objektum fémfelülettel való tökéletes körülzárása a gyakorlatban kivitelezhetetlen. Tudjuk, hogy a villámvédelem során tökéletes biztonság nem érhető el, csak az esetleges károk mértéke csökkenthető, ezért az elv módosított változatát, a fémhálóval történő befedést alkalmazzák. A hálót – a felfogóhoz hasonlóan – a levezetőhöz kell csatlakoztatni. A háló méretét a villámvédelmi fokozat határozza meg.

A belső villámvédelem

Ha a villámhárítóba vagy szabad vezetékbe közvetlenül csap be a villám, akkor a fogyasztói hálózatban rövid ideig tartó feszültségnövekedés figyelhető meg. Ennek követ-

11. ábra. Villámvédelem tervezése gördülő gömb módszerrel.



keztében a hálózatban a névleges feszültség sokszorosra is mérhető. Ezt nevezzük túlfeszültségnek, amely a fogyasztók és az elektromos szigetelések sérülését, károsodását okozhatja. A készülékek meghibásodása, a kiesett üzemidő komoly anyagi károkkal jár. A közvetlen villámkisülések okozta túlfeszültségeken kívül számolnunk kell azzal is, hogy a villámkisülések által létrehozott erős mágneses tér hatására az épületen belüli erősáramú vezetékben feszültség indukálódik, amely a fent említettekhez hasonló problémákhoz vezethet. (Például a villámot megközelítően egyenes vezetőnek tekintve, a tőle 10 m távolságban levő, a villámcsatornával párhuzamos síkú, 1 m² területű, négyzet alakú hurokban 2 kV feszültség indukálódik, ha a visszacsapó villám áramának csúcsértékváltozása 100 kA/ms.) Ezért a túlfeszültség ellen is védekeznünk kell. Attól függően, hogy milyen típusú villámcsapás elleni védelemre szeretnénk felkészülni, különböző túlfeszültség-levezetőt kell alkalmaznunk. A túlfeszültségek elleni hatékony villámvédelem megvalósítására kidolgozták a zónakoncepciót, amelyet az MSZ EN 62305-4 szabályoz. Lényege, hogy az épület elektromos hálózatát zónákra osztják, az egyes zónahatárokon túlfeszültség-levezetők segítségével egyenlítik ki a potenciált egészen addig, amíg el nem érik a már veszélytelen értéket.

Összegzés

A villámok fizikatananyagba történő integrálása felkelti a tanulók érdeklődését és javítja a fizika iránti attitűdjüket. A természeti jelenségek mögöttes fizikai tartalmának felfedezése és megértése közelebb visz bennünket a körülöttünk levő világ megismeréséhez. A villámok érdemi tárgyalása azonban a téma komplexitása, a leírásához szükséges bonyolult matematikai apparátus miatt középiskolai szinten nehéz. Arról sem

szabad megfeleledkeznünk, hogy a villámokról rendelkezésre álló tudományos ismeretanyag jelenleg is alakul. Ezen változásokat tanárként folyamatosan nyomon kell követnünk ahhoz, hogy diákjaink számára hiteles információkat közvetíthessünk. Cikkünkben rámutattunk arra, hogy a villámok jelenségek köre nem tárgyalható csupán az elektrosztatika keretein belül, szükségesnek találjuk a fizikatananyag más fejezeteibe való beemelését is. A villámvédelem kérdéseinek tárgyalása mindennapokban alkalmazható gyakorlati ismereteket ad a diákoknak, és lehetőséget nyújt számos, a témával kapcsolatos tévhit eloszlatására.

Irodalom

1. Takátsné Lucz I., Tasnádi P.: Villámok az új Nemzeti alaptanterv tükrében. *Fizikai Szemle* 71/3 (2021) 102–109; <http://fiztan.phd.elte.hu/kozkinccs/magypub/pub/kiserletek/villamok.pdf>
2. A. V. Gurevich: Simultaneous observation of lightning emission in different wave ranges of electromagnetic spectrum in Tien Shan mountains. *Atmospheric Research* (2017)
3. V. Cooray, G. Cooray: A Novel Interpretation of the Electromagnetic Fields of Lightning Return Strokes. *Atmosphere* 10 (2019) 22; doi:10.3390/atmos10010022, <https://www.mdpi.com/journal/atmosphere> (27. 08. 2021)
4. T. D. Walker: *A 21st century investigation of the lightning spectrum*. Dissertation, 2015.
5. C. J. Rodger: Red sprites, upward lightning and VLF perturbations. *Reviews of Geophysics* (1999/aug.) 317–336.
6. V. Cooray: *An introduction to lightning*. Springer, 2015.
7. Sători G.: *Schumann-rezonancia mint globális változások jelzőrendszere* (Doktori értekezés) MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet, 2011.
8. Sători, G.: A Schumann-rezonanciák, mint a globális változások jelzőrendszere. *Magyar Tudomány* 12 (2009) 9.
9. Bór J.: *Villámkisülésekhez társuló felsőléghőri elektro-optikai emissziók és Schumann-rezonancia tranziensek vizsgálata*. (Doktori értekezés), 2010.
10. Bozóki T.: *A Schumann-rezonancia mint kutatott jelenség és mint kutatási eszköz*. 2017; https://edit.elte.hu/xmlui/bitstream/handle/10831/34846/Ingenia_Hungarica_III_Bozoki_Tamas_p_95-107.pdf (2021. 08. 27.)
11. Horváth Tibor: *Villámvédelem*, Magyar Elektronikai Egyesület, 1997.

HÍREK – ESEMÉNYEK

KITÜNTETÉSEK MÁRCIUS 15-E ALKALMÁBÓL

Magyar Érdemrend középkeresztje polgári tagozata

Tél Tamás Széchenyi-díjas fizikus, a fizikatudomány doktora, az Eötvös Loránd Tudományegyetem professzor emeritusa és Fizika Doktori Iskolájának korábbi vezetője, az MTA–ELTE Elméleti Fizikai, illetve Fizika Tanítása Kutatócsoportjainak volt vezetője a magyarországi káoszelméleti kutatásokban betöltött vezető szerepe, valamint a fizikatanítás oktatásának megújítása érdekében végzett kiemelkedő szakmai és vezetői tevékenysége elismeréseként részesült a díjban.

Magyar Érdemrend tisztikeresztje polgári tagozata

Czoboly Ernő, a műszaki tudomány doktora, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépezetmérnöki Kara Anyagtudomány és Technológia Tanszékének címzetes egyetemi tanára a törésmechanika szakterületének magyarországi meghonosításában betöltött kiemelkedő szerepe, valamint a fémek fáradásának és törésének nemzetközi szinten is elismert kutatójaként, illetve a Czoboly–Radon-módszer kidolgozójaként elért eredményei elismeréseként;

Petrik Péter, az MTA doktora, az Eötvös Loránd Kutatási Hálózat Energiatudományi Kutatóközpont Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézetének osztályvezetője, tudományos tanácsadója a hazai anyagtudomány területén, különösen a mikroelektronikai technológiák analizálásában és alkalmazásában elért, nemzetközileg is kimagasló eredményei és sikeres tudomány-szervezői-oktatói tevékenysége elismeréseként;

Vida József fizikatanár, az Eszterházy Károly Katolikus Egyetem professzor emeritusa, a Kémiai és Fizikai Intézet Fizika Tanszékének nyugalmazott főiskolai tanára, a Varázstorony Természettudományi Pályaorientációs és Módszertani Központ volt igazgatója a fizika-tanítás fejlesztése, a fizika népszerűsítése iránt több évtizede elkötelezetten végzett tudományos és oktatómunkája, és az egyetem Fizika Tanszékének újraindítását segítő tevékenysége elismeréseként vehette át a díjat.

Magyar Érdemrend lovagkeresztje polgári tagozata

Almási Gábor fizikus, a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karának dékánhelyettese, a Fizikai Intézet igazgatója, egyetemi docense az egyetem fizikus- és fizikatanár-képzésének fejlesztése érdekében végzett tevékenysége, az alkalmazható tudás átadását szolgáló több évtizedes szakmai munkája elismeréseként;

Seres István, a Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetem Matematika és Természettudományi Alapok Intézete Fizika Tanszékének vezetője, egyetemi docense a fizikatudomány területén több mint három évtizede folytatott kutatói-oktatói munkája, valamint értékteljesítő tehetséggondozó és tudománynépszerűsítő tevékenysége elismeréseként;

Szabó István fizikus, a Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Karának egyetemi docense négy évtizede példaadóan végzett kutatói, oktatói és vezetői munkája, valamint az anyagtudományi, fizikusi, villamosmérnöki és mérnökinformatikus képzés meghonosításában vállalt szerepe elismeréseként részesült a kitüntetésben.

Magyar Arany Érdemkereszt polgári tagozata

Kovács Attila Pál fizikus, a Szegei Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kara Fizikai Intézetének vezetőhelyettese és a Fizikai Intézet Optikai és Kvantumelektronikai Tanszékének adjunktusa sokrétű kutatói-oktatói tevékenysége, különösen az optikai elemek diszperziós jellemzőinek minél pontosabb mérésére alkalmas módszerek kifejlesztése terén elért kiemelkedő, nemzetközi szinten is figyelemre méltó eredményei elismeréseként vehette át a díjat.

KÖZÉPISKOLÁSOK SIKEREI AZ ICYS2022 KONFERENCIÁN

Magyar diákok ismét szépen szerepeltek, a 2022. április 7. és 11. között a belgrádi szervezéssel megtartott 28. International Conference of Young Scientists (Ifjú Kutatók Nemzetközi Konferenciája) tanulmányi versenyen, amelyre – a pandémia miatt – újból *online* szervezésben került sor. A matematikából, fizikából, informatikából, környezet- és élettudományokból meghirdetett, angol nyelven folyó versenyen, 7 szekcióban 15 országból 95 középiskolás diák előadásában 79 prezentáció hangzott el, és a tanulók ugyanennyi posztert mutattak be, ezekből válogattunk négyet. Az internetes platformon megtartott prezentációkon csak a diákok és szekciónként egy 5 tagú zsűri volt jelen. Az élőben zajló megnyitó és a díjkiosztó záró ünnepségre, valamint a poszterek bemutatójára a versenyre regisztrált minden résztvevő, a diákok és tanárok egyaránt bekapcsolódhattak.

A magyar csapatot ezúttal 6 diák alkotta, akik szereplésükkel *6 díjat* szereztek. A tanulók a pályamunkával az iskolájukban, illetve különböző kutatóhelyeken készültek. A februárban megtartott hazai, szintén online konferencia után, a diákok prezentációi, azok kivonatai, és a poszterek az ELTE Anyagfizikai Tanszékén a felkészítő tanárok – *Rajkovits Zsuzsanna* ny. egyetemi docens, ELTE Anyagfizikai Tanszék, az ICYS SC tiszteletbeli elnöke és *Kirchkeszner Csaba*, PhD hallgató, ELTE Kémiai Intézet, a nemzetközi zsűri tag-

ja, korábbi versenyző – segítségével, többszörös *online foglalkozás* keretében öltöttek olyan formát, amellyel diákjaink a nemzetközi versenyen sikeresen szerepelhettek.

A fizika szekcióban *Gombási Róbert Krisztián*, a Tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója bronzérmes, *Simon Tamás* (Budapesti Német Iskola, 12. osztály) ezüstérmes hozhatott haza. A csapat tagja volt még *Kalocsai Zoltán* (Szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium, 12. osztály) és *Szederkényi Kincső* (Budapesti Német Iskola, 9. osztály).

Környezettudomány szekcióban *Kovács Emília* (Kisvárdai Bessenyei György Gimnázium és Kollégium, 12. osztály) ezüstérmes gazdagodott.

Élettudomány szekcióban *Révész István* (Kisvárdai Bessenyei György Gimnázium és Kollégium, 12. osztály) bronzérmes érdemelt ki.

A diákok a poszterek bemutatóján is versenyeztek, a rendezők a kitüntetett „best poster” megjelöléssel minden szekcióban díjakat osztottak ki (a 95 versenyzőből csak 29 kapta meg). A magyar diákok közül Révész Istvánt és Kovács Emíliát tüntették ki e díjjal.

Ezúton mondunk köszönetet a támogatásért, amelylyel az Emberi Erőforrások Minisztériuma folyamatosan lehetővé teszi részvételünket ezen a versenyen.

Rajkovits Zsuzsanna



ICYS 2022



Deutsche Schule Budapest
Német Iskola

Synchronized Candles

Tamás Simon

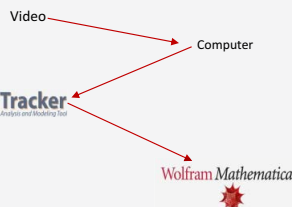
Deutsche Schule Budapest, Hungary

Introduction

Oscillatory flames can be observed when several candles burn next to each other. Two such oscillators can **couple** with each other, resulting in **in-phase or anti-phase synchronization** (depending on the **distance** between the sets of candles). What are the possible causes of this phenomenon, and how does the coupling exactly happen? One could use the theoretical solution of this phenomenon in real-world systems, such as in boilers with burners



Methods



Experiment proving radiation-coupling



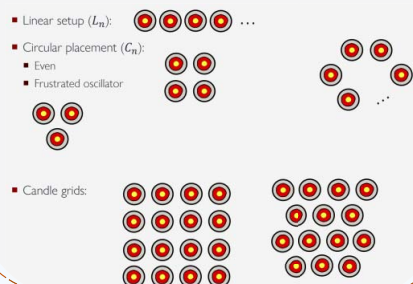
Aims of my research

Basic theory

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{dt} &\sim n_{O_2} \\ -\frac{dn_{O_2}}{dt} &\sim T \end{aligned} \right\} \frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2 T$$

- ✓ Explanation of single-flame oscillation
- ✓ Coupling proved with measurements → built into theory
- ✓ Wrote a set of differential equations as a theory (solved with computer in a non-dimensional form)

Possible arrangements



References

- [1] Calvert, J. G., Glossary of atmospheric chemistry terms (Recommendations 1990). Pure and Applied Chemistry vol. 62, p. 2175, <https://doi.org/10.1351/pac199062112167> (1990)
- [2] Kihahata, H. et al., Oscillation and Synchronization in the Combustion of Candles. The Journal of Physical Chemistry vol. A113, PMID: 19606893, p. 8164-8168, eprint: <https://doi.org/10.1021/jp901487c> <https://doi.org/10.1021/jp901487c> (2009)

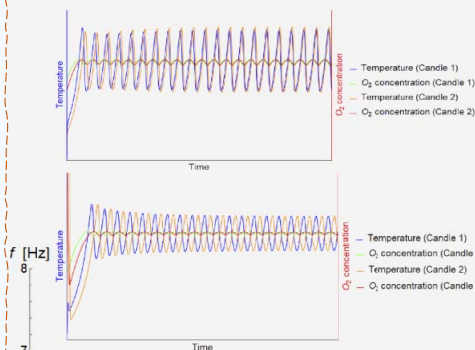
Results

Advanced model for coupled candles

$$C \cdot \frac{dT_i}{dt} = \omega_1 \left(h(T_0 - T_i) + \beta a n_{O_2,i} e^{-\frac{E}{RT_i}} \right) + \sigma \left(\frac{\mu}{L_{ij}^2} T_j^4 - T_i^4 \right)$$

$$\frac{dn_{O_2,i}}{dt} = \omega_2 \left(k(n_0 - n_{O_2,i}) - a n_{O_2,i} e^{-\frac{E}{RT_i}} \right)$$

Typical solutions

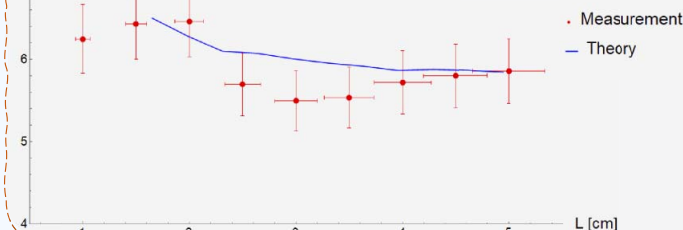


Investigated parameters

- T : Temperature
- n_{O_2} : O_2 concentration
- L : distance between candles

Main parameters

- C : Specific heat constant
- R : Universal gas constant
- E : Activation energy
- h : Heat flow by convection
- k : Supply rate of oxygen by convection
- a : Supply rate of the fuel
- β : Heat production by combustion per unit volume of paraffin
- ω_1, ω_2 : 1/time-dimensional constants

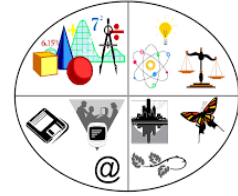




Boycott Effect

Róbert Krisztián Gombási

Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Hungary
E-mail: gombasirobert831@gmail.com



Introduction

If particles are suspended in a liquid that has a lower density than the particles, the particles will settle to the bottom of the container. The rate of settling can be affected by tilting the container that holds the liquid. I was looking at the issue of sedimentation, how to describe the phenomenon and how it can be used in real life practice.

The Theory of the Boycott Effect

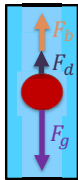


Fig. 1. The Forces accelerate the particles.

If enough time has passed the particles stop accelerating. After that, the particles will settle a constant speed compared to the liquid. This speed is the terminal velocity and is calculatable by the equation in Fig. 2.

$$v_t = \frac{2r^2 g (\rho_p - \rho_l)}{9\eta}$$

Fig. 2. Determination of the terminal velocity (v_t), where r is the diameter of the particles, g is the gravitational acceleration, $(\rho_p - \rho_l)$ is the density difference between the particles and the fluid and η is the kinematical viscosity of the liquid.

The suspension line is a boundary between the articulated liquid and the cleared fluid. The movement of the suspension line is following the equation in Fig. 3. and Fig. 4.

$$\frac{dh}{dt} = -v_t \left(1 + \frac{h}{D} \sin(\alpha) \right)$$

$$h = \frac{(D + h_0 \sin(\alpha)) e^{-\frac{v_t \sin(\alpha) t}{D}} - D}{\sin(\alpha)}$$

Fig. 3. and 4. Determination of the movement of suspension line, where v_t is the terminal velocity, h is the actual length of the suspension line, D is the diameter of the settler and α is the angle of deflection from the vertical axis. The equation is based on an article [1]

$$T = \frac{D \ln(2)}{v_t \sin(\alpha)}$$

Fig. 5. Determination of the suspension Half-life, where v_t is the terminal velocity, D is the diameter of the settler and α is the angle of deflection from the vertical axis

Experiments

Experimental setup

The experimental setup (Fig. 6.) is made up of three parts:



The movement system creating the phenomena a)

The Recording system to film the phenomena b)

The tilting of the setup c)

The tilted tube d)

Fig. 6. The measurement setup: a.) b.) and c.) the measurement process: c.) and d.)

The Experimental Process

The measurement process is simple, first I set the angle of the deflection by tilting the whole movement system (Fig. 6.) c). After that, I run the program that rotates the tube by exactly 180 degrees, so the particles will be on the top of the settler (Fig. 6.) d).

Results and Discussion

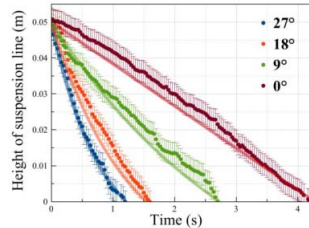


Fig. 7. The movement of the suspension line with different angle of deflection

In Fig. 7. we can easily see that the calculated curves and measured data have a tight connection. In Fig. 8. and 9. we can see the simplicity of the comparison by the suspension half-life, while we cannot see easily how the parameters change the sedimentation time because they have not had proportional or inverse proportional with the required time.

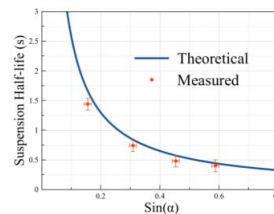


Fig. 8. The suspension Half-life is inverse proportional with the sin of the angle of the deflection

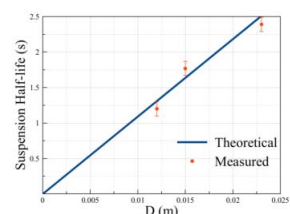


Fig. 9. The suspension Half-life is proportional with the diameter of the settler

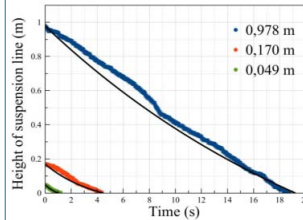


Fig. 10. The suspension line with different initial settle height.

The definition of the suspension half-life is working only when the two compared tube have the same length, while not every experiment have that details, so the aim is to compare them as well.

The best way to compare them is to use the basic equation of the movement of the suspension line, so we can compare them too with an original equation (Fig. 10.)

Conclusion

The experimental data are in good agreement with the theoretical one, but the theory has limits, such as non-colloids and the maximum value of the angle of deflection is 30 degrees. Considering the complexity of the phenomenon, the theory gives a good approximation of the expected settling time depending on the initial conditions. The phenomenon can be applied in practice for optimization in specific areas.

Acknowledgement

I would like to acknowledge the support of my mentor Dr. Ákos Szeidemann, to my secondary school for the technical support and all those people and institution who helped my work.

Reference

[1] Efstathios E. Michaelides, Zu-Jia Xu (2005). ResearchGate, A Numerical Simulation of the Boycott Effect. DOI:10.1080/00986440590477971

Fermentation of alfalfa brown juice and its environmental friendly reusing



Emília Kovács

Kisvárdai Besenyei György High School, Kisvárd, Hungary

Supervisors: *Gábor Koncz, Ph.D., Nóra Bákonyi, Ph.D.*

1. Introduction

- The human population is constantly growing

Protein deficiency

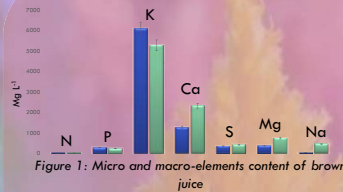
- **Alfalfa** is an excellent alternative protein source
- Protein isolation results a harmful **by-product**



Alfalfa (*Medicago sativa*)



2. Problem



Treated like sewage

Eutrophication

3. Goals

- Meet the requirements of **circular economy**
- **Fermentation** of alfalfa brown juice
- Environmental friendly **reusing** as biofertilizer



4. Methods

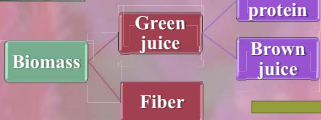


Figure 2: Protein coagulation

- **Lactic acid bacteria** strains
- Green house experiment

Foliar application

0,5%; 1%; 2,5%; 5%; 10%

5. Results

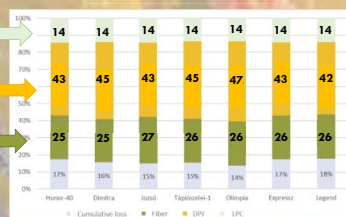


Figure 3: fraction ratio of different species

6. Conclusion

After the **successful preservation** of brown juice, its effect was examined for the growth of **Celosia argentea**. Different parameters were measured and we can conclude that the **1% and 2.5%** were the most effective, thus BJ can be **reused in an environmental friendly way** as a plant stimulant.

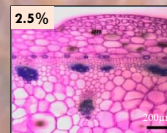
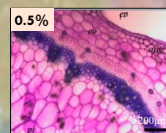


Figure 4: Effect of brown juice for *Celosia argentea*





Identification of stress granule modifying compounds in cancer cell lines by high-content screening (HCS) microscopy

István Révész

Bessenyei György Secondary Grammar School, Kisvárd, Hungary



Introduction

Stress granules (SG) are membrane-free cytoplasmic organelles arising in cells exposed to stress. They are condensates of proteins and RNA. SGs regulate translation, mRNA storage, the antiviral response and signaling pathways, through which SGs promote stress adaptation. Cancer cells take advantage of SG formation to evade programmed cell death, to metastasize and to acquire resistance to chemotherapy. Although SGs are potential drug targets in cancer, there are no specific SG inhibitors. Their development requires the identification of starting compounds. To fulfill this objective, we are planning to set up a high-throughput chemical compound screen (HTS). The identified molecules can, potentially, have future applications in cancer therapy or provide molecular targets for the design of such agents (Asadi et al., 2021).

Research methodology

Labeling of stress granules: We acquired the cDNA of the RNA-binding protein, G3BP1, an essential component of SGs, labeled with the enhanced green fluorescent protein (EGFP) by gene fusion (Figure 1a).

Cell model generation: U2OS and HeLa cell lines were transfected with the plasmid by lipofection. Cells having integrated the fusion gene construct stability were selected using geneticin (Figure 1b).

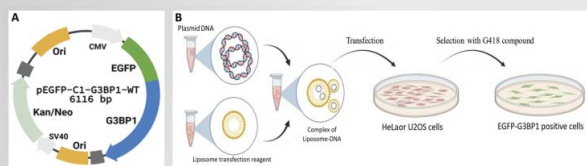


Figure 1 – Map of the EGFP-G3BP1 plasmid and outline of the lipofection and selection

Drug screen: The cells were plated into glass-bottom 96-well cell culture plates. Prior to the screening, they were labeled with CellTracker Blue reagent to aid in finding cell boundaries. Compounds from the Screen-Well® FDA Approved Drug Library-V2 were dispensed into the wells with the help of a pipetting robot at $10 \mu\text{mol}/\text{dm}^3$. After 1 hour of pre-incubation, cellular stress was triggered with sodium arsenite for another hour. The cells were fixed with paraformaldehyde and images were acquired with an Opera Phenix HCS microscope (Figures 2).

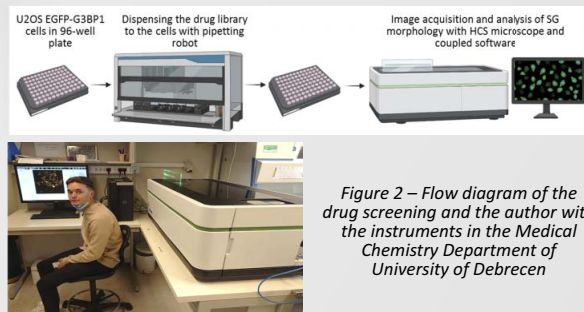


Figure 2 – Flow diagram of the drug screening and the author with the instruments in the Medical Chemistry Department of University of Debrecen

References

Asadi, M.R., Rahmanpour, D., Moslehian, M.S., Sabaie, H., Hassani, M., Ghafouri-Fard, S., Taheri, M., & Rezazadeh, M. (2021). Front Cell Dev Biol. 9:745394. doi: 10.3389/fcell.2021.745394.

Image analysis: Perkin Elmer's Harmony software was used to analyze the images. Cell boundaries were identified based on the CellTracker Blue staining and SGs as high-intensity EGFP positive speckles.

Results and Discussion

The expression of the EGFP-G3BP1 fusion protein was verified by fluorescent microscopy. The fusion protein responded to stress triggered with $0.5 \mu\text{mol}/\text{dm}^3$ sodium arsenite and accumulated in SGs (Figure 3).

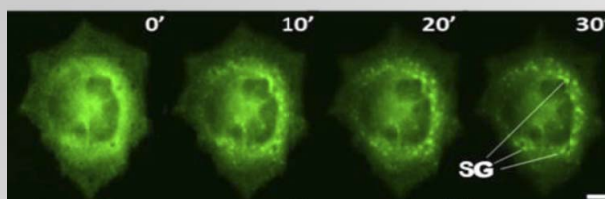


Figure 3 – Rapid relocation of EGFP-G3BP1 into SGs upon stress (0-30 min). Scale bar: $10 \mu\text{m}$

In this research work, a processing pipeline was created to segment the images into areas corresponding to cells and to identify the EGFP-labelled SGs (Figure 4).

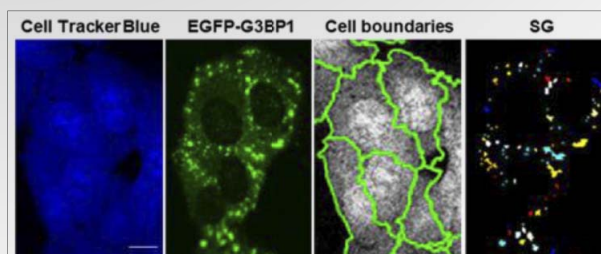


Figure 4 – Identification of the cells and the SGs in the microscopy images by the software. Scale bar: $10 \mu\text{m}$

Conclusion

A stably transfected cancer cell model was generated to study SGs by microscopy and an image analysis pipeline was set up to identify SGs in images. The model system can be used to screen for compounds preventing SG formation or altering SG morphology.

Future work

Images of cells treated with $\sim 1/10$ of the compounds in the library have already been collected. The image analysis is underway and will be completed soon. Afterward, the rest of the compounds will be tested. Finally, selected compounds with an inhibitory effect on SG formation will be studied individually to determine their effect on cell viability, survival and stress tolerance.

Magyar Fizikus Vándorgyűlés 2022



2022. augusztus 21–24.

Pannon Egyetem, Veszprém

Jelentkezési határidő: 2022. július 10.

**A Fizikai Szemle szerkesztőbizottsága
kéri az előadókat és a
posztumokat bemutatókat, hogy
eredményeiket osszák meg
a folyóirat olvasóival is!**

Részletek a

**<http://elft.hu/magyar-fizikus-vandorgyules-2022>
honlapon**