

fizikai szemle

A RENORMCSOPORT FÉL ÉVSZÁZADA

2D anyagok modellezése

Tanóra az energetikáról

2023/5

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Megbízott főszerkesztő:

Iglói Ferenc

Szerkesztőbizottság:

Asbóth János, Biró László Péter, Czitrovszky Aladár, Gyürky György, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Kiss Ádám, Kopasz Katalin, Neda Zoltán, Ormos Pál, Pálfalvi László, Rábóczki Bence, Simon Ferenc, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Takács Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Műszaki szerkesztő:

Kármán Tamás

A folyóirat e-mailcíme:

szerkesztok@fizikaiszemle.hu

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>



A címlapon:

A molibdén-diszulfid (MoS_2) felületén terjedő elektron-hullámcsomag számolt megtalálási valószínűsűrsűrűsége.

Az anozotrop terjedést a vegyértéksáv szimmetriatulajdonságai okozzák, forrás: Márk Géza (lásd Vancsó Péter cikkét).

TARTALOM

- Polónyi János: Mi a renormcsoport? 145
- Polónyi János: Kis paraméterek és a nagy egyesítés 146
A renormáláscsoport-módszer különböző felbukkanása egy-egy kis paraméterre vezethető vissza, amely kis paraméterek a Természet rendkívül összetettségét leíró, nebezen kezelhető és átlátható egyenletek egyszerűsítéséhez, illetve jelentésük megértéséhez segítenek. Az eredmény egy, a fizikán átívelő egység ígérete.
- Nagy Sándor: Gravitáció és renormálás 152
Az általános relativitáselmélet nagy energiákon nem képes a gravitáció leírására, és egy új, kvantumgravitációs modell jelenik meg. E modell renormáláscsoport-módszerrel történő vizsgálatánál a Planck-skálából kiindulva, az evolúciót követve eljutunk a klasszikus esetben érvényes általános relativitáselmélethez.
- Fejős Gergely: A királis szimmetria helyreállása az erős kölcsönhatásban 157
renormáláscsoport-módszerrel
Az erős kölcsönhatásban fellépő királis szimmetria tárgyalása a wilsoni renormáláscsoport-módszer nemperturbatív (funkcionális) általánosítása segítségével.
- Kovács Tamás György: Kvantumtérelmélet rácson 163
A kvantumtérelméletek rácson történő megfogalmazása precíz matematikai definíciót eredményez és batékony numerikus számolási módszert is szolgáltat.
- Jubász Róbert: Rendezetlen rendszerek renormálása 168
Valós rendszerek mindig tartalmaznak valamennyi rendezetlenséget, amelyek kritikus viselkedésének leírása sikeresen elvégezhető valós téren definiált renormáláscsoport-módszerrel.

REFLEKTORFÉNYBEN

- Vancsó Péter: A 2022. évi Gyulai Zoltán-díj: kétdimenziós anyagok modellezése 173
A díjazott eddigi szakmai pályáját és a közeljövő terveit ismerteti.

A FIZIKA TANÍTÁSA

- Gärtner István: Egy energetikához kapcsolódó tanóra a középiskolai fizikatanítás lezárásához – A nukleáris energia pozitív bemutatása 178
Az energetika – ezen belül a nukleáris energiával kapcsolatos ismeretek – a tanulók többségét érdekli. Az írás hozzájárul az energiatermeléssel kapcsolatos kérdések helyes értelmezéséhez.

KÖNYVESPOLC

- Bokor Nándor: Petr Beckmann: A pi története 180
Egy „szubjektív tudománytörténeti mű” ismertetése.

J. Polónyi: What is the renormgroup?

J. Polónyi: Small parameters and grand unification

S. Nagy: Gravity and renormalization

G. Fejős: Restoration of chiral symmetry in the strong interaction using the renormalization group method

T. Gy. Kovács: Quantum field theory on a lattice

R. Jubász: Renormalization of disordered systems

IN THE SPOTLIGHT

P. Vancsó: The 2022 Zoltán Gyulai Prize: the modeling of two-dimensional materials

TEACHING PHYSICS

I. Gärtner: An energy-related lesson to conclude secondary school physics – A positive presentation of nuclear energy

BOOKS

N. Bokor: Petr Beckmann: A history of pi



MI A RENORMCSOPORT?

Rövid lappangási idő után jó fél évszázada robbant be a fizikába a renormcsoport módszere [1]. Ahol csak megjelent váratlan vagy csak megsejtett összefüggésekre világított rá és új gondolatmeneteket indított el. Kezdetben a kvantumtérelméletben nagy energián fellépő divergenciák kiküszöbölésének problémáját oldotta meg, majd az elektron töltése és tömege megfigyelési skálafüggésére hívta fel a figyelmet. Ezután a kritikus jelenségek rejtélyes világának rendszerezése következett, majd a statisztikus fizika és a kvantumtérelméletek közös nyelvét alakította ki. Az utóbbi évtizedekben az erősen csatolt kvantumtérelméletek megoldásában játszott kulcsszerepet.

Nem csak a sokrészecske rendszerekben bizonyult hasznosnak a renormcsoport, a bifurkáció és a kaotikus viselkedés átmenetének leírásában [2] is átfogó képet nyújtott. Az alkalmazások köre azóta is bővül, és kiterjedt például a parciális differenciálegyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedésére [3], továbbá a szekuláris és divergens perturbációk kiküszöbölésére [4]. Az utóbbi időben a komplex hálózatmodellek tulajdonságainak feltérképezésében [5] bizonyult hasznosnak, sőt még a komplexitás átfogóbb leírásához is hozzásegített [6]. Az alkalmazások köre a fizikán is túllép, a valószínűségi számítás módszere természetes továbbfejlesztésének bizonyult [7], az adatfeldolgozás statisztikus [8] és a strukturális (Deep Learning) [9] módszereiben új szempontokat vetett fel. Még a természettudomány határain túl is hasznosnak bizonyult a renormcsoport, mint például a kulturális fejlődés őstörténelme [10], a jelenkori történelemben a népszavazás működése [11] és a tömegpszichológia mechanizmusa [12] leírásában. A módszer alapítója, *Kenneth Wilson* élete végén az oktatás problémájára összpontosította figyelmét, abban ismerve fel a történelem „releváns operátorát”.

Honnan ered a renormcsoport módszerének ilyen széles alkalmazási köre? Egy összetett rendszer megértését szinte reflexszerűen úgy kezdjük el, hogy először gondolatban alkotóelemeire bontjuk, majd az elemek szabályszerűségei ismeretében megpróbáljuk újra összerakni az egészet. A renormcsoport célja ezen eljárás módszeres végrehajtása.

A következő írások a renormcsoport hazai fejlesztésébe és alkalmazásaiba nyújtanak betekintést. *Nagy Sándor* a kvantumgravitáció renormalizálásának legújabb fejleményéről számol be. Itt a téridő folytonossága a tét, hogy megfogalmazható-e a gravitáció kvantumelmélete anélkül, hogy a téridőben diszkrét struktúrát vezetnénk be. *Fejős Gergely* egy, a királis anomália és a kvarkfelszabadítás által gazdaggá tett dinamikai folyamatot, a királis szimmetriasértést tárgyalja. Az itt fellépő fázisátmenet rendjének meghatározása a renormcsoport újszerű alkalmazásán alapul. *Kovács Tamás György* a kvantum-színdinamika közelítő numerikus megoldásáról tudósít, amelyet a renormcsoport segítségével lehet elegánsan megfogalmazni. Ugyancsak a renormcsoport teszi lehetővé annak követését, ahogy a rövid távolságon gyengén kölcsönható kvark-gluon szabadságfokok felépítik az erősen kölcsönható hadronokat. A fizikai rendszerek leírását döntően leegyszerűsíti a translációinvariancia, amelynek elvesztése és az abból fakadó relaxációs folyamatok lelassulása megoldhatatlannak tűnő problémákhoz vezet. Ezt a kérdéskört célozza *Juhász Róbert* az erősen rendezetlen rendszerekben előforduló fázisátmenetekkel foglalkozó írásával. A renormcsoport fogalmi keretét *Polónyi János* módszertani összefoglalója járja körül.

Polónyi János

Strasbourg Egyetem, Strasbourg, Franciaország

Irodalom

1. K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* 55 (1983) 583.
2. B. Hu, *Phys. Rep.* 91 (1982) 233.
3. N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono: *Asymptotics beyond All Orders*. (H. Segur et al. szerk.) Plenum Press, New York, 1991.
4. L. Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, *Phys. Rev. E* 54 (1996) 376.
5. S. Boettcher, C. T. Brunson, *Frontiers in Physiology* 2 (2011) 102; M. E. J. Newman, D. J. Watts, *Phys. Lett. A* 263 (1999) 341.
6. L. Guo, Y. Q. Chen, S. Shi, B. J. West, *Fract. Calc. and Appl. Anal.* 24 (2021) 5.
7. G. Jona-Lasinio, *Phys. Rep.* 352 (2001) 439.
8. S. Rajam, Y. Taguchi, Y. Oono, *Physica D* 205 (2005) 207.
9. P. Mehta, D. J. Schwab, arXiv:1410.3831.
10. G. Fáth, M. Sárváry, *Phys. A* 348 (2005) 611.
11. S. Galam, *J. of Stat. Phys.* 61 (1990) 943; F. Caruso, P. Castorina, *Int. J. Mod. Phys. C* 16 (2005) 1473.
12. C. K. Kim, K. Lee, M. Chung, *Chinese Sc. Bull.* 57 (2012) 247.

KIS PARAMÉTEREK ÉS A NAGY EGYESÍTÉS

Polónyi János
Strasbourg Egyetem, Strasbourg, Franciaország

Gondolatmenet

A renormcsoport kialakulását két szempont alapján fogjuk követni a legáltalánosabb alkalmazási területén, a kvantumtérelméletben. A módszer különböző felbukkanása egy-egy kis paraméterre vezethető vissza. A kis paraméterek a Természet rendkívül összetettségét leíró, nehezen kezelhető és átlátható egyenletek egyszerűsítéséhez, illetve jelentésük megértéséhez segítenek. Az eredmény – mint látni fogjuk – egy, a fizikán átívelő egység ígérete, amely egy paradoxonnak tűnő állításon alapul, miszerint a fizikai megfigyelések eredménye függ a megfigyelést jellemző skálaparaméterektől, azaz nincsenek fizikai állandók és fix törvények. Itt a skálaparaméter dimenzionális mennyiséget jelöl, amelynek nincs abszolút numerikus értéke és nagysága csupán más, azonos dimenziójú mennyiségekhez képest értelmezhető. A renormcsoport alkalmazása hűen követte a kvantumtérelmélet fejlődését, és az uralkodó szemléletmód alakulását az 1. táblázat foglalja össze.

Multiplikatív renormcsoport

A renormcsoport először a kvantumtérelméletekben merült fel. A perturbációs számítás magasabb rendjeiben a közbelső állapotok teljes rendszerére összegzünk, ahol a tetszőlegesen nagy impulzusú állapotok járuléka ultraibolya, UV-divergenciákhoz vezet, amelyek kiküszöbölése azon a megfontoláson alapul, hogy a kölcsönható elméletet definiáló Lagrange-függvény α_{cs} csupasz paraméterei, úgymint tömeg és csatolási állandók, csupán numerikus paraméterek és nem fizikai mennyiségek. Ez abból az triviális megfigyelésből következik, hogy a fizikai mennyiségek perturbációs számítással felírt alakjai valóban α_{cs} rendkívül komplikált függvényei.

Regularizálás

Megváltoztatjuk a dinamikát oly módon, hogy a részecskék járulékait csak egy általunk bevezetett, és Λ -val jelölt, UV energialevágási skála alatt vesszük figyelembe. A levágást hosszúságegységekben kifejezve felfoghatjuk, mint egy $\ell = \hbar c/\Lambda$ minimális távolságot, amely elméletünk térbeli felbontóképességét jellemzi. Ennek eredményeképpen az elméletből származtatott $F(\alpha_{cs}, \Lambda)$ fizikai mennyiségek nem csak az elmélet csupasz paraméterei, hanem a levágás függvényeivé is válnak. A levágás szerepének megértéséhez gondoljunk a matematika és a fizika közötti alapvető különbségre, hogy a ma-

| kvantumtérelmélet | renormcsoport | időszak |
|-------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| renormalizált elméletek | multiplikatív rcs. | 1954–1970. |
| csupasz elméletek | blokkolás funkcionális rcs. | 1971–1984. 1984–2006. |
| nyitott elméletek | kvantum rcs. | 2006– |

tematika bármely ellentmondásmentes axiómarendszerrel foglalkozik, míg a fizika számára ezek közül csak a Természetben megtalálhatók a fontosak. Továbbá a fizika alapegyenleteit csak egy véges, jól behatárolható skálaintervallumban ismerjük, jelenleg nagyjából a proton átmérőjének egy százalékától az Univerzum átmérőjének 96%-ig bezárólag. Ha az így megismert egyenletek extrapolációja zérus távolságig matematikailag jól definiált, akkor esély van arra, hogy az egyenletek kisebb távolságokon is érvényben maradnak. Az persze másik kérdés, hogy – szerintem – a fizika utolsó évszázadának láttán naivitás hinni, hogy a jelenleg ismert fizikai törvények közül tetszőleges nagy energián bármelyik is alkalmazható marad. Amennyiben az extrapoláció matematikailag elfogadhatatlan végtelenhez vezet, akkor biztosak lehetünk, hogy elméletünket nem használhatjuk tetszőlegesen rövid távolságon. A levágás a mi bizonytalanságunkat jellemzi, ezen az energiaskálán túl elméletünket nem akarjuk érvényben tartani. A semleges pion bomlása két fotonra azt jelzi, hogy a kvantum-elektrodinamikában és persze a részecskefizika standard modelljében is nagy, de véges UV-levágás szerepel.

Renormalizálás

Mihez kezdünk az ismereteink határát jellemző Λ -paraméterrel? Mivel sem numerikus értéke, sem pedig a levágás környékén bevezetett elnyomás részletei nem



Polónyi János 1978-ban fizikus diplomát, majd 1979-ben PhD fokozatot kapott az ELTE-n. Ezután a KFKI-ban kezdett dolgozni, majd a darmstadti GSI-ben és a University of Illinois-n volt post. doc. Ezt követően az MIT-n, később az ELTE-n és végül Strasbourgban egyetemi tanár. Érdeklődési területe a kvantummechanika, a kvantumtérelmélet és a renormalizációs csoport.

egyértelműek, nem engedhetjük meg, hogy ezek a tényezők befolyásolják az elmélet fizikai tartalmát. Ezt pedig úgy próbáljuk elérni, hogy az elméletet definiáló csupasz paramétereknek olyan Λ -függést vezetünk be, ami pont kiejti a perturbációs számításban megjelenő Λ -függést. Mivel csak meghatározott számú $\alpha_{cs,n}$ ($n = 1, \dots, N$) csupasz paraméterünk van, amelyek Λ -függését mi szabhatjuk meg végtelenül sok fizikai mennyiséggel szemben, ez az eljárás általában nem lehet sikeres. Legfeljebb azt remélhetjük, hogy azok a fizikai mennyiségek váljanak Λ -függetlenné, amelyek jellemző \bar{E} energiaskálája kellően messze van a levágástól. Ezt pedig úgy érzük el, hogy megköveteljük a

$$P_n = F_n(\alpha_{cs}, \Lambda), \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

renormalizációs feltételt, amelyben a bal és a jobb oldalon különböző, alkalmasan megválasztott fizikai mennyiségek mért értéke, illetve annak a perturbációs számítás adott közelítésében kiszámított kifejezése áll. Ezen a ponton jelenik meg az első kis \bar{E}/Λ paraméterünk, amely ezen egyszerűsödés feltétele.

Renormalizált elmélet

Tegyük fel, hogy az (1) egyenletrendszer megoldható a csupasz paraméterekre. Azt az elméletet, amelyben ez tetszőlegesen nagy Λ -ra is megtehető és az így megalkotott $\alpha_{cs}(\Lambda)$ csupasz paraméterekkel definiált elmélet a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetben már nem tartalmaz UV-divergenciát, renormalizálhatónak hívjuk. A perturbációs számítás keretein belül belátható, hogy a renormalizálható elméletek minden véges skálához tartozó fizikai kifejezése konvergál a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetben és ez a definíció független a renormalizációs feltételek megválasztásától. A 3+1 dimenziós világunkban eddig csupán a nemabeli mértékelméletek, azaz a kvantumszíndinamika és a elektromágneses elmélet SU(2) mértékbozonjai valósítanak meg perturbatív renormalizálható kölcsönhatást, a kvantumgravitáció esete még nyitott, mert a renormalizálás nem perturbatív.

Az ismert kvantumrendszerek perturbatív sorának konvergenciasugara zérus, ezek a sorok csak aszimptotikusan konvergálnak, maximális pontosságukat $1/g_{cs}$ körüli rendben érik el, ahol a g_{cs} csatolási állandó a perturbatív kifejtés kis paramétere. A csupasz paraméterek viszont a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetben divergálnak, így a levágást nem választhatjuk tetszőlegesen nagyra. Ezzel a problémával egy messze vezető út indul további kis paraméterek keresésére.

Renormalizált perturbációs sor

Alkossunk meg egy-egy mérési eljárást az elmélet paraméterei számára, amelynek eredményei a paraméterek α_n fizikailag jól értelmezett, renormalizált értékét definiálják. Például egy részecske tömegét definiálhat-

juk energiája segítségével a nyugalmi rendszerében és a csatolási állandókat pedig alkalmasan megválasztott részecske-ütközés szórásamplitúdója alapján. Az eljárás nem egyértelmű, és csupán ésszerű, intuitív definíciót várunk el ezen a ponton. Ezután használjuk az ily módon definiált fizikai paraméterértékeket, mint renormalizációs feltételt a $P_n = \alpha_n$ megválasztásával (1)-ben. Belátható, hogy a csupasz paraméterekben felírt perturbációs sor átrendezhető oly módon, hogy az eredeti sorban megjelenő Λ -függő divergenciákat a csupasz paraméterek Λ -függése kiejti és az így már a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetben konvergáló kifejezés felfogható úgy, mint egy, a renormalizált csatolási állandókban felírt hatványsor. Az elmélet paraméterei újradefiniálásának lehetőségét E. C. Stueckelberg és A. Petermann vették észre [1], és e lehetőség módszeres felhasználása a divergenciák eltávolítására N. N. Bogoljubov és D. V. Shirkov úttörő munkájának eredménye [2].

A perturbációs sor ilyen átrendezése és a renormalizált csatolási állandó, mint kis paraméter használata problematikus annak ismeretében, hogy a konvergenciasugár zérus, és egy további zavaró tényező, hogy nincsen olyan véges elmélet, amelynek perturbatív sora ez lenne. Más szóval a renormalizált perturbációs számításal kezelt elméleteket lehetetlen nem perturbatív szintre kiterjeszteni. A perturbációs számítás csak a csupasz elméletek szintjén lehet túllépni.

Multiplikatív renormcsoport

A renormalizáció segítségével megalkothatjuk a renormalizált trajektóriát a csupasz paraméterek terében. Ez egy adott renormalizációs feltétellel meghatározott, különböző levágáshoz tartozó csupasz paraméterek görbéje, amelynek pontjai Λ segítségével parametrizálhatók. A görbe $d\alpha_{cs}/d\Lambda$ érintővektora kielégíti az $F_n(d\alpha_{cs}/d\Lambda, \Lambda) = 0$ ($n = 1, \dots, N$) egyenletrendszert. A részletes analízis alapján a levágásfüggetlenség a kvantumtér-operátor

$$\phi(x) \rightarrow \sqrt{Z(s)} \phi(x)$$

multiplikatív transzformációját is igényli, innen származik e renormcsoportmódszer neve.

Ez az eljárás megismételhető a renormalizált paraméterek terében is. Tegyük fel, hogy a renormalizált paraméterek definiálására alkalmazott mérési eljárás egy közös \bar{E} energiaskálára alapul és írjuk a renormalizációs feltétel megoldását a $\alpha_{cs} = a(\alpha, \bar{E}, \Lambda)$ alakban. A renormalizált trajektória a rögzített α_{cs} mellett az \bar{E} változtatásával kirajzolódó görbe, az

$$0 = \frac{\partial a_n(\alpha, \bar{E}, \Lambda)}{\partial \bar{E}} + \sum_{k=1}^N \frac{d\alpha_k}{d\bar{E}} \frac{\partial a_n(\alpha, \bar{E}, \Lambda)}{\partial \alpha_k} \quad (2)$$

egyenlettel definiált $d\alpha_k/d\bar{E}$ érintővektorok integrálgörbéje. Az elmélet paraméterterében megalkotott

trajektóriák mentén a $\Lambda \rightarrow s\Lambda$, illetve az $\bar{E} \rightarrow s\bar{E}$ skálátranszformációk egy transzformációs csoportot, a renormcsoportot valósítanak meg. A renormalizált paraméterek trajektóriáját *M. Gell-Mann* és *F. Low* vezette be a kvantum-elektrodinamikában [3].

Fizikai állandók

Hogyan interpretálandók a renormalizált trajektória által bevezetett futó csatolási állandók? A csupasz paraméterek terében olyan egydimenziós regularizált elméletsereget határoz meg, amelynek renormalizációs feltétele egy adott P_n integrációs állandókhöz tartozik, és csupán a térbeli felbontóképesség különböző. A renormalizált paraméterek terében megvalósított trajektória a fizikai paraméterek skálafüggését fejezi ki. A csupasz és a renormalizált paraméterek trajektóriája pedig megegyezik a perturbációs számítás vezető rendjében. Rögtön látszik egy eléggé meglepő állítás: a renormalizált elméletet a paraméterterben a renormalizált trajektória rögzíti, ily módon az N paraméter tartalmazó renormalizálható elméletnek valójában csak $N-1$ szabadon választható paramétere van.

A renormalizált paraméterek trajektóriája a fizikai mennyiségek és törvények alapvető tulajdonságára hívja fel a figyelmet, nevezetesen arra, hogy a mérések eredményei függenek a megfigyelés skálaparamétereitől. Ezek után természetesnek adódik az is, hogy a mérési eredményeknek megfelelő fizikai törvények is skálafüggők.

Blokkolás

A szabadságfokok fokozatos kiküszöbölése vagy a dinamikába iktatása a renormcsoport alapötlete. Ez a statisztikus fizikában is felbukkant a kritikus rendszerek vizsgálata folyamán. Ezt az elképzelést és a kvantumtérelmélettel való egybeolvadását tekintjük át ebben a fejezetben.

Kritikus jelenségek

A fázisátmenetek, a makroszkopikus átlagok szinguláris függése a mikroszkopikus paraméterektől több szempontból is kivételesen érdekes és meglepő jelenségek. Már létezésük is meglepő, hiszen a fizika alapvető egyenletei nem mutatnak szingularitást – mondjuk a mozgási energiában, ami kritikus hőmérséklethez vezethető az ekvipartíciós tétel alapján. További kihívást jelentenek a kritikus jelenségek, olyan, általában másodrendű fázisátalakulások, ahol a korrelációs hossz divergál, mint például a kritikus opalescencia, a ferromágnesesség. A probléma itt többszintűvé válik: egyrészt addig példa nélküli egyszerű összefüggések jelentek meg a kritikus pont körül, mint a termodinamikai változók divergenciáinak hatványfüggvényjellege, a

kitevők univerzalitása, azaz a kémiai összetételtől való nagymértékű függetlensége, és a különböző univerzalitási osztályokban fennálló egyszerű kapcsolataik. Másrészt ezek megértéséhez az addigi elméleti módszerek nem elegendők, mert a nagy korrelációs hossz miatt egy szabadságfok túl sok másikkal hat kölcsön, és ezt a perturbációs számítással nem lehet követni.

B. Widom észrevette, hogy a kritikus exponensek megjelenése és egyes, közöttük fennálló összefüggések érthetővé válnak, amennyiben feltételezzük, hogy az állapotegyenlet szinguláris része a termodinamikai változók homogén függvénye [4]. De miért jelenik meg ez az egyszerű függvényalak éppen a lehető legkomplikáltabb fizikai körülmények között?

Blokkolás

A legmeggyőzőbb választ *L. Kadanoff* adta az Ising-modell keretén belül [5], ahol *L. Onsager* egzakt megoldása alapján [6] már ismeretes volt, hogy mi történik, csak éppen érteni nem lehetett. Írjuk az Ising-modell állapotösszegét a

$$Z = \sum_{\{s_j = \pm 1\}} e^{-H[s_j]} \quad (3)$$

alakba, ahol j a spinrács indexét jelöli, az összegzés a spinkonfigurációkra terjed ki és az $1/k_B T$ faktort beolvastottuk $H[s_j]$ -ba. Csoportosítsuk az eredeti változókat blokkokba, amelyeket a j' indexszel azonosítunk, és vezessük be valamely ésszerű módon a blokkot jellemző $s'_j = F_j[s]$ spint, például a többségi szabály alapján

$$s'_j = F_j[s] = \text{sign}\left(\sum_{j \in j'} s_j\right).$$

A triviális

$$1 = \sum_{\{s'_j = \pm 1\}} \prod_{j'} \delta_{s'_j, F_j[s]} \quad (4)$$

azonosságot a (3) egyenletbe beillesztve és a két összegzés sorrendjét megcserélve az állapotösszeg átirtható a blokkspinekre történő összegzés formájában, ahol a blokk Hamilton-függvényt az

$$e^{-H'[s'_j]} = \sum_{\{s_j = \pm 1\}} \prod_{j'} \delta_{s'_j, F_j[s]} e^{-H[s_j]} \quad (5)$$

egyenlettel definiáljuk. Ez az egyenlet írja le a Hamilton-függvény transzformációját a blokkolás során. A Hamilton-függvényt egy teljes operátorrendszer tagjainak összegeként elképzelve ebből az egyenletből kinyerhetők a Hamilton-függvény g_n dimenziótlan paramétereinek transzformálódási szabálya, amit a $g'_n = B_n(s, g)$ alakban írunk fel. A rácsállandó, a modell minimális távolságskálája, az UV-levágás szerepét játssza és a g csupasz paraméterek a rácsállandó

skáláján fellépő dinamikát jellemzik. Tehát a blokkolással az (a, sa) skálatartományban fellépő dinamikai folyamatok járulékéval változtatjuk meg a csupasz paraméterek értékét.

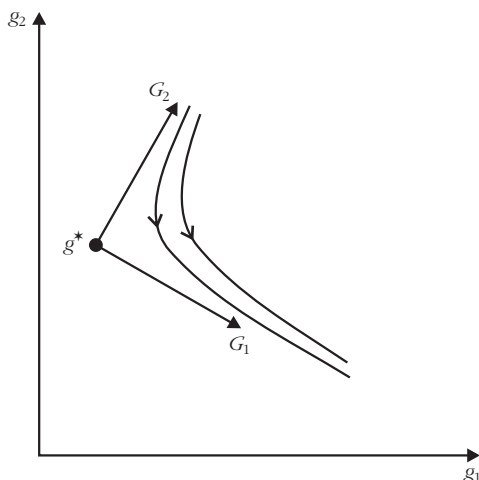
A kritikus pont közelében

Az $a \rightarrow a' = sa$ blokkolás a rácskoordinátákat az $x \rightarrow x' = x/s$ szabály alapján transzformálja, tehát korrelációs hossz $\lambda = a\xi$ és a szabadenergia $F = a^d f$ rácsállandóegységekben kifejezve a $\xi' = \xi/s$, illetve a $f' = s^d f$ módon transzformálódik d dimenzióban. A kritikus pontban $\xi = \xi' = \infty$, a rendszer skálainvariáns, és a dimenziótlan paraméterek függetlenek a rácsállandótól, ami a blokkolás $g^* = B(s, g^*)$ fixpontját jelenti. Egy blokkolási lépés csak a véges (a, sa) intervallumba tartozó fluktuációk hatását gyűjti össze, tehát a $B(s, g)$ függvény analitikus marad a paraméterekben. A blokktranszformációt a fixpont körül $\Delta g = g - g^*$ -ban kifejtve és feltételezve, hogy a

$$\Delta g'_n = \sum_m M_{nm}(s) \Delta g_m$$

lineáris blokkolási relációban fellépő mátrix diagonalizálható, a Hamilton-függvényben megalkothatók a G_n sajátvektorhoz tartozó H_n tagok. Az utóbbit skálaoperátornak hívják, amely a blokkolás során a $H_n \rightarrow \lambda_n(s)H_n$ módon transzformálódik, ahol $\lambda_n(s)$ a linearizált blokkolás M mátrixa sajátértéke. A $\lambda > 1$, illetve $\lambda < 1$ skálaoperátorokat releváns, illetve irreleváns operátoroknak hívják, a $\lambda = 1$ eset pedig marginális operátorhoz tartozik. Az 1. ábra alapján a releváns operátorok a hosszú, az irrelevánsak pedig a rövid távú kölcsönhatásokért felelősek, míg a marginális operátort szerepeltetni kell a kritikus pont körül alkalmazott Hamilton-függvényben.

1. ábra. Renormalizált trajektória egy kétdimenziós paramétertér-síkban. A g^* fixpont körüli linearizálás a releváns G_1 és az irreleváns G_2 skálaoperátor-együtthetót eredményezi. A nyilak a rácsállandó növelésének irányát jelzik.



A renormcsoportot a $B(s_2, B(s_1, g)) = B(s_1 s_2, g)$ egyenlet fogalmazza meg, amelynek linearizált alakja $\lambda_n(s_2)\lambda_n(s_1) = \lambda_n(s_1 s_2)$. E függvényegyenletnek egyetlen folytonos megoldása, $\lambda_n(s) = s^{v_n}$, a H_n skálaoperátor kritikus exponensét definiálja, $G_n \rightarrow s^{v_n} G_n$.

A renormcsoport-megközelítés fontos tanulsága, hogy a termodinamikai potenciálokban a fázisátmenetnél megjelenő szingularitás nem mikroszkopikus eredetű, hanem a modellt definiáló mikroszkopikus a és a fizikai mennyiségek makroszkopikus L skáláinak nagy távolságából, $L/a \rightarrow \infty$, ered, más szóval a reguláris blokkolás

$$\frac{\ln(L/a)}{\ln s} \rightarrow \infty$$

ismétléséből. Feltételezve, hogy az összes releváns operátor szerepel a Hamilton-függvényben a szabadenergia-blokkolás során megtartja funkcionális alakját csupán a paraméterek numerikus értéke fut, $f' = s^d f(G')$, azonnal következik, hogy a szabadenergia és vele együtt a termodinamikai potenciálok és az állapotegyenlet homogén függvénye a paramétereknek:

$$f(s^{v_n} G_n) = s^d f(G_n).$$

A kritikus pont közelében fellépő vezető hatványszingularitások kitevőjét a releváns és marginális kritikus exponensek adják, az univerzalitási osztályok megjelenése pedig a vezető hatványszingularitások irreleváns paraméterektől való függetlenségéből következik. A kritikus jelenségek itt vázolt leírása az $a/L = 1/\xi$ kis paraméter használatára alapul.

Statisztikus fizika és kvantumtérelméletek szintézise

Kvantumtérelméletben a blokkolást először *K. G. Wilson* vezette be [7]. A perturbációs sor konvergenciájának megjavításához keresett egy kis paramétert és észrevett egy egyszerűsödést a Feynman-gráfok nagyenergiájú határesetében, amit véges energián akart kihasználni. Sikerült konvergenciát elérnie egy új kis paraméter használatával, azzal a feltételezéssel, hogy a részecskemódusok energiahéjakba tömörülnek és az energiahéjak egymástól való távolsága nagy, $E/\Delta E \rightarrow 0$. Észrevéve a Kadanoff-blokkolással való hasonlóságot, megfogalmazta a térelméletet téridőrácsra, és felhívta a figyelmet a statisztikus fizika és a kvantumtérelméletek hasonlóságára, ami a fizika e két irányának fejlődését évtizedekre meghatározta.

Kiindulási pontja az volt, hogy egy részecskét a λ_C Compton-hullámhosszánál jobban lokalizálva részecske-antirészecske párokat keltünk, tehát λ_C felfogható korrelációs hosszaként is. A nagyenergiájú fizika renormalizálása a fizikai (Compton) és a minimális (ℓ) hossz egymástól való eltávolítása, a $\lambda_C/\ell \rightarrow \infty$ határeset, amelyben a minimális hossz zérushoz tart rögzítve

tett Compton-hullámhossz mellett. A kritikus jelenségek is ugyanúgy valósulnak meg, csupán a rácsállandó, az UV-levágás, $a = \ell$, marad állandó és a korrelációs hossz divergál, $\lambda/a \rightarrow \infty$.

A renormalizált elméletek és a kritikus pontok megegyezése

A kvantumtérelmélet euklideszi téridőrácscon regularizált, pályaintegrál-formalizmusban megfogalmazott formájában a vákuum-vákuum átmenet amplitúdóját a

$$Z = \int D[\phi] e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[\phi]} \quad (6)$$

kifejezés adja, ahol a rács-térkonfigurációkra integrálunk és az exponensben az elmélet euklideszi hatásfunkcionálja áll. A (3) állapotösszeggel való hasonlóság nyilvánvaló a kritikus jelenségekre való bármely utalás nélkül is. Azonban a kritikus statisztikus modellekkel való összehasonlítás további, eredetileg rendkívül komplikált módon elért eredményekre is elvezet. Például az elmélet operátorait kétféleképpen is osztályozhatjuk. Egyrészt renormalizálható és nem-renormalizálható osztályokba sorolhatjuk őket, másrészt pedig egy kritikus pont körül megalkothatjuk a releváns vagy marginális, valamint az irreleváns operátorosztályokat. A két osztályozás megegyezik! Az 1. ábra világosan mutatja, hogy az irreleváns operátorok együtthatója nő az UV-irányban haladva, tehát egy irreleváns operátor jelenléte eltéríti a renormalizált trajektóriát a fixponttól. Mivel a fixpont jelenti a renormalizált elméletet, az irreleváns operátorok nem renormalizálhatók. Ugyanakkor egy releváns operátor együtthatója csökken az UV-irányban, és az elmélet, amely nem tartalmaz irreleváns operátort megközelíti a fixpontot amint $\Lambda \rightarrow \infty$. Ezzel nem csak a perturbatív BPHZ-renormalizálás rendkívül komplikált, rekurzív erdő-formuláját lehet elkerülni a renormalizálás ilyen egyszerű nemperturbatív megfogalmazásával, hanem arra is fény derül, hogy a kvantumtérelméletek divergenciái, amelyeket csak a perturbációs számítás használata segítségével mutattak ki, ettől a közelítéstől függetlenek.

Funkcionális formalizmus

Wilson impulzus térben végrehajtott blokkolásának döntő fontosságú általánosítása abban rejlik, hogy míg a skálatranszformáció s paramétere téridőben a rács geometriájától függő diszkrét szám, az impulzustérben tetszőleges értéket vehet fel. Ily módon a $\Lambda \rightarrow \Lambda - \Delta\Lambda$ infinitezimális blokkolást át lehet írni differenciálegyenlet formájában, és az így megjelenő $\Delta\Lambda/\Lambda$ kis paraméter lényegesen eltér elődeitől. Ugyanis az eddigi kis paramétereink, $g_{cs}g$ és $\bar{E}/\Lambda \sim 1/\xi$ fizikai

mennyiségekből épültek fel, így kicsik ugyan lehetnek, de minden fizikai problémában véges értéket vettek fel. Ezzel szemben $\Delta\Lambda/\Lambda$ egy általunk végrehajtott határesetet jellemez, tetszőlegesen kicsi lehet és használatát a generátorfüggvények használata során derül ki.

Generátorfüggvény

A generátorfüggvényeket először a valószínűségszámításban vezették be, például a $\{p_n\}$ valószínűségeloszlás információtartalmát a

$$z(j) = \sum_n p_n e^{jn}$$

generátorfüggvény tartalmazza, hiszen a formális paraméter $j = 0$ -ban számolt k -ik deriváltja n^k várhatóértékét eredményezi. A kvantumtérelméletben két generátorfunkcionál fordul elő, egyik a hatás, amely a benne szereplő paramétereket reprezentálja, és a másik a terekhez lineárisan csatolt formális paraméter, egy j forrás jelenlétében számolt vákuum-vákuum átmeneti amplitúdó, mely a Green-függvényeket generálja. E két egymásba ágyazott generátorfüggvényből származnak a kvantumtérelmélet egzakt egyenletei, amelyeket a formális változók szerinti véges differenciaegyenletek differenciálegyenlet-határesetében írunk fel. Ily módon egzaktta lehet tenni a renormcsoport evolúciós egyenletét is. Az új kis paraméter felváltja az $\bar{E}/\Lambda \sim 1/\xi$ -t és függetleníti a renormcsoportot a kvantumtérelmélet UV-divergenciáitól, illetve a kritikus ponttól távoli rendszerekre általánosítja.

Blokkolt csupasz hatás evolúciója

F. Wegner és A. Houghton általánosította Wilson egyenleteit a csupasz hatásra vonatkozó funkcionális differenciaegyenlet formájában [8],

$$\frac{S_\Lambda[\phi] - S_{\Lambda - \Delta\Lambda}[\phi]}{\Delta\Lambda} = \mathcal{F}_{\text{WH}}[S_\Lambda] + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar\Delta\Lambda}{\Lambda}\right)z. \quad (7)$$

A Planck-állandó megjelenése a kis paraméterben azt jelzi, hogy az egyenlet levezetése a kvantumfluktuációkban kifejtve és a vezető rendre korlátozódva egy hurokszinten történt. Azonban a $\Delta\Lambda/\Lambda$ szorzófaktor arra is utal, hogy a differenciálegyenlet határesetben, ahol infinitezimális blokkolást hajtunk végre $\Delta\Lambda \rightarrow 0$, a hurokkifejtés teljes felösszegzését érjük el. A Wegner–Houghton-egyenlet megoldása kettős eredménnyel jár. Egyrészt a renormalizált trajektóriáról leolvashatjuk a fizikai paraméterek skálafüggését, hiszen a csupasz hatás paraméterei a levágás skálájánál fellépő fizikai folyamatokat jellemzik. Másrészt pedig megoldja a térelméletet, mert kellően hosszú evolúció után, alacsony Λ esetén, a modell olyan kevés módust tartalmaz, hogy annak perturbatív megoldása megbízható.

Azonban a funkcionális differenciálegyenletet nem lehet a maga általánosságában megoldani, ezért ezen a ponton közelítést kell alkalmaznunk, az egyenletet levetítjük a hatásfunkcionálok egy jól megválasztott alterére. Euklideszi téridőben természetesen adódik a Landau–Ginzburg dupla kifejtés, amely két kis paraméterre alapul, a tér amplitúdójára és a dinamikát jellemző impulzus nagyságára. Minkowski-téridőben ez az eljárás nem használható *M. Ostrogradsky* instabilitása miatt [9], és a multi-lokális klaszterkifejtésre kell hagyatkoznunk a gradiens kifejtés helyett. A perturbációs számításban kevés számú csatolási állandóval kellően magas rendben nagy számú Feynman-gráf figyelembe vételével érhetünk el pontosabb eredményeket. A funkcionális renormcsoportban egyszerű, egy-hurok evolúcióegyenletet, és a pontosabb eredmények érdekében sok paramétert tartalmazó, kelően gazdag analitikus struktúrájú és sok csatolási állandót tartalmazó hatást használunk. Az utóbbi közelítés hajlékonyabb és javíthatóbb, továbbá a csatolási állandók kiválasztását oly módon tehetjük meg, hogy egy közeli fixpontonál megjelenő skálaoperátorok közül azokat vesszük be a hatásba, amelyek kritikus exponense egy adott alsó határ felett van, azaz

$$\lambda(s) = e^{V_{\min}}$$

az új és egyben az egyetlen véges kis paraméterünk. Nagyobb pontosságú leírásokban persze nem-renormalizálható kölcsönhatásokra is szükség van.

Effektív hatás evolúciója

Ugyan a (7) differenciálegyenlet megoldása felösszegezi a hurok-kifejtést, a kifejtés szükségessége feltételként megmarad. Ezt a feltételt kiküszöbölhetjük oly módon, hogy nem a pályaintegrál integrandusára, hanem magára a pályaintegrálra vezetjük le az evolúciós egyenletet. Ez az eljárás az effektív hatásra alapul, az összefüggő Green-függvények generátorfunkcionáljának Legendre-transzformáltjára, mert ez a lehetőségekhez képest leginkább lokális generátorfunkcionál. E módszer kifejlesztése *C. Wetterich* és *M. Reuter* nevéhez fűződik [10]. Az eredmény egy, a (7)-től kissé eltérő, funkcionális differenciaegyenlet, amelyben a magasabb rendű korrekció már nem tartalmazza a Planck-állandót.

A pályaintegrál használatának ára az, hogy nem ismerjük az effektív hatásra vonatkozó evolúciós egyenlet kezdeti feltételét. A probléma elkerülhető lenne, ha a kezdeti levágás értékénél a kvantumfluktuációk elhanyagolhatók lennének, ekkor ugyanis az effektív és a csupasz hatás megegyezik, és az utóbbit ismerjük. De a térelmélet UV-divergenciái éppen azt jelzik, hogy a kvantumfluktuációk domináns része jelen van a nagy Λ -hoz tartozó kezdeti feltételben. A kvantumfluktuációk elnyomását ebben a módszerben

úgy érték el, hogy Λ -t IR-levágássá alakították át. Ekkor viszont szükségessé válik egy ettől független UV-levágás bevezetése, hiszen enélkül egy lépést sem tehetünk, és az effektív hatást a $\Lambda_{\text{IR}} < |\mathbf{p}| < \Lambda_{\text{UV}}$ tartományba eső részecskemódusok figyelembe vételével definiálják, majd az IR-levágás csökkentésével vezetik el a rendszert a $\Lambda_{\text{IR}} = 0$ pontig.

Vegyük észre, hogy ez nem a renormcsoport elvének megvalósítása, hiszen az effektív hatás, amelyben pont a lényeges IR-módusok hiányoznak, nem fizikai rendszerhez tartozik. Azonban az evolúciós egyenlet Λ_{IR} -ben történő integrálásával kirajzolt trajektória egy interpoláló elméletserget ad egy gyengén fluktuáló megoldható elmélet és a $\Lambda_{\text{IR}} = 0$ IR-végpontnál talált fizikai elmélet között, és az elmélet megoldását szolgáltatja.

Kvantumrenormcsoport

Nyitott kvantumtérelméletek

A Wilson által bevezetett blokkolás követi a pályaintegrálban megjelenő csupasz hatás változását az UV-levágás csökkentése során. Ez matematikailag jól definiált evolúciót ír le az eredeti elméletre, azonban a blokkolt hatást tartalmazó funkcionálintegrál nem tartozik egy csökkentett levágású kvantumtérelmélethez. Ugyanis egy dinamikai szabadságfok eliminálásával tiszta állapotból kevert állapothoz jutunk, amelynek jellemzésére a sűrűségmátrixot kell használnunk, azonban a blokkolt pályaintegrál csak tiszta állapotok közti átmeneteket ír le. Feltételezve, hogy a kezdeti elmélet zárt, a levágás csökkentésének első lépésénél máris nyitott elméletre jutunk, amelynek környezetét az UV-részecskemódusok alkotják. A kvantumtérelméletekben fellépő UV-divergenciák következtében szükség van levágásra, és az attól való függetlenség megfogalmazása csak nyitott formalizmusban tehető meg. Választhatunk, vagy csak rögzített levágású elméleteket használunk, amelyekben a levágás fizikai jelenségnek felel meg és pontosan értelmezhető, megfigyelhető, vagy pedig nyitott elméletekkel folytatjuk!

Nyitott kvantumrendszerek

A kevert állapotok jellemzője az, hogy bennük a „bra”, $\langle \psi |$ és a „ket”, $| \psi \rangle$ kvantumfluktuációi korreláltak. Ezt leghatékonyabban a szabadságfokok formális megduplázásával tudjuk nyomon követni a Schwinger–Keldysh-formalizmus alapján úgy, hogy a kvantumtereket két változatban vezetjük be, egyiket a „bra” és a másikat pedig a „ket” komponens dinamikája számára. A két szektor közti csatolás a környezettel fellépő nyitott kölcsönhatási csatornákat írja le.

A zárt és nyitott kvantumrendszerek viselkedése lényegesen eltér egymástól mind az UV-, mind pedig az IR-tartományban. A szabadságfokok megduplázódása által több renormalizálható paraméterünk van, a

„bra” és a „ket” terek közti csatolási állandók segítségével a renormalizálható elméletek szélesebb csoportja alkotható meg, mint zárt elméletben. A nyitott elmélet alacsony energiás viselkedése nyilvánvalóan különbözik a zárttól, hiszen a makroszkopikus környezet dekoherenciához és klasszikus fizikához vezet. Ezen jelenségek feltérképezése csupán az utóbbi években kezdődött el, S. Nagy, J. Polónyi [11]. Vegyük észre, hogy a klasszikus határeset szükségképpen makroszkopikus rendszerekre vonatkozik, amelyek kimerítően részletes kezelése csak kvantum-tér-elméleti módszerekkel lehetséges.

Globális renormcsoport

A kvantum-klasszikus átmenet leírásának lehetőségével a renormcsoport túllép a sokrészecskerendszerek hatékony leírására szánt módszer határain, és a fizika egészének feltérképezéséhez, illetve megértéséhez vezető fontos módszerre nő fel. A multiplikatív renormcsoport formális keretet szolgáltat annak, a valójában már régen megismert és elfogadott elv megértéséhez, hogy a megfigyelések eredménye mindig függ az alkalmazott skáláktól, nincsenek univerzális fizikai állandók, törvények, csak numerikus paraméterek. A renormcsoport segítségével a szabadságfokok áttehetők a megfigyelt rendszerből annak környezetébe, és ezáltal megnyílt az út a Mindenség elméletének módszeres feltérképezésére, egy „meta-elmélet” felvázolására.

Az általunk jól-rosszul ellenőrzött fizikai elméletek véges skálatartományhoz tartoznak. A hosszúság skálaintervallumok láncolata fedi le a Planck-hossz és az Univerzum átmérője közti megközelítően 62 nagyság-

rendet, amelyre fizikai világképünk alapul. Mindegyik elmélet az UV levágásától, azaz felbontásától, megközelítően független dinamikát ír le, a hatékonyabb elméleteknél ez a megközelítő skálafüggetlenség szélesebb skálatartományra vonatkozik. Tehát az elméletek egy-egy közelítő renormcsoport fixpont-fizikáját fedi le. Képzeld el az összes „állandót”, amelyeket a fizikában vagy a mérnöki tudományokban használunk. Az általuk kifizített paramétertérben definiálható a Mindenség elméletének renormalizált trajektóriája. Ugyan az UV kezdeti feltételt nem ismerhetjük meg, azonban empirikus elméletek láncolata felépíthető ebben a skálaintervallumban. Véges lehetőségeink tudatában célunk csupán az egyes, részleges elméletek kidolgozásából, a szomszédosak összeillesztéséből, és az így kapott lánc hosszának növeléséből állhat. Erre pedig a renormcsoport optimális lehetőséget nyújt, hiszen trajektóriájának követése módszeresen kirajzolja a fizika számunkra fontos, „releváns” paramétereit és azok dinamikáját.

Irodalom

1. E. C. Stueckelberg, A. Petermann, *Helv. Phys. Acta.* 26 (1953) 499.
2. N. N. Bogoljubov, D. V. Shirkov, *Nouvo Cim.* 3 (1956) 845.
3. M. Gell-Mann, F. Low, *Phys. Rev.* 95 (1954) 1300.
4. B. J. Widom, *J. Chem. Phys.* 43 (1965) 3898.
5. L. Kadanoff, *Physics* 2 (1966) 263.
6. L. Onsager, *Phys. Rev.* 65 (1944) 117.
7. K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* 3 (1971) 1818.
8. F. J. Wegner, A. Houghton, *Phys. Rev.* A8 (1973) 401.
9. M. Ostrogradsky, *Mem. Ac. St. Petersburg VI.4.* (1850) 385.
10. C. Wetterich, *Phys. Lett. B* 301 (1993) 90; M. Reuter, C. Wetterich, *Nucl. Phys. B* 417 (1994) 181.
11. S. Nagy, J. Polónyi, *Universe* 8 (2022) 127.

GRAVITÁCIÓ ÉS RENORMÁLÁS

Nagy Sándor

Debreceni Egyetem, Elméleti Fizikai Tanszék

A gravitációs kölcsönhatás kilóg az alapvető kölcsönhatások sorából. Az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatás a standard modell keretei között vizsgálható, azonban a gravitációval történő egyesítésük várat magára. Az egyesítés első lépése a gravitáció kvantálása volna, de már itt is nehézségekbe ütközünk. A gravitációt mai ismereteink szerint helyesen leíró általános relativitáselmélet kvantálható, azonban a perturbációs számítás minden rendjében divergenciákat találunk. A gravitációs elmélet perturbatív kvantálása azt az eredményt adja, hogy a Newton-állandó az energia növelésével a végtelenhez tart. Mivel ez a gravitációs elmélet legfontosabb paramétere, ezért úgy tűnik, a perturbatív kvantálás a gravitációs elméletre nem használható. Nagy energiákon azt várjuk,

hogy az általános relativitáselmélet érvényét veszti, és egy új, feltehetően kvantumgravitációs modell jelenik meg. Amikor elérjük a Planck-skálát, amely

$$M_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19} \text{ GeV}, \quad (1)$$

akkor feltételezésink szerint egyformán fontosak lesznek a kvantum (a \hbar miatt), a relativisztikus (a c miatt) és a gravitációs (a G miatt) effektusok.

A kvantumgravitációt más skaláris, fermionikus vagy mértékelméletekhez hasonlóan megadhatjuk pályaintegrál-formalizmusban, ahol a klasszikus pálya helyett annak kezdő és végpontja közötti összes lehetséges pálya járulékat azonos súllyal, de más-más fázissal vesszük

figyelembe. A kvantumgravitáció számtalan modellje létezik. A modellalkotást megnehezíti, hogy kevés ismeretünk van a keresett modellről, mert nincsenek mérési eredményeink a Planck-skálán, amelyekre támaszkodhatnánk. A modellek egyike az aszimptotikusan biztonságos gravitáció, amely a renormálási csoport (RCS) módszeren alapszik [1].

A wilsoni RCS-módszer alap gondolata az a feltevés, hogy ismerjük a modell nagy energiás, ultraibolya (UV), azaz kis távolságokon vett, mikroszkopikus viselkedését, és ebből következtetünk a modell alacsony energiás, infravörös (IR), azaz nagy távolságokra érvényes tulajdonságaira [2]. A módszer egy evolúciós egyenletnek nevezett differenciálegyenletet ad a hatásra. Ebben a változó az a k RCS-skála, amely a nagy UV-értékekről indul, és a kis IR (gyakorlatilag nulla) értékhez tart. A hatásban szereplő fizikai paraméterek ezáltal skálafüggővé válnak, ami a k skálánál nagyobb energiájú kvantumfluktuációk hatását fejezi ki. Az RCS-módszer olyan esetekben használható hatékonyan, ahol az elméletben több, egymástól jelentős mértékben különböző, az elmélet szempontjából fontos energiaskála van jelen. Tipikusan ilyenek a folytonos fázisátalakulások, ahol a fizikai rendszer minden skálán önhasonló. A fázisátalakulások helyét egy fixpont adhatja meg a fizikai paraméterek terében. Az RCS-módszer lehetőséget ad arra, hogy ne csak a fixpontok környékén ismerjük meg a vizsgált rendszer fizikai viselkedését, hanem az evolúció során vándorolni tudjunk egy fixpont környezetéből egy másikéba, és különböző energiaskálákon tárhassuk fel a rendszer viselkedését.

Az alábbiakban tárgyalni kívánt aszimptotikusan biztonságos (AB) gravitációban több fixpontot találunk, emiatt nagyon hatékony az RCS-módszer használata. Továbbá tudjuk, hogy a gravitációnak van egy klasszikusan jól ismert fizikai leírása, az általános relativitáselmélet, amely alacsony energián jól működik. Az RCS-módszer olyan eszközt ad a kezünkbe, amely lehetővé teszi, hogy a Planck-skálából kiindulva az evolúciót követve IR-skálán megérkezzünk az általános relativitáselmülethez.

A jól ismert realiztikus skaláris vagy mértékelméletek UV vonzó fixpontja a gaussi fixpont, amelyet az evolúciós egyenlet segítségével úgy találunk meg, hogy a k skálát növelve az UV irányban végezzük a blokkosítást. A csatolások terének gaussi fixpontja az

origó, ahol minden csatolás nulla, azaz az UV-ben egy tömegtelen, szabad elmülethez tart az evolúció, ezért nevezik az UV gaussi fixponttal rendelkező elmületeket aszimptotikusan szabadnak. Ezzel szemben a kvantumgravitáció UV fixpontjában, *Weinberg* feltételezése szerint, a csatolások az UV-ben nem nullák, a fixpont egy kölcsönható elmülethez tartozik [3]. Mivel az új fixpont mintegy megmenti az elmületet a divergenciáktól, azt biztonságossá teszi, ezért az ilyen elmületeket aszimptotikusan biztonságosnak nevezik. Emiatt hívjuk a modellt aszimptotikusan biztonságos, rövidítve AB-gravitációnak.

A kvantumgravitáció alapvető nehézsége, hogy a téridő geometriája határozza meg a dinamikát, a használni kívánt kvantumtérelmületet azonban adott metrikán fogalmazzuk meg. Ezt a problémát az AB-gravitációban úgy oldjuk meg, hogy egy klasszikus háttérter jelenlétét feltételezzük, és a háttérterhez adjuk a metrikafluktuációt, amelyre elvégezzük a pályaintegrált. Vannak elmületek, ahol nem vezetnek be háttérteret, azonban a kvantumter helyett új matematikai fogalmakat kell bevezetni, ilyenek például a háromszögelt tér vagy a spinhab. A rögzített háttérter jelenlétében számolt eredmények a háttérter megválasztásától függnnek, de ezt ki lehet küszöbölni úgy, hogy nem rögzítjük a háttérteret, hanem egy további feltételt vezetünk be, amely szerint a metrikafluktuáció várható értéke nulla.

Az AB-gravitációban a standard modell pályaintegráljában szereplő terek szerepét a téridőt jellemző metrika veszi át, a fizikai állandók pedig skálafüggőké válnak. Az általános relativitáselmület két legfontosabb paramétere a Newton-állandó és a kozmológiai állandó, amelyek skálafüggővé válnak, és ezután azokat futó Newton- és kozmológiai állandóknak fogjuk őket nevezni.

A gravitációs kölcsönhatás

A gravitációs kölcsönhatás, mint a négy alapvető kölcsönhatás egyike, minden tömeggel rendelkező test vagy részecske között hat. A *Newton* által felismert általános tömegvonzás potenciális energiájának alakja

$$V = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (2)$$

ahol m_1 és m_2 a két kölcsönhatásban résztvevő test tömege, r a távolságuk, a G pedig a Newton-állandót jelöli, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$. A newtoni elmület rendkívül sikeres a Hold Föld körüli keringésének és a Naprendszer mozgásának megértésében. Ugyanakkor érvényességi határát jelzi, hogy nem tudja pontosan magyarázni a Merkúr perihéliumvándorlását.

Az általános relativitáselmület alkalmas arra, hogy a gravitációs kölcsönhatást szélesebb tömeg- vagy ener-



Nagy Sándor a Debreceni Egyetem Elméleti Fizikai Tanszékének egyetemi docense. Kutatási területe: a renormálási csoport-módszer alkalmazása a kvantumelmületekben.

gia-, illetve távolságskálán adjon pontosabb leírást, mint a newtoni elmélet. A relativitáselmülethez tartozó Einstein–Hilbert-hatás alakja:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (2\Lambda - R), \quad (3)$$

amelyre az Euler–Lagrange-egyenletet alkalmazva megkaphatjuk az Einstein-egyenletet:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4)$$

A $g_{\mu\nu}$ a metrikus tenzor, az $R_{\mu\nu}$ és az R pedig a belőle felépített Ricci-tenzor és a görbület, g pedig a metrika determinánsának abszolút értéke. A $T_{\mu\nu}$ a részecskéből és a sugárzási térből álló anyag energia-impulzus tenzora. Az Einstein-egyenlet pontosan számot tud adni a Merkúr perihéliumvándorlásáról vagy a fényelhajlás jelenségéről. A jelenkori űrhajózás és a Globális Helyzetmeghatározó Rendszer (GPS) sikere sem lenne elképzelhető az általános relativitáselmélet nélkül. Az Einstein-egyenlet alapján következtethetünk arra, hogy adott anyageloszlás milyen geometriájú téridőt hoz létre. A tömeggel rendelkező részecskék között a kölcsönhatást a téridő görbülete okozza, amely ezáltal dinamikai változóvá válik.

Az Einstein–Hilbert-hatás egy görbületől független tagot tartalmaz, amely a Λ kozmológiai állandóval szorozódik, $\Lambda \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. A hatás másik tagja a görbületben lineáris. A hatás a fizikai teret, vagyis jelen esetben a metrikát és annak deriváltjait tartalmazza. A metrikából megalkothatjuk a Ricci-tenzort, és ennek kontrakciója a görbület. Ezért látjuk a görbületet és annak hatványait a hatásban. A hatás két paramétere a Newton- és a kozmológiai állandó, ezek szükségesek a kozmológiai skálákon végbemenő folyamatok leírására, azonban további paraméterekre jelen ismereteink szerint nincs szükség. Az AB-gravitációra alkalmazott RCS-módszerben ezek a paraméterek lesznek a futó csatolási állandók.

Az Einstein–Hilbert-hatás diffeomorfizmusinvariáns, vagyis invariáns azzal szemben, hogy milyen koordináta-rendszert választunk a téridőben. Emiatt, ugyanúgy, mint a mértékelméletek esetén, a hatáshoz hozzá kell vennünk egy mértékrögzítő tagot, és a megfelelő Faddeev–Popov-szemleltagokat és -forrástagokat. Az ezzel kiegészített hatásra alkalmazzuk az RCS-módszert. Az AB-gravitációra leggyakrabban az effektív hatásra vonatkozó Wetterich-egyenletet alkalmazzák, mint evolúciós egyenletet [4, 5]. Az evolúció-egyenletből azután csatolt differenciálegyenlet-rendszert kapunk a futó gravitációs csatolások skálafüggésére. Az egyenletek alakja 4-dimenzióban:

$$k \partial_k \lambda = (\eta - 2) \lambda + \frac{g}{8\pi} \left(20\ell - 16 - \frac{10}{3} \eta \ell \right), \quad (5)$$

$$k \partial_k g = (\eta + 2) g,$$

ahol bevezettük a dimenziótlan csatolásokat,

$$\lambda = \Lambda k^2, \quad (6)$$

$$g = G k^2,$$

és az η anomális dimenziót,

$$\eta = \frac{g(5\ell - 9\ell - 7)}{3\pi \left(1 + \frac{g}{12\pi} (5\ell - 6\ell^2) \right)}, \quad (7)$$

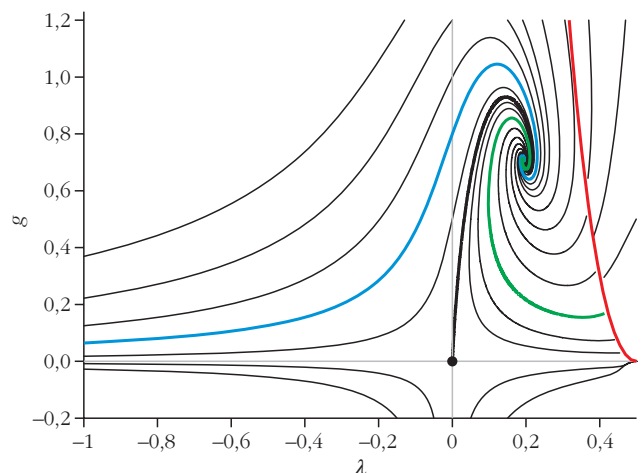
továbbá

$$\ell = \frac{1}{1 - 2\lambda}. \quad (8)$$

A Reuter-fixpont

Az evolúciós egyenleteket megoldva megkapjuk a λ és a g futó csatolási állandók k skálafüggését. A csatolások terében – különböző kezdeti értékek esetén paraméteresen ábrázolva a megoldásokat – kirajzolódik a fázistér szerkezete, ezt látjuk az 1. ábrán. Az elméletnek két fixpontja van, egy gaussi és egy nem-gaussi fixpont. Ez utóbbit először UV nem-gaussi fixpontnak nevezték arra utalva, hogy a fixpont nem a csatolások terének origójában van, és azt, hogy a fixpontot úgy találjuk meg, hogy az UV-irányban végezzük a blokkosítást. Ezt a fixpontot újabban a felfedezőjéről Reuter-fixpontnak nevezzük [6]. Az ábrán a nem-gaussi fixpontból kifelé folynak a trajektóriák a blokkosítás hagyományos irányát követve. A fixpontnál a futó Newton- és kozmológiai állandók véges értékhez tartanak, a fixpontban skálafüggetlenek. E felfedezés óriási lendületet adott az ilyen irányú kutatásoknak. A fixpontok előnye, hogy gyakran analiti-

1. ábra. Az aszimptotikusan biztonságos gravitáció fázissterét szemléltetjük a g és λ síkon. Fekete pontok jelzik a gaussi és a Reuter-fixpont helyét. Vörös vonallal jelöljük az η szinguláris helyeit. A kék trajektória egy erős, a zöld pedig egy gyenge csatolású fázisbeli trajektóriát jelöl. Az ábra [7] alapján készült.



kusan is megkaphatók, továbbá, hogy a fixpont körül az evolúciós egyenletek megoldhatók, a csatolások fixponti skálázásának exponenciális pedigg magát a fixpontot jellemezhetjük. Vonzó fixpontoknál az exponensek valós része negatív, ez teljesül a Reuter-fixpontra is, ahol a két exponens egymás komplex konjugáltja, ettől válik a fixpont spirális szerkezetűvé. Az UV-irány felé haladva a spirál mentén a $k \rightarrow \infty$ határesetben aszimptotikusan érkezik be a trajektória a fixpontba, a csatolások a fixponti értéket veszik fel.

A fázistér másik fixpontja egy gaussi nyeregpont, amely (mint általában a nyeregpontok) két fázisra bontja a teret. A Reuter-fixpont közeléből induló trajektóriák, vagy pozitív vagy negatív előjelű Λ -k felé válnak szét a gaussi fixpont közelében. Vastag fekete vonallal jelöltük a modell szeparátrixát, amely szétválasztja a fázisokat. A pozitív futó kozmológiai állandókkal rendelkező trajektóriák evolúciója véges k skálán leáll. Ezt a fázist gyenge csatolású fázisnak nevezik, a metrika várható értéke nullához tart, azaz degenerált. A vastag vörös vonalakra érkező trajektóriáknál véges k -nál az η szingulárisá válik. E fázisban kell keresnünk a mai világunknak megfelelő G és Λ paramétereket, amelyek megfelelnek a klasszikus általános relativitáselméletben használt értékeknek. Világunk $-k^2$ egységben mérve -10^{-70} távolságra van a gaussi fixponttól, ami érzékelteti, hogy mennyire távol van onnan a Reuter-fixpont. Fizikailag a gyenge csatolású fázis releváns, mert itt találjuk azt a trajektóriát, amelyeken a mi világunk paraméterei találhatóak. Ezt a trajektóriát a Planck-skáláról, a Reuter-fixpont közvetlen közeléből kiindulva, G és Λ kezdeti értékeinek finomhangolásával találhatjuk meg.

Maga a fázisszerkezet is rokonítható a 3-dimenziós $O(N)$ modellével. Az $O(N)$ modellben az UV gaussi fixpont az itteni UV Reuter-fixpontnak felel meg, ebből kiindulva érhetjük el a modell nyeregpontját, ami az AB-gravitációban a gaussi, $O(N)$ -ben a Wilson-Fisher-fixpont. A nyeregpont két fázisra osztja a fázis-teret, ahol az egyikben szingularitásba fut az evolúció. Az IR-tartományban talált szingularitásnak szintén van az $O(N)$ modellben analógiája, a szimmetriasértett fázisban a trajektóriák az úgynevezett spinodális instabilitásba futnak, és véges skálán leállnak.

Azok a trajektóriák, amelyekre $\Lambda < 0$ az erős csatolású fázisba tartoznak, itt a metrika a Minkowski-metrikához tart. Az AB-gravitáció az $O(N)$ modelltől eltér abból a szempontból, hogy a gyenge csatolású fázisban a metrika várható értéke nulla, míg az $O(N)$ modellben az ennek megfelelő spontán szimmetriasértett fázisban a tér várható értéke véges, az erős csatolású fázisban pedig a metrika várható értéke véges, ellentétben az $O(N)$ modell szimmetrikus fázisával, ahol a tér várható értéke nulla.

A fázistérnek további tartományai is vannak, például meg lehet határozni a negatív Newton-állandóra vonatkozó evolúciót, vagy az η szingularitását jelölő

görbét elérhetjük a magas λ értékek felől. Ezek a tartományok – jelenlegi ismereteink szerint – fizikailag nem relevánsak.

A 2-dimenziós modellben a Reuter- és a gaussi fixpont egybeesik, ezek $2+\varepsilon$ dimenzióban szétválnak. Az $O(N)$ modellben $d = 4 - \varepsilon$ -ban láthatunk hasonlót, ott a gaussi és a Wilson-Fisher-fixpont válik szét. A $2+\varepsilon$ -dimenziós AB gravitációs modell perturbatív módon vizsgálható, ez az eredmény adta Weinbergnek az ötletet, hogy feltegye, van 4-dimenzióban is egy vonzó fixpont.

Reuter munkája az RCS-módszer alkalmazásának hatalmas lendületet adott. Az azóta eltelt több mint 25 év alatt az RCS-módszer legfőbb kutatási területe az AB-gravitáció lett. Az AB-gravitáció sikerének egyik oka, hogy sokkal egyszerűbb, mint például a hurokkvantumgravitáció, az okozati dinamikai háromszögelés vagy a húrelmélet. Az RCS-módszer a Reuter-fixpont megtalálásakor már egy kiforrott, jól használható eszköz volt, így volt elképzelésünk mértékelméletek renormálásáról, fázisszerkezetek feltérképezéséről. A másik ok talán a Reuter-fixpont eredetisége lehet. Az AB-gravitáció előtt nem ismertünk olyan modellt (kivéve néhány alacsony dimenziós játékmódellet), amelynek vonzó kölcsönható fixpontja lett volna. Klasszikus megfelelőjét sem könnyű elképzelni, mert a hamiltoni klasszikus mechanikában olyan fázistérbeli pontnak felel meg, ahol állandó a koordináta és a sebesség.

Az AB-gravitáció számos kiterjesztését vizsgálták az RCS-módszerrel. Az Einstein-Hilbert-hatáshoz további, fizikailag indokolható tagokat adnak és azt vizsgálják, hogy mi történik a Reuter-fixponttal. A bővítés egyik iránya a metrikus tenzorból származó diffeomorfizmusinvariáns új tagok figyelembe vétele a számolásokban. Ezek tipikusan a görbület vagy a Ricci-tenzor hatványait tartalmazó tagok, de lehetnek más egzotikus tagok is. Ezek közül érdemes megemlíteni azokat, amelyek az AB-gravitáció perturbatív nem-renormálhatóságával kapcsolatosak. Az egyes hurokkorrekcióknál megjelenő divergenciákat megfelelő diffeomorfizmusinvariáns ellentagokkal kell végesíteniük. Ezen ellentagoknak szintén konstansba kell futniuk az UV-ben. Az általános relativitáselmélet arra tanított meg bennünket, hogy a gravitáció és az anyag egymástól függetlenül nem létezik. Ezért egy következetes kvantumgravitációs elméletnek az anyag szabadsági fokait is tartalmaznia kell. Ebből adódik egy másik, el nem kerülhető kiterjesztési lehetőség: a standard modell részecskéinek figyelembe vétele. Az eddigi eredmények azt mutatják, hogy a kiterjesztett modellek is tartalmazzák a Reuter-fixpontot.

Az AB-gravitáció, a Reuter-fixpont léte kétségkívül az RCS-módszer egyik legfontosabb eredménye. Sajnálatos módon a kísérleti igazolás szinte lehetetlen, emiatt megmaradhat bennünk a kétség, hogy valóban jó nyomon járunk-e a gravitáció és a kvantumelmélet illetően egyesítésével. A modellnek, továbbá az RCS-

módszernek egy nagyon speciális formájával, illetve alkalmazási módjával állunk szemben, amelyek szintén kérdéseket vehetnek fel az eredményt illetően. Ezek közül sorolok fel néhányat:

1. A Reuter-fixpont UV-fixpont, azaz a k RCS-skála a végtelenhez tart. Ez ellentétes a blokkosítással, a szabadsági fokok fokozatos eliminálásának wilsoni gondolatával, amelynek a k skála csökkentése felel meg. A wilsoni renormálás keretében az ellentétes eljárást úgy lehet megvalósítani, hogy a k_Λ levágási skálát a végtelen felé toljuk, ahonnan indítva az evolúciót egyre nagyobb k -nál számolhatjuk a csatolások futását, amelyek UV-aszimptotikus viselkedése rajzolja ki a Reuter-fixpontot. Azonban az elgondolás azt feltételezi, hogy a vizsgált elméletben nincsenek további csatolások, amelyek esetleg felnőnek az UV-ben. A perturbatív renormálásnál is hasonlóképpen járunk el, csak a releváns csatolásokat követjük az evolúció során. Azonban ezzel kizárjuk annak lehetőségét, hogy bármilyen új kölcsönhatás jelenjen meg az UV-ben, amelyek valamilyen új fizikai kölcsönhatáshoz tartoznak. Ez ellentmond annak, hogy a részecskefizikában úgy gondoljuk, a Planck-skála környékén új fizika jelenik meg.

2. A standard modellben az ábeli és skaláris terekhez tartozó csatolások UV Landau-pólussal rendelkeznek, azaz véges k értéknél végtelenbe futnak. Nem tudjuk, hogy az AB-gravitáció standard modellel vett kiterjesztése megoldja-e ezt a problémát.

3. A Reuter-fixpontot eredetileg euklideszi téridőben kapták meg, ezzel szemben a fizikai kölcsönhatásokat Lorentz-szignatúrában kellene megadnunk. Ezt pótolandó egyre több kutatás tárgyalja a modellt Lorentz-szignatúrában, sőt, ez inspirálón hatott skalár- vagy mértékelméletek újratárgyalására Lorentz-formalizmusban. Ehhez kapcsolódó probléma az is, hogy az RCS-módszer maga nem fogalmazható meg Lorentz-invariáns módon. A k skálával kell paramétereznünk a Lorentz-szimmetriának megfelelő hiperfelületeket, amelyek végtelen kiterjedésűek, ezért regularizálni kell, azonban nem ismerünk nem-perturbatív Lorentz-invariáns regulátort.

4. A kvantum-színdinamikában ismert, hogy a Lorentz-szimmetria nagy energiákon sérül. Ennek nyomát látnunk kellene az AB-gravitációban UV-skálán. Euklideszi formalizmusban ezt nem találhatjuk meg, Lorentz-szignatúrában kell dolgoznunk. Azonban a Reuter-fixpont fenntartja a csatolások értékét UV-ben, ezért a Lorentz-szimmetria fennmarad. Feltételezhetjük, hogy a Reuter-fixpont csak közelítőleg fixpont, amely a Lorentz-szimmetria sérüléséig jó közelítésnek tekinthető, azonban – növelve a skálát – a szimmetriasértés elmosza a Reuter-fixpont közelében lévő skálázást. Ezzel összhangba kerülhetünk a Horava-féle gravitációs modell gravitációmentes UV-fixpontjával, ahol a futó Newton-állandó nullához tart, míg a futó kozmológiai állandó véges pozitív értékhez [9].

5. A bevezetésben említett, az RCS-módszer által kapott, skálákon átívelő gravitációs elmélet alacsony energián a klasszikus elmülethez közelít. Azonban fontos megjegyeznünk, hogy az RCS-módszerrel kapott alacsony energiás modell nem klasszikus, hanem végig megmarad kvantummodellnek. Az RCS-módszer egyelőre adós olyan tárgyalással, ahol a kvantummodellből indulva a blokkosítás a modellt klasszikus változatába viszi. Ezt még a gravitációnál jóval egyszerűbb, könnyebben tárgyalható modell esetén sem sikerült megvalósítani. Példaként említhetjük a kvantum-elektrodinamika modelljét, amelynek jól ismerjük a nagyenergiás kvantum viselkedését, és hasonló precizitással ismerjük a klasszikus elméletet, akár áramkörök feszültség-áram viszonyainak szintjén is. Mégis, nincs a szakirodalomban olyan RCS-tárgyalás, amely megadja a trajektóriákat a kvantummodellből indulva a klasszikus elméletbe érkező átmenet kérdése az RCS-módszer zárt időtengelyes formalizmusában vizsgálható [8].

6. Komolyan kell vennünk, hogy a kvantumgravitáció perturbatív módon nem renormálható. A perturbatív tárgyalásnak nincs elméleti előrejelző ereje, mert végtelen sok fizikai paramétert kell fix értéken tartanunk. A hurokkifejtés minden rendjében új, divergens vertex jelenik meg, például 2-hurok közelítésben a Goroff–Sagnotti-ellentag kell, ami szintén nem renormálható új csatolást vezet be. Ezeket egyesével kell megvizsgálnunk a Reuter-fixpontban, és meg kell győződnünk, hogy ott UV-irrelevánsak-e.

7. Az AB-gravitáció eredményei kísérlettel nem ellenőrizhetők. Általában elmondhatjuk, hogy az RCS-módszer erőssége inkább a modellek kvalitatív megismerésében rejlik. Megtalálhatjuk egy modell fázisait, fixpontjait, azok kvalitatív tulajdonságait, azonban például a fixponthoz tartozó exponensek pontos számítására más elméleti módszert érdemes választani.

A Reuter-fixpont felfedezése az RCS-módszer egyfajta reneszánszát hozta el, többek között megjelent a háttértérmódszer, egyre komolyabban veszik a Lorentz-szignatúrában számolt evolúciót, és a kozmológia tárgyalása is új lendületet kapott. Talán nem is az a fontos, hogy létezik-e a Reuter-fixpont, hanem hogy ezek az eredmények mennyi inspirációt adtak további kutatásokra. A wilsoni renormálás által kapott képünk a gravitációról lehet, hogy pontatlan, korrekcióra (akár cserére) szorul, de segít egy olyan globális kép megalkotásában, amely a különböző skálákon érvényes elméleteket egyesíti. Egy adott fixpont közeléből nagy energiáról indulva az evolúció megközelíthet egy újabb fixpontot, ahol az előzőhöz képest teljesen más fizikai tulajdonságokat találhatunk, más kölcsönhatások dominálják az egyiket, mint a másikat. A legtöbb fizikai elmélet egy adott skálatartományban érvényes, abban jól ismertnek tekinti a kölcsönhatáso-

kat. Az RCS-módszer valódi ereje abban mutatkozik meg, hogy a skálatartományból kilépve alkalmas az elmélet kereteinek meghaladására, és hogy egy másik elmélethez vezessen bennünket.

Irodalom

1. N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J. M. Pawłowski, M. Tissier, N. Wschebor, *Phys. Rept.* 910 (2021) 1–114.
2. K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* 3 (1971) 1818.
3. S. Weinberg, in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, ed. S. W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1979.
4. C. Wetterich, *Phys. Lett. B* 301 (1993) 90–94.
5. T. R. Morris, *Int. J. Mod. Phys. A* 9 (1994) 2411–2450.
6. M. Reuter, *Phys. Rev. D* 57 (1998) 971–985.
7. F. Saueressig: *The Functional Renormalization Group in Quantum Gravity*. arXiv:2302.14152 [hep-th].
8. J. Polonyi, *Phys. Rev. D* 74 (2006) 065014.
9. F. Gégény, S. Nagy, K. Sailer, *Class. Quant. Grav.* 40 (2023) 045004.

A KIRÁLIS SZIMMETRIA HELYREÁLLÁSA AZ ERŐS KÖLCSÖNHATÁSBAN RENORMÁLÁSICSOPORT-MÓDSZERREL

Fejős Gergely

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Atomfizikai tanszék

Kenneth Wilson a renormálási csoport róla elnevezett változatát az 1970-es évek elején fedezte fel [1, 2]. Módszere a szűk 20 évvel korábban a *Stückelberg* és *Petermann* [3], illetve a *Gell-Mann* és *Low* [4] által lefektetett alapokra építkező matematikai apparátus. Utóbbi munkák a kvantum-elektrodinamika keretein belül, az elméletben megjelenő divergens átmeneti amplitúdóknak értelmet adó renormálás műveletén keresztül elsőként vizsgálták és vezették be a dilatációs transzformációt, amelyet ma a renormálási csoport egy elemének tekintünk. Utóbbihoz szorosan kapcsolódnak a renormálás skálájától függő úgynevezett futó csatolási állandók, amelyek szemléletes jelentése az, hogy a szóban forgó skálán milyen erősségű kölcsönhatások jönnek létre egy adott fizikai rendszerben. Közvetett használatukkal a feljebb idézett dolgozatok különböző korrelációs függvényei impulzusfüggésének – a szokvány perturbációs számításnál hatékonyabb – előállítását tették lehetővé.

Wilson, aki Gell-Mann diákjaként jól ismerte a kvantum-elektrodinamikán át megszületett renormálási csoportot, *Kadanoff* munkája [5] nyomán jött rá arra, hogy a kontinuum kvantum-mezőelméletek keretein belül lényegében elkerülhetetlen renormálás

művelete során bevezetett renormálási skála folytonos változtatása valójában a különböző hullámhosszú fluktuációk ki- és bekapcsolásával ekvivalens. Ennek nyomán mutatott rá arra, hogy a módszer alkalmazhatósága szempontjából szükségtelen kizárólag renormálható, kontinuummodellekre megszorítani vizsgálódásainkat, és a feljebb idézett szerzők által bevezetett skálatranszformációk így statisztikus fizikai (és ezáltal ultraibolya-levágást fizikailag tartalmazó) rendszerekre is lényegében a kontinuum mezőelméletekkel analóg módon alkalmazhatók. A wilsoni renormálási csoport így a korábbi változat természetes, és jóval intuitívabb általánosításának tekinthető.¹

Folytonos fázisátalakulások

A wilsoni renormálási csoport legnagyobb sikerét a másodrendű (folytonos) fázisátalakulások jellegzeteségeinek magyarázatával érte el. A 70-es évek előtt a folytonos átalakulások leírására a *Lev Landau* által kidolgozott elmélet [7] számított a legjobban működő modellnek. Az elmélet lényege az, hogy egy másodrendű vagy gyengén elsőrendű átalakuláshoz elegendően közel a mikroszkopikus szabadsági fokok megfelelő kiátlagolásával létrejön egy lokális, a rendszert jellemző rendparaméter, amely szerint sorba lehet fejteni a szabadenergiát, az egyes tagok matematikai alakját pedig a rendszert jellemző szimmetriák egyértelműen rögzítik. Az eljárás feltételezi, hogy minden hőmérsékleti fluktuáció lényegében elhanyagolható



Fejős Gergely (PhD 2011, ELTE részecskefizika) elméleti fizikus, az ELTE TTK Fizikai Intézetének egyetemi adjunktusa. Kutatásaiban erősen kölcsönható kvantummezőelméletekkel foglalkozik nemperturbatív funkcionális technikák alkalmazásával. Érdeklődési területei közé tartozik a kvark- és maganyag fázisstruktúrája, szupravezetés, topológus fázisátalakulások.

¹Az olvasó a wilsoni és térelméleti renormálási csoport-módszerek közötti kapcsolat pedagógus leírását találhatja például a [6] *Fizikai Szemle*-cikkben.

(így az úgynevezett átlagtérelmélettel ekvivalens), és kvalitatíven meglepően jó eredményeket ad. A kritikus pont környékén a redukált hőmérséklettel (vagy esetleg a távolsággal) skálázó fizikai mennyiségek kritikus exponensei azonban számos rendszerben nem egyeztek meg a tapasztalattal. További rejtélynek számított az is, hogy egymástól merőben különböző fizikai rendszerek a kritikus pont körül miként lehetnek képesek ugyanazt a viselkedést mutatni (univerzalitás).

Arra, hogy Landau modellje nem feltételek nélkül alkalmazható, *Ginzburg* már a 1960-as évek elején felhívta a figyelmet [8]. Könnyű látni, hogy ha a Landau-elmélet körül perturbációs számítás segítségével megpróbálunk fluktuációs korrekciókat számolni a szabadenergiához, amennyiben a térdimenzió $d < 4$, már az első nemtriviális rendben divergens járulékokat kapunk. Ezek úgynevezett infravörös divergenciák, amelyek a hosszú hullámhosszú fluktuációk hatására jönnek létre. Vegyük észre, hogy megjelenésük teljesen aláássa a Landau-elmélet alkalmazhatóságát, hiszen ha már az első korrekció divergál, akkor az előbbi biztosan rossz közelítés. A tanulság az, hogy másodrendű átalakulások során a minden határon túl növvő korrelációs hossz miatt a termális fluktuációkat tetszőlegesen nagy hullámhosszak esetén is relevánsnak kell tekinteni. Ehhez természetesen egy idealizált, térben végtelen kiterjedésű rendszert kell elképzelnünk. Szigorú értelemben egy véges térfogat mindígát szab a tetszőlegesen nagy hullámhosszú módusok fluktuációinak, ilyenkor valódi kritikus viselkedés nem is valósul meg.

A Landau-elmélet azért ad pontatlan eredményeket, mert a szabadenergia a kritikus pontban nem analitikus függvénye a rendparaméternek. Bármilyen csábító is feltételezni, hogy kicsiny rendparaméter esetén a szabadenergia bizonyára hatványsorba fejthető, utóbbi – a nagy hullámhosszú fluktuációk hatása miatt – matematikailag nem létezik. Semmi nem akadályozza azonban az elmélet olyan értelemben vett módosítását, hogy az infravörös fluktuációkat kihagyva a szabadenergiából, akkor az valóban analitikussá váljék, Taylor-sora létezik, és az (legalábbis praktikusan) konvergens. Wilson ötlete az volt, hogy a fluktuációk kiintegrálását úgy oldja meg, hogy magas hullámszámú módusok felől szukcesszíven közelít az infravörösekre felé, így sosem ütközik nemanalitikus viselkedésbe. A Taylor-együtthatók skálafüggésére ezzel csatolt, közönséges differenciálegyenleteket vezetett le, amelyek azt írják le, hogy a szabadenergia miként változik a skálatranszformáció során. A módszer annak felismeréséhez vezet el, hogy az előbbi, úgynevezett renormálásicsoport-egyenletek fixpontjaként nem csak a fluktuációktól mentes „szabad” elmélet létezik, hanem nemtriviális, kölcsönható változat(ok) is, amely(ek) ráadásul a fluktuációk kiintegrálása során a csatolási állandók terében vonzani tudják a

skálatranszformációk által generált trajektóriákat. Kiderül, ha a térdimenzió $d < 4$, akkor a kölcsönhatás és így fluktuációmentes elmélet (Landau modellje) taszító fixpont, és a másodrendű átalakulásokhoz tartozó skálázó viselkedést valamilyen új, nemtriviális fixpont írja le. Ezzel Wilson nem csak a Landau-elmélet korlátait tisztázta, de az univerzalitásra is magyarázatot adott, hiszen az infravörös irányba haladó trajektóriák a kezdőpontjuktól függetlenül ugyanazon fixpontba lehetnek képesek befutni. Szemléletesen azt lehet mondani, hogy a kritikus viselkedés szempontjából a Taylor-együtthatók kezdőértékei nem fontosak, a fluktuációk „kimossák” a rendszer mikroszkopikus részleteit, és a kritikus viselkedés szempontjából csak a fixpont számít. Utóbbi pedig lényegében csak a rendparaméter jellegétől, a dimenziószámától és a fizikai rendszer szimmetriáitól függ, amelyek így univerzalitási osztályokat hoznak létre.

A fixpontokhoz közeli trajektóriák releváns és irreleváns irányokra bonthatók. Minden olyan irány releváns (irreleváns), amely a fluktuációk kiintegrálása során kifelé (befelé) visz a fixpontból (fixpontba). Eszerint véges hőmérsékletű átalakulásokat pontosan egy releváns iránnyal rendelkező fixpontok írják le, ahol a releváns irány a redukált hőmérsékletnek kell megfeleljen. A rendszer csatolási állandóinak terében az ezen irányra vett vetület a kritikus hőmérsékleten azonosan eltűnik, így a trajektóriák renormálásicsoport-transzformációk során be tudnak folyni a fixpontba. Wilson megmutatta, hogy a szóban forgó átalakulást jellemző kritikus exponenseket a fixpont-hoz közeli futások egyértelműen meghatározzák.

Fontos tudni, hogy a wilsoni renormálási csoport perturbatív abban az értelemben, hogy a csatolási állandók futását (skála szerinti deriváltját) önmaguk szerint haladó sorként realizálja. Ez természetesen így is fejlettebb a szokvány perturbációs számításnál, amelyben például a mikroszkopikus elmélet egy kicsiny paramétere szerinti sorként állítanánk elő korrelációs függvényeket, de Wilson módszere ennek ellenére is valamelyest limitált. Kiderül, hogy d dimenzióban a futások zérushelyeiként előálló fixpontok helyzetét megadó számítás csak akkor konzisztens, ha $\varepsilon = 4-d$ elegendően kicsi, vagyis ha a dimenziószám „közel van” 4-hez. Ekkor a fixpontokban a skála szerint dimenziótlanított csatolások a módszer perturbatív jellegének megfelelően $\mathcal{O}(\varepsilon)$ rendűek. Meglepő módon a mérhető mennyiségekre, például kritikus exponensekre adódó, ε hatványaiként haladó sorokat a fizikailag leginkább érdekes $\varepsilon = 1$ -re elfolytatva már vezető rendben igen jó eredményeket kaphatunk például $O(N)$ szimmetriát mutató rendszerekre, lásd akár az Ising- ($N = 1$), XY- ($N = 2$) vagy Heisenberg-modell ($N = 3$) eseteit.

Az alábbiakban a Wilson által létrehozott keret működését az erős kölcsönhatás királis fázisátalakulására vonatkozóan tárgyaljuk.

Királis szimmetria a kvantum-színdinamikában

Az erős kölcsönhatást leíró kvantum-mezőelmélet, a kvantum-színdinamika egy $SU(3)$ mértékelmélet. Dinamikai változói a mértékmezők (gluonok) mellett a mértékcsoport fundamentális ábrázolása szerint transzformálódó fermionikus mezők is, a kvarkok. A kvantum-színdinamikában 6 különböző ízű kvark van, amelyek mindegyike a Lorentz-csoport szerinti bispinor ábrázolást is követ, vagyis bal- és jobbkezes projekciók direkt összegeként állnak elő. A kvarkokat ízeik szerint egy multipllettbe rendezve, annak bal- és jobbkezes projekcióira külön egy-egy íztérbeli unitér forgatást eszközölve észrevehető, hogy azokra zérus kvarktömegek esetén a kvantum-színdinamika Lagrange-függvénye teljesen érzéketlen. Ez azt jelenti, hogy általában N_f kvarkíz esetén a rendszerben (a mérték- és Lorentz-szimmetriák mellett) jelen van egy globális $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ királis szimmetria is, ahol az L (R) index a bal (jobb) kezes projekcióra utal. Mivel a kvarkok a valóságban tömeggel rendelkező objektumok (lásd a hierarchiát az 1. táblázatban), a királis szimmetria csupán közelítő érvényességgel bír. A fenomenológiát is szem előtt tartva észrevehető, hogy például egy tipikusan ~ 1 GeV karakterisztikus energiájú folyamat szempontjából az $N_f = 3$ eset nagyon jó közelítő szimmetria, míg ~ 100 MeV-nél csak az $N_f = 2$ eset tűnik megfelelőnek.

A bal- és jobbkezes transzformációk helyett érdemes úgynevezett vektor- és axiálvektor-transzformációkra áttérni. Ha a balkezes (jobbkezes) transzformációk paramétereit θ_L^a (θ_R^a) jelöli ($a = 0, 1, \dots, 8$ az $U(3)$ csoport Lie-algebrájának dimenziója szerint), akkor a vektor- és axiálvektor-transzformációkat rendre a

$$\theta_{V/A}^a = \frac{\theta_L^a \pm \theta_R^a}{2}$$

paraméterek definiálják. Ez az áttérés azért hasznos, mert a kvantum-színdinamikában a vákuum topologikus fluktuációi (úgynevezett instanton megoldások) az $U_A(1)$ részcsoporthoz tartozó szimmetriát anomáliásan sértik, és ennek megfelelően királis szimmetria alatt általában az $SU_R(N_f) \times SU_L(N_f) \times U_V(1)$, vagy másképp az $SU_V(N_f) \times SU_A(N_f) \times U_V(1)$ csoport által generált transzformációkra mutatott invarianciát értjük (az $U_V(1)$ faktort gyakran teljesen elhagyjuk a tárgyalásból).

Az erős kölcsönhatás alacsony energián a kvarkokat kompozit részecskékbe, hadronokba (például mezonokba, barionokba) zárja, amelyek a tapasztalat szerint nem az $SU_V(3) \times SU_A(3)$, hanem az $SU_V(3)$ csoport irreducibilis ábrázolásai szerint rendezhetők multiplettekbe. Könnyen belátható, ha az erős kölcsönhatás alapállapotában az $SU_V(3) \times SU_A(3)$ szimmetria fennállna, akkor minden irreducibilis ábrázoláshoz tartozó, például pozitív paritású állapot negatív paritású part-

| íz | tömeg |
|---------|----------------------|
| down | 4,8 MeV |
| up | 2,3 MeV |
| strange | 95 MeV |
| charm | 1275 MeV |
| bottom | 4180 MeV |
| top | $1,7 \cdot 10^6$ MeV |

nerre is azonos tömeggel kellene megjelenjen a spektrumban. Ezzel ellentétben azt látjuk, hogy a mezon-spektrum könnyű, pszeudoskalár szektorához még csak közelítőleg hasonló tömegű pozitív paritású társakat sem találunk. Ez arra utal, hogy az erős kölcsönhatás alapállapotában a királis szimmetria az $SU_V(3) \times SU_A(3) \rightarrow SU_V(3)$ mintázatot követve spontán sérül. Az egzakt globális szimmetriák spontán sérülése esetén a spektrumban pontosan nulla tömegű Goldstone-bozonok jelennek meg, királis szimmetria esetén azonban – annak közelítő jellege miatt – a legkönnyebb pszeudoskalár mezonok is véges (nemnulla) tömegűek, a pionra $M_\pi \approx 140$ MeV, míg a hierarchiában a rákövetkező kaonra $M_K \approx 494$ MeV mérhető.

Abból a felismerésből, hogy a királis szimmetria $SU_A(3)$ részcsoportja az, ami az alapállapotnak nem szimmetriája belátható, hogy előbbi a $\langle \bar{q}_i q_j \rangle$ úgynevezett királis kondenzátum alapállapotú nemeltűnő várható értéke generálja, ahol q_i a kvarkmezők izmultipllettjére utal, $i = 1, 2, 3$ (spinor és színindexek kiírása nélkül), \bar{q}_i pedig a Dirac-adjungált. Ha a királis szimmetria egzakt dinamikai szimmetria lenne, akkor a kondenzátum az egységmátrixszal arányos, de a véges kvarktömegek következményeként az egyes komponensek valójában felhasadnak. Ha például a ritka (strange) kvark tömegét közelítőleg sem tekintjük az u- és d-kvarkok tömegével egyenlőnek (vagyis $N_f = 2$ királis szimmetriát veszünk), akkor csak $i = 1, 2$ -re kapunk (közelítőleg) azonos várhatóértékeket, az $i = 3$ -hoz tartozó ritka-kvark-kondenzátum teljesen felhasad.

Ha alacsony hőmérsékleten a szimmetria spontán sérül, akkor a rendszert felhevítve, annak előbbutóbb helyre is kell állnia. Nagyon természetes kérdésként adódik, hogy a királis szimmetria helyreállása milyen rendű átalakulás során megy végbe. Emlékezzünk rá, hogy a szimmetria nem egzakt, hiszen azt a kvarktömegek expliciten sértik, ezért számos különböző variáció képzelhető el. Ha az átalakulás egzakt szimmetria esetén például másodrendűnek adódna, akkor biztosak lehetünk benne, hogy egy külső mágneses térbe helyezett ferromágnissal analóg módon a rendparaméter eltűnése valójában egy sima *crossover* mentén kell történnjen. Ha azonban azt találnánk, hogy

nulla kvarktömegek mellett az átalakulás elsőrendű, az akár véges kvarktömegek esetén is fennmaradhat, sőt másodrendűvé is válhat, vagy elegendően erős explicit sértés (nagy kvarktömegek) esetén szintén crossoverré alakul. A kérdés, amit a renormálásicsoport-módszerrel meg szándékozunk válaszolni az az, hogy nulla kvarktömegek mellett milyen az átalakulás rendje. Ebből természetesen a fizikai esetre az explicit sértés mértékéből következtetni fogunk tudni.

Királis átalakulás ε -sorfejtésben

Ahogy írásunk elején már idéztük, a Landau-paradigma szerint, ha egy fizikai rendszer közel van egy folytonos fázisátalakuláshoz, benne a mikroszkopikus szabadsági fokok megfelelő kiátlagolása nyomán létrejön egy, az átalakulási ponttól való távolságot jellemző lokális rendparaméter, amely szerint az ultrabolya szabadenergia (amelyből az infravörös járulékok kihagyandók) sorbafejthető. Mivel a fentiek szerint a királis szimmetriasértés a $\langle \bar{q}_i, q_j \rangle$ királis kondenzátum megjelenése nyomán megy végbe, várakozásaink szerint a rendparaméter egy, az előbbi kombináció transzformációs tulajdonságait öröklő, Φ_{ij} 3×3-as komplex mátrixszal reprezentálható. Ezen a változón, mint statisztikus fizikai mezőn a királis szimmetria $\Phi \rightarrow L\Phi R^\dagger$ módon ábrázolódik, ahol L (R) a bal (jobb) kezes projekciókhoz tartozó unitér operáció.

Munkahipotézisként tegyük fel, hogy a királis átalakulás másodrendű, és próbáljuk meg beazonosítani az átalakuláshoz tartozó renormálásicsoport-fixpontot. Landau szerint első feladatunk az, hogy a szabadenergia legáltalánosabb olyan alakját megadjuk, amely invariáns az előbbi transzformációra nézve. Megengedve a rendparaméter térbeli változásait is, a szabadenergia sora az átalakuláshoz közel az

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \int d^d x \left[\text{Tr}[\partial_i \Phi^\dagger \partial_i \Phi] + m^2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] + \right. \\ \left. + g_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 + \right. \\ \left. + g_2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi \Phi^\dagger \Phi] + \dots \right] \end{aligned} \quad (1)$$

alakba írható, ahol a negyedrenden túli tagokat elhanyagoltuk. Ennek oka az, hogy megmutatható, hogy utóbbiak a korábban tárgyalt ε -sorfejtés vezető rendjében ($d = 4$ -hez elegendően „közel”) nem tudnak járulékot adni a futásokhoz. Az (1) szabadenergia renormálási csoport folyamatait elsőként *Pisarski* és *Wilczek* vizsgálta [9], és N_f ízsám mellett a dimenziótlanított negyedrendű csatolások futására (a skálát k -val jelölve) a

$$k \partial_k g_1 = -\varepsilon g_1 + \frac{N_f^2 + 4}{4\pi^2} g_1^2 + \frac{N_f}{\pi^2} g_1 g_2 + \frac{3 g_2^2}{4\pi^2} \quad (2a)$$

és a

$$k \partial_k g_2 = -\varepsilon g_2 + \frac{3}{2\pi^2} g_1 g_2 + \frac{N_f}{2\pi^2} g_2^2 \quad (2b)$$

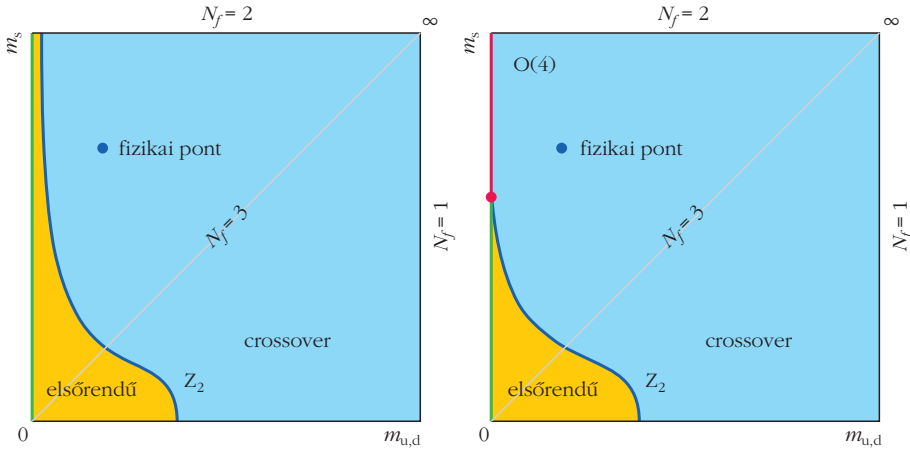
differenciálegyenleteket kapták, ahol kihasználták azt is, hogy egy lehetséges kritikus viselkedéshez tartozó fixpontban m^2 értéke $\mathcal{O}(\varepsilon)$, és így elhanyagolható. Az utóbbihoz tartozó irány $d = 4$ -hez elegendően közel biztosan releváns, ezért a (2) egyenletek olyan megoldásait kell keresni, amelyek infravörösen stabilak, azaz a g_1 - g_2 síkban a fixpontba bármilyen irányból befelé futnak a skálatranszformációk által generált trajektóriák. A futások rövid vizsgálata után az derül ki, hogy $N_f > \sqrt{3}$ esetén (vagyis a minket érdeklő összes esetben) a triviálisan kívül csak olyan fixpont létezik, amelyre $g_1 \neq 0$, de $g_2 = 0$, ami lényegében egy $O(2N_f^2)$ szimmetriájú elmélet már Wilson által is megtalált fixpontja. Jelen esetben a fő különbséget azonban az jelenti, hogy a fixpont nem infravörösen stabil, mert a g_2 irányba csak kifutó trajektóriákat találunk. Eszerint az (1) által leírt rendszerben az $O(2N_f^2)$ fixponthoz nem tartozhat termális folytonos fázisátalakulás, hiszen az nem pontosan egy releváns iránnyal bír. Következésképpen, ha a szimmetria helyreállása egyáltalán bekövetkezik, akkor az kizárásos alapon elsőrendű átalakulás során mehet végbe.

Mindezidáig nem vettük figyelembe az $U_A(1)$ részcsoporthoz tartozó anomális sérülését. A szabadenergiába ezt legalacsonyabb rendben egy

$$a(\det \Phi^\dagger + \det \Phi) \quad (3)$$

taggal lehet betenni. $N_f = 3$ esetén a rendparaméter függvényében ez egy köbös járulékot ad a szabadenergiába, ami nem tudja az elsőrendű átalakulást másodrendűvé változtatni, hiszen ahhoz páros hatványú térfüggésre volna szükség. Vegyük észre, hogy $N_f = 2$ esetben azonban (3) kvadratikus a rendparaméterben, amelynek következtében elegendően nagy a anomáliacsatolás esetén megmutatható, hogy a fluktuációs spektrumnak éppen a fele nagy tömegűvé válik. Ezen gerjesztések azonban a kritikus viselkedéshez várhatóan nem tudnak hozzájárulni, így mivel a szimmetriacsoport ekkor $O(4)$ lesz, azt várjuk, hogy az átalakulás másodrendűvé változik, az előbbi csoport kritikus exponenseivel. Ezt a képet később az összes, m^2 , g_1 , g_2 , a csatolási állandókra felírt renormálásicsoport-egyenletek is visszaigazolták [10]. Az eredmények szerint szigorú értelemben az anomália csatolásának végtelen nagy értéket adva az $O(4)$ fixpont infravörösen stabillá válik, így ekkor az átalakulás másodrendű.

Összegzésként elmondható, hogy a renormálási csoportból következő ε -sorfejtés vezető rendű jóslata szerint az erős kölcsönhatás királis fázisátalakulása $N_f = 3$ királis szimmetria esetén mindenképpen elsőren-



1. ábra. A királis fázisátalakulás rendjére vonatkozó jóslatok a renormálási csoport ϵ -sorfejtése alapján a könnyű (u, d) és ritka (s) kvarktömegek függvényében. Bal oldalon a kritikus pontban már helyreállt $U_A(1)$ szimmetria melletti, míg a jobb oldalon a kellően erős anomáliaparamétert feltételező eredmények láthatók. Az elsőrendű és crossover tartományok között folytonos átalakulások vannak.

dű, de $N_f = 2$ esetén, amennyiben az $U_A(1)$ anomália elegendően erős marad a kritikus pontban, az másodrendű, lásd az 1. ábrát. Arról, hogy az $U_A(1)$ részcsoport anomális sérülése az átalakulás hőmérséklete felé haladva hogyan változik, a Landau-féle szabadenergia nem tud számot adni, az a paraméter pontos hőmérsékletfüggése nem ismert. Ennek kutatása a mai napig aktív terület, és a kvantum-szindinamika véges hőmérsékletű dinamikája szabja meg.

Az ϵ -sorfejtés érvénytelensége és a nemperturbatív renormálási csoport

Az idáig idézett eredmények az elmúlt közel 40 évben széles körben elfogadottá váltak, számtalan tankönyv és tanulmány hivatkozta őket. A közelmúltban azonban olyan állítások jelentek meg az irodalomban, amelyek szerint az ϵ -sorfejtés a királis szimmetria leírása szempontjából nem ad megbízható eredményeket. A számítógépes kapacitás rohamos növekedésével a kvantum-szindinamika téridőrácsos történő szimulálása egyre alacsonyabb kvarktömegek mellett is egyre pontosabb eredményeket szolgáltat. Szűk 2 évvel ezelőtt több olyan tanulmány jelent meg vezető folyóiratokban, amelyek szerint zérus kvarktömegek mellett a véges hőmérsékletű királis fázisátalakulás a kvarkízek számától függetlenül másodrendűséget mutat [11, 12]. Ez komoly összetűzésben van $N_f = 3$ esetén a renormálási csoport-módszerből kapottakkal, hiszen az ϵ -sorfejtés ez esetben mindenképpen elsőrendű átmenetet jósol. Ha bízunk a rácsszámítások helyességében, akkor a problémát a renormálási csoport perturbatív jellegében, és így az ϵ -sorfejtésben kell keresnünk.

Mivel a wilsoni renormálási csoport konstrukció szerint perturbatív, ahhoz, hogy az ϵ -sorfejtést meg tudjuk haladni, a nemperturbatív (vagy funkcionális) renormálási csoport (FRG) módszerét kell alkalmaz-

nunk. Az FRG a wilsoni változat általánosítása abban az értelemben, hogy segítségével nem csak az egyes Taylor-egyetthezők skálafüggését lehet kinyerni, hanem a módszer egy kompakt futási egyenletet származtat magára a teljes szabadenergia-funkcionálra, amelyet nem kötelező perturbációs számítás segítségével megoldani. Ezt az egyenletet először C. Wetterich vezette le, ezért rá Wetterich-egyenletként is szokás hivatkozni [13].

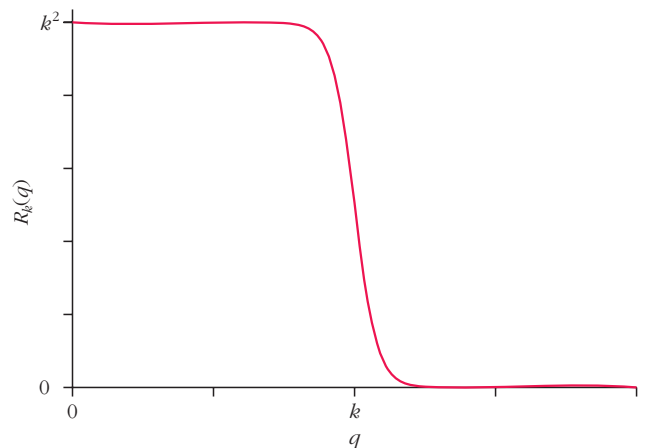
A Wetterich-egyenlet egy funkcionális integro-differenciálegyenlet, amelynek kö-

zéppontjában a skálafüggő \mathcal{F}_k szabadenergia áll. Az FRG-módszer szerint a szabadenergia futása az alábbi módon áll elő:

$$\partial_k \mathcal{F}_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_k R_k \left(\mathcal{F}_k^{(2)} + R_k \right)^{-1} \right], \quad (4)$$

ahol $\mathcal{F}_k^{(2)}$ az \mathcal{F}_k funkcionál második deriváltjaiból képzett mátrix, a trace operációt pedig funkcionális és mátrixértelemben is kell tekinteni. Az egyenletben felbukkanó R_k függvényt infravörös regulátornak hívjuk, amelynek feladata a skálaszeparáció. Segítségével választjuk szét azon módusokat, amelyek bekerülnek \mathcal{F}_k -ba azoktól, amelyeket a potenciális infravörös szingularitások miatt ki szeretnénk hagyni. (A korábbi jelölést folytatva ezen skálát ismét k -val jelöltük). Az R_k függvény feladata lényegében az, hogy elnyomja az alacsony hullámszámú módusokat, praktikusán valamilyen nagy tömeget adva nekik. Egy tipikus R_k regulátorfüggvényt Fourier-térben ábrázolva láthatunk a 2. ábrán.

2. ábra. Egy tipikus infravörös regulátorfüggvény a nemperturbatív renormálási csoport futási egyenletében.

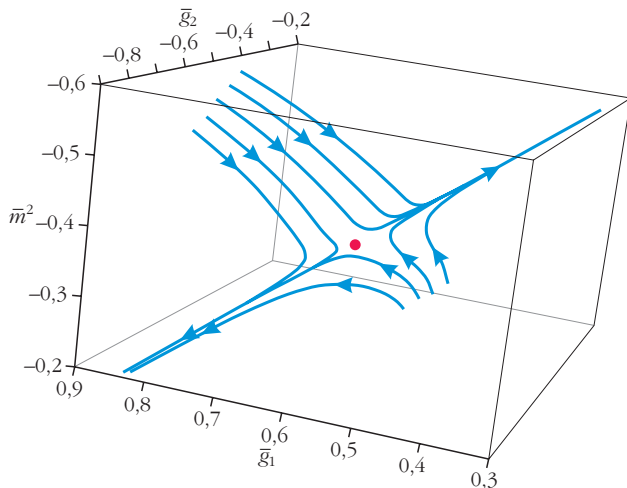


A Wetterich-egyenletet arra szeretnénk használni, hogy egy, az (1) ansatznál általánosabb alakú szabadenergia-funkcionál futását meghatározzuk. Ehhez most már nem kötelező $d = 4$ -hez közel dolgozni, egy, az \mathcal{F}_k -ra felállítandó új anszot (4)-be behelyettesítve, annak futása tetszőleges dimenzióban megkapható. Ami feltétlenül túlmutat (1)-en, az a magasabb rendű tagok bevétele a szabadenergiába. Mivel $d = 4$ -hez közel csak minden, a kvadratikusan túl operátor az, ami irreleváns, a dimenzióanalízis szerint azt várjuk, hogy ha létezik eddig nem látott fixpont, és az nincs nagyon messze a triviálistól, akkor közvetlenül $d = 3$ -ban mindenképpen hatodrendű szükséges elmenni.

A részletek elemzése nélkül közöljük, hogy az előbbi stratégiát követve $N_f = 3$ esetén összesen 9 csatolási állandó jelenik meg a szabadenergiában. A Wetterich-egyenletet rendről rendre az egyes tagokra projektálva ezen 9 csatolási állandó futása az ε -sorfejtés alkalmazása nélkül, közvetlenül $d = 3$ dimenzióban megkapható [14]. A közelítéshez optimalizált regulátorral dolgozva az FRG-módszer eredménye nem igazolja vissza az ε -sorfejtés jóslatait, mert a fenti csatolási állandók 9-dimenziós terében léteznek új fixpontok. Az eredmények természetesen reprodukálják a triviális és $O(N)$ fixpontokat, de ezeken kívül még két másikat is mutatnak.

Ahogy cikkünk elején felidéztek, egy véges hőmérsékletű átalakuláshoz olyan fixpontra van szükség, amelyhez pontosan egy releváns irány tartozik. Az újonnan megtalált fixpontok közül egyik sem ilyen, 2 és 4 releváns iránnyal rendelkeznek. Az előbbihez tartozó struktúra viszont azt mutatja, hogy ha az összes olyan operátort kivesszük a szabadenergiából, amely az $U_A(1)$ anomáliát írja le, vagyis feltesszük, hogy az $U_A(1)$ szimmetria helyreáll a kritikus pontban, akkor a releváns irányok száma pontosan 1, lásd a 3.

3. ábra. Új fixpont létezése az erős kölcsönhatásban pontosan egy releváns iránnyal a funkcionális renormálási csoport-futások alapján. Az ábrán csak a legalacsonyabb dimenziós operátorokhoz tartozó irányok alterét tüntettük fel.



ábrát. Ez azt jelenti, hogy az FRG jóslata merőben eltér a perturbatív ε -sorfejtés eredményétől, ugyanis azt látjuk, hogy $N_f = 3$ -ra az átalakulás csak akkor lehet másodrendű, ha az axiális anomália eltűnik a kritikus pontban. Eredményeinket fordítva is interpretálhatjuk, mert ha elfogadjuk (például rácsszimulációk alapján), hogy a királis fázisátalakulás másodrendű $N_f = 3$ kvarkíz esetén, akkor a renormálási csoport jóslata valójában az, hogy az anomália el kell tűnjön a kritikus pontban.

A fizikai esetre vonatkozóan azt prognosztizálhatjuk, hogy az átalakulás egy sima crossover, de ennek oka nem a kvarkok nagy tömege, ugyanis a nemperturbatív renormálási csoport eredményeinek üzenete éppen az, hogy ez a kép akár tetszőlegesen kicsi explicit szimmetriasértés esetén is megmarad. Tehát valószínűsíthetően nem létezik egy olyan határvonal a könnyű és ritka kvarkok által kifeszített síkon, amelyet átlépve a királis szimmetria elsőrendűből másodrendűvé, majd crossoverré változna.

Záró megjegyzések

A Kenneth Wilson által felfedezett renormálási csoport jelentősége óriásivá vált az elmúlt 50 évben. A módszer teljesen újrírta azt a képet, amelyet a renormálhatóságról, kvantummezők elméletéről és effektív modellekről odáig gondoltak. Nem pusztán kapcsolatot teremtett a statisztikus mechanika és az elemi részek kvantumelmélete között, de a technika segítségével a skálatranszformációk szerepe is mélyebb megértést nyert a fizikában. Bár felfedezésekor a másodrendű fázisátalakulások elméletében aratott korszakalkotó sikert, később olyan problémák magyarázatára is megoldást adott, mint a Kondo-effektus, vagy a két térdimenzióban bekövetkező topologikus fázisátalakulások mechanizmusa.

A wilsoni módszer természeténél fogva perturbatív, és a $d = 4 - \varepsilon$ dimenzióban kiszámított skálafutások számos elmélet esetén az $\varepsilon = 1$ extrapoláció mellett is jó eredményeket adnak. Az erős kölcsönhatásban fellépő királis szimmetria helyreállása esetén azonban az ε -sorfejtés minden bizonnyal csődöt mond. Írásunkban rámutattunk, hogy a wilsoni renormálási csoport nemperturbatív általánosítása merőben más eredményekre vezet, mint amit az előbbi ε -sorfejtésben produkál. Úgy véljük, hogy a renormálási csoport nemperturbatív általánosítása azért működik jobban, mert a királis szimmetria bonyolultsága miatt sokkal többféle operátor jelenlétét engedi meg a szabadenergia-funkcionálban, mint az egyszerűbb szimmetriájú rendszerek. Ezen operátorok tipikusan irrelevánsak $d = 4$ dimenzióhoz közel, ezért a konzisztencia miatt az ε -sorfejtésben elhanyagolhatónak adódnak, de expliciten $d = 3$ dimenzióban meg kell őket tartani. Mivel a számosságuk is nagy, ezért a hozzájuk tartozó csato-

lási állandók tere, amibe új fixpontok tudnak beleférni, is sokkal bővebb. Az, hogy a nemperturbatív renormálási csoport eredményei mennyire robusztusak a szabadenergia-funkcionál további tagokkal történő kiegészítésére nézve, továbbra is nyitott kérdés, és jelenleg is folyó kutatások tárgya.

Irodalom

1. K. G. Wilson, *Phys. Rev. B* 4/9(1971) 3174.
2. K. G. Wilson, *Phys. Rev. B* 4/9(1971) 3184.
3. E. C. G. Stueckelberg, A. Petermann, *Helv. Phys. Acta.* 26(1953) 499.

4. M. Gell-Mann, F. Low, *Phys. Rev.* 95/5(1954) 1300.
5. L. P. Kadanoff, *Physics* 2(1966) 263.
6. Fejős G., *Fizikai Szemle* 72/3(2022) 70.
7. L. D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 7(1937) 19–32.
8. V. L. Ginzburg, *Sov. Phys. – Solid State.* 2(1961) 1824.
9. R. D. Pisarski, F. Wilczek, *Phys. Rev. D* 29(1984) 338.
10. M. Grahl, D.-H. Rischke, *Phys. Rev. D* 88(2013) 056014.
11. F. Cuteri, O. Philipsen, A. Sciarra, *J. High Energy Phys.* 11(2021) 141.
12. L. Dini, P. Hegde, F. Karsch, A. Lahiri, C. Schmidt, S. Sharma, *Phys. Rev. D* 105(2022) 034510.
13. C. Wetterich, *Phys. Lett. B* 301(1993) 90.
14. G. Fejos, *Phys. Rev. D* 105(2022) L071506.

KVANTUMTÉRELMELET RÁCSON

Kovács Tamás György
ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék
és Atomki, Debrecen

A renormálási csoport-módszer legfőbb jelentősége, hogy általános gondolkodási keretet biztosít annak megértésére, hogy különböző fizikai rendszerekben az effektív kölcsönhatások miként függnek attól, hogy a rendszert milyen távolságskálán vizsgáljuk. E cikkben ennek egy konkrét példáját, a kvantumtérelméletek rácson való megfogalmazását fogjuk áttekinteni. A rács térelmélet ebből a szempontból azért is különösen érdekes, mert közvetlen kapcsolatot teremt a renormálási csoportnak a kvantumtérelméletekben és a kritikus jelenségek (fázisátalakulások) elméleti leírásában való alkalmazása között. *Kenneth Wilson* ugyan a kritikus jelenségek elméletében elért eredményeiért kapta a Nobel-díjat, de kiemelkedő szerepe volt e két terület közötti kapcsolat megteremtésében is, és – ahogyan az alábbiakban látni fogjuk – jelentősen hozzájárult a rács-kvantumtérelméletek máig használt formalizmusának kifejlesztéséhez.

Az alapvető kölcsönhatásokat leíró standard modell mikroszkopikus, szubatomi részecskéket ír le széles energiatartományban, ahol ezek a részecskék akár fénysebességhez közeli sebességgel is mozoghatnak. Emiatt a részecskéket leíró elmélet mindenképp relativisztikus kell legyen, és mivel mikroszkopikus részecskékről van szó, leírásukhoz kvantumme-

chanikát kell használnunk. A múlt század közepén sikerült olyan elméleteket megfogalmazni, amelyek mind a speciális relativitáselmélet, mind a kvantummechanika alapelveit tartalmazzák, ezeket összefoglaló néven kvantumtérelméleteknek nevezzük. A kvantumtérelmélet első nagy sikere volt, amikor *Dirac* pusztán elméleti úton megjósolta az elektron antirészecskéje, a pozitron létezését, amit nem sokkal később kísérleti úton is kimutattak.

Kvantálás és matematikai definíció

A kvantumtérelméletek mindegyike egy, az elektrodinamikához hasonló klasszikus térelméletből indul ki, amelyet kvantálnunk kell. Ez általában többféleképpen is megvalósítható, de kiderült, hogy a legáltalánosabban használható kvantálási módszer a Feynman-féle pályaintegrál segítségével fogalmazható meg. A pályaintegrál lényege, hogy egy kvantummechanikai rendszer kezdeti és végállapota közötti átmeneti amplitúdót úgy is kiszámolhatjuk, hogy a két állapotot összekötő összes klasszikus pályára kiértékeljük az S hatást,¹ majd az összes pályára összegezzük az e^{iS} mennyiséget. Az így kiszámolt átmeneti amplitúdó abszolútérték-négyzete adja az átmenet valószínűségét.

Már a kvantummechanikában sem triviális, hogy matematikailag miként definiálható az összes klasszikus pályára való összegzés, ugyanis kontinuum sok



Kovács Tamás György az ELTE Elméleti Fizikai Tanszékének egyetemi tanára, 1990-ben végzett fizikusként a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen (ma Debreceni Egyetem), majd 1996-ban szerzett PhD fokozatot a UCLA-n. Kutatási témája az elméleti részecskefizika, a rács-térelmélet.

¹A hatás a kinetikus és potenciális energia különbségeként előálló Lagrange-függvény idő szerinti integrálja, amelyből leszámazhatók a rendszer dinamikáját leíró differenciálegyenletek. Tárgyalásunk szempontjából csak az a lényeges, hogy ez a szám a rendszer minden klasszikus időtörténetéhez (pályájához) egyszerűen hozzárendelhető.

pályáról van szó, így nem egyértelmű, hogyan „számoljuk meg” ezeket, hogyan összegezzünk minden pályára. A kvantumtérelméletben e probléma még súlyosabb, ugyanis itt a klasszikus pálya valójában egy klasszikus mező adott kezdeti és végállapotát összekötő teljes időfejlődését jelenti, vagyis a mező összes olyan konfigurációjára összegeznünk kell, amely a kezdeti és végállapotbeli határfeltételeket teljesíti. Nem világos, ezt az összegzést hogyan lehetne matematikailag precízen definiálni. A rácstérelmélet alapötlete, hogy a folytonos téridőn egy képzeletbeli diszkrét téridőrácsot vezetünk be, és az elméletben szereplő mezők értékeit csak e rács rácspontjain tekintjük. Ez azt jelenti, hogy míg az eredeti térelmélet esetén véges fizikai térfogatban végtelen sok szabadsági fokkal kell dolgoznunk (a mezők értéke a tér minden pontjában), ezt a rendszert egy véges szabadsági fokú rendszerrel közelítjük. Ebben már pontosan definiálható a Feynman-féle pályaintegrál, ugyanis csak a mezők rácspontokban felvett értékeire kell integrálnunk. Ez azt jelenti, hogy bár nagyon sok, de véges számú valós változóra vett integrált kell kiszámolnunk, ami már matematikailag jól definiált.

A rácsmodell azonban csak a valóságban folytonos téridőn létező mezők közelítését adja. Ez a közelítés viszont egyre pontosabbá válik a rács finomításával, a rácsállandó csökkentésével. A valódi fizikai eredményeket kontinuumlímeszben kapjuk, amikor a rácsállandó nullához tart. Ez a límesz adja a kvantumtérelméletek matematikai definícióját, amely teljesen analóg az egyváltozós függvények Riemann-integráljának definíciójával, ott szintén egy minden határon túl finomított diszkrét felosztást alkalmazunk.

Monte-Carlo-szimuláció rácson

Amint azt a következőkben látni fogjuk, a kvantumtérelméletek rácson történő megfogalmazása nemcsak precíz matematikai definíciót eredményez, hanem hatékony numerikus számolási módszert is ad, amely sok esetben az egyetlen lehetőség fizikai mennyiségek első elvekből való kiszámolására kontrollált, elvileg tetszőlegesen pontossá tehető közelítéssel. Erre a legfőbb példa az erős kölcsönhatás elmélete, a kvantum-szindinamika, amelynek alacsonyenergiás viselkedését erős, az energia csökkenésével egyre növekvő csatolás jellemzi, így e tartományban a renormált perturbációs számítás nem alkalmazható.

Ahhoz, hogy a rácson megfogalmazott eleméletből fizikai mennyiségeket tudjunk meghatározni, ki kell számolnunk a rácspontokban lévő dinamikai változókra az integrálokat, vagyis ki kell értékelnünk a pályaintegrált. Itt az első problémát az jelenti, hogy az integrandus, e^{iS} – amit összegeznünk kell az összes konfigurációra – a változóinak gyorsan oszcilláló függvénye, így a numerikus számolás esélytelen. Ezt a

problémát úgy tudjuk elkerülni, hogy a $t \rightarrow it$ transzformációval formálisan elfolytatjuk az elméletet képzetes időbe, és felhasználva a különböző fizikai mennyiségek ismert analitikus tulajdonságait, a képzetes időbe elfolytatott euklideszi elméletből állítjuk vissza az eredeti elméletbeli értékeket. Az analitikus elfolytatás legfontosabb következménye, hogy a képzetes fázisfaktorokból $e^{iS} \rightarrow e^{-S}$ valós exponenciális tényezők lesznek, amelyek hasonlóak a statisztikus fizikában a mikroállapotok valószínűségét adó $e^{-E/kT}$ Boltzmann-faktorhoz, ahol T a hőmérséklet, k a Boltzmann-állandó. Valóban, egy 3+1 téridő dimenziós kvantumtérelmélet ebben a megfogalmazásban matematikailag ekvivalens egy négydimenziós statisztikus fizikai rendszerrel, amelynek a szabadsági fokai lokálisan hatnak kölcsön egymással. A pályaintegrál a statisztikus fizikai rendszer állapotösszege lesz, a különböző fizikai mennyiségek pedig statisztikus várhatóértékek formájában számolhatók ki.

Az ilyen statisztikus fizikai rendszerek numerikus kezelésére hatékony módszerek léteznek. Ezek mindegyike azon alapul, hogy bár az átlagolásokat a rendszer összes mikroállapotára kell kiterjeszteni, egy adott hőmérsékleten valójában a mikroállapotoknak csak egy töredéke ad lényeges járulékot, ezek a mikroállapotok pedig a fontossági mintavételezés segítségével hatékonyan megtalálhatók. Ilyen módon a rácstérelméletben számítógépes Monte-Carlo-szimuláció segítségével számolhatók ki a fizikai mennyiségek.

A ráczállandó

Az eddigi tárgyalásunkból nem világos azonban, hogy miként tudunk kapcsolatot teremteni a számítógépes szimulációk és a kísérletileg megfigyelt valóság között. A fizikai elméletekben ez mindig úgy történik, hogy az elmélet szabad paramétereit úgy állítjuk be, hogy néhány, az elméletből számolt fizikai mennyiség értéke egyezzen a mért értékekkel. Miután így módon rögzítettük a szabad paraméterek értékét, újabb fizikai mennyiségeket kiszámolva, ezek az elmélet jóslatai lesznek.

A kvantumtérelméletek szabad paramétereit az elemi részecskék tömegei és a kölcsönhatásaikat jellemző csatolási állandók. A rácsszimulációkban ezeket a paramétereket tudjuk változtatni. Fontos megjegyezni, hogy míg a valóságban e paraméterek sokszor fizikai dimenzióval rendelkeznek, a számítógépes szimulációkban mind a paraméterek, mind a kiszámolt fizikai mennyiségek dimenziótlanak, vagy úgy is mondhatjuk, hogy ráczállandóságokban vannak meghatározva.² De, ha a számítógépen minden meny-

²A részecskefizikában két alapvető konstans, a Planck-állandó és a fénysebesség segítségével minden fizikai mennyiség kifejezhető egyetlen dimenzió segítségével, ami lehet például a távolság.

nyiség dimenziótlan, akkor mekkora egy adott szimulációban a rácsállandó fizikai egységekben (például femtométerben) kifejezve? Ezt egyrészt azért fontos tudnunk, mert – ahogy korábban írtuk – a rácsot szeretnénk minden határon túl finomítani, vagyis a fizikai rácsállandóval nullához szeretnénk tartani. Másrészt a fizikai rácsállandó ismerete azért is alapvető fontosságú, mert ennek segítségével tudjuk átváltani a rácson kiszámolt dimenziótlan (rácsegységekben adott) mennyiségeket valódi, fizikai dimenzióval rendelkező mennyiségekre, amelyek közvetlenül összehasonlíthatók a mérések eredményeivel.

Meg kell mérnünk tehát a rácsállandót. Ezt pontosan úgy tehetjük meg, ahogyan egy négyzetrácsos füzetlap rácsállandóját meghatározzuk egy ismert hosszúságú pálcá segítségével: megmérjük a pálcát rácsegységekben, vagyis megszámoljuk, hogy a rácsállandó hányszor fér a pálcára, majd a pálcá ismert fizikai hosszából számoljuk ki a rácsállandót. A rács-térelméletben az ismert hosszúságú pálcának például egy részecske kísérletileg meghatározott tömege felelhet meg. A rácson definiált elmélet (dimenziótlan) paramétereit valamely értékekre beállítva kiszámoljuk a részecske tömegét. Az eredményt természetesen dimenziótlan rácsegységekben kapjuk, és az adott részecske kísérletileg ismert fizikai tömegét használjuk a fizikai rácsállandó meghatározására. Az eljárást a rácselmélet paramétereinek tetszőleges értékeire elvégezhetjük, és meghatározhatjuk az adott paraméterekhez tartozó fizikai rácsállandót, majd a paramétereket úgy kell hangolnunk, hogy ez a rácsállandó nullához tartson.

A kontinuumlimesz

Ahhoz, hogy a fent vázolt folyamatot kicsit jobban megérthessük, beszélnünk kell arról, hogyan lehet egy részecske tömegét kiszámolni a rácson. Ehhez azon folyamat amplitúdóját kell meghatároznunk, amelyben a nulla időpillanatban egy ilyen részecskét keltünk, majd t idővel később eltüntetünk, vagyis a részecske t ideig létezik. A rácsszámolásban ez egy $\langle \mathcal{O}^\dagger(0) \mathcal{O}(t) \rangle$ várhatóérték meghatározását jelenti, ahol \mathcal{O} a rácson értelmezett mezőkből összerakott lokális mennyiség, amely az adott részecske kvantumszámait hordozza. Az \mathcal{O}^\dagger általában nemcsak alapállapotban hozza létre a részecskét, hanem olyan energia-sajátállapotok keverékét kelti, amelyek az adott kvantumszámokkal rendelkeznek. A kvantummechanikai időfejlődés szerint ezen energia-sajátállapotok mindegyike t idő után az $e^{iE_k t}$ fázisfaktorról szorozódik, ahol E_k az adott állapot energiája. Emlékezzünk vissza azonban, hogy a rácsmo­dellben euklideszi időre tértünk át, így a fázisfaktor helyett a szorzó $e^{-E_k t}$ egy exponenciálisan lecsengő tényező lesz. Ily módon a $\langle \mathcal{O}^\dagger(0) \mathcal{O}(t) \rangle$ korrelátor hosszútávú viselkedésében

a legalacsonyabb energiájú állapot dominál, ami nem más, mint az adott részecske alapállapotban, nulla impulzussal. Ennek energiája pedig éppen az adott részecske tömegével egyezik meg, vagyis

$$\langle \mathcal{O}^\dagger(0) \mathcal{O}(t) \rangle \approx e^{-mt}. \quad (1)$$

A statisztikus fizikai rácsmodellekben központi szerepet játszanak a fenti alakú korrelációs függvények, amelyek a $t \rightarrow \infty$ esetén aszimptotikusan a távolsággal általában $e^{-t/\xi}$ formában exponenciálisan lecsengnek, ahol ξ a korrelációs hossz. A korrelációs hossz szemléletesen azt jellemzi, hogy a rendszerben különböző pontokban fellépő fluktuációk milyen távolságig korreláltak egymással. A kritikus pontokhoz (másodrendű fázisátalakulások) közeledve a korrelációs hossz növekszik, majd a kritikus pontban végtelenhez tart. A Wilson-féle renormálás csoportmódszer egyik fő eredménye a korrelációs hossz és más fizikai mennyiségek kritikus viselkedésének szisztematikus megértése.

Visszatérve a rács-térelméleti modellre, és emlékezve arra, hogy ez matematikailag ekvivalens egy rácson értelmezett statisztikus fizikai rendszerrel, megállapíthatjuk, hogy a részecske tömege tulajdonképpen a korrelációs hossz reciprokával azonos, mindkettő a korrelációs függvény aszimptotikus exponenciális lecsengését jellemzi. Ahogy azt korábban jeleztük, itt a korrelációs hossz és a tömeg is rácsegységekben értendő. Ha a rács-térelméleti modellt a valóságnak szeretnénk megfeleltetni, akkor a fizikai rácsállandót úgy kell megválasztanunk, hogy a dimenziós fizikai és a dimenziótlan rács-tömeg között az

$$m_{\text{fiz}} = \frac{m_{\text{rács}}}{a} \quad (2)$$

összefüggés teljesüljön, ahol a a rácsállandó fizikai egységekben.³

Ezzel az eljárással tehát elvileg meg tudjuk határozni a rácsállandót a számítógépes szimuláció dimenziótlan paramétereinek tetszőleges értékeire. A rács finomítása úgy érhető el, hogy a paramétereket oly módon változtatjuk, hogy a értéke csökkenjen, majd nullához tartson. Ez a fenti egyenlet alapján azt is jelenti, hogy a rácsállandó rögzítéséhez használt részecske tömege rácsegységekben mérve nullához tart, vagyis a statisztikus fizika nyelvén a modell korrelációs hossza divergál. A rács minden határon túli finomításához tehát a modell dimenziótlan paramétereit egy másodrendű fázisátalakulási ponthoz kell hangolnunk, ahol a rácsegységekben mért korrelációs hossz végtelenhez tart.

³Egyszerűen belátható, hogy a Planck-állandó és a fénysebesség segítségével a tömeg dimenziója is kifejezhető távolságdimenzióval, és dimenziója $1/\text{távolság}$ lesz.

Ha a rácsmo­dellnek több füg­get­len pa­ra­mé­tere is van, akkor úgy kell a kon­ti­nuum­lí­meszt elér­nünk, hogy köz­ben a többi pa­ra­mé­tert oly mó­don vál­toz­tat­juk, hogy a mo­dell más fi­zikai men­nyisé­gek mért ér­te­két re­pro­dukálja. A di­men­zió­atlan rácsmen­nyisé­gek és a di­men­ziós fi­zikai men­nyisé­gek köz­ötti át­te­rés­ten­dig a fe­nti mó­don meg­ha­ta­ro­zott rác­zállan­dó se­gít­se­gé­vel haj­tuk vé­gre.

Egyértelmű-e az eljárás?

Azt a né­hány fi­zikai men­nyisé­get, amelyeket a rác­smo­dell pa­ra­mé­tereinek rö­gzí­té­se­re hasz­nál­unk, a kon­struk­ció szer­int az elmé­let a kon­ti­nuum­lí­meszben pon­to­san re­pro­dukálja. Azon­ban szá­mos más fi­zikai men­nyisé­get is meg­ha­ta­ro­zhat­unk, ezek kon­ti­nuum­lí­mesz­beli ér­te­kei az elmé­let jó­slatai lesz­nek, amelyek – ha az elmé­let helye­sen ír­ja le a valósá­got – egye­zen­ek a kí­se­re­letileg kapott ér­te­kekkel.

Fel­merül­het azon­ban a kér­dés, hogy men­nyire egy­értelmű ez az el­járás. Elő­ször is, nem mon­dtuk meg, hogy mi­ként vá­lasz­tu­juk ki azokat a fi­zikai men­nyisé­geket, amelyeket a rác­zállan­dó, illetve a di­men­zió­atlan rác­spa­ra­mé­terek be­állítá­sa­hoz hasz­nál­unk. Mi törté­nik, ha más fi­zikai men­nyisé­geket, pél­dául más rész­cecskék tö­me­geit hasz­nál­juk e cél­ra?

Egy más­ik kér­dés, ami fölött nagy­vo­nalúan el­si­klot­unk, amikor azt mon­dtuk, hogy „rác­son disz­kretizál­juk” a foly­to­nos elmé­letet, hogy ezt pon­to­san mi­ként tesz­zük meg. A foly­to­nos té­relmé­letet le­író ha­tás­ban ugyan­is a mezők deri­váltjai szere­pel­nek, amelyeket a rác­son – az eg­yszerű szomszédos pon­tok köz­ötti kül­önbsé­gi hányadostól a bonyo­lult, sok rác­spont­beli ér­te­ket tar­ta­lazo­zó köz­elíté­sekig – végtelen sokfé­leké­pen lehet köz­elí­teni. Ga­ran­tálja-e vala­mi, hogy a vé­ger­edmény, a fi­zikai men­nyisé­gek kon­ti­nuum­lí­mesz­beli ér­te­kei füg­get­lenek lesz­nek e vá­lasz­ta­stól?

Ezen a pon­ton ját­szik ren­d­kí­vül fon­tos szere­pet a Wilson-féle renormálási­csoport-módszer. Ugyan­is ennek egyik leg­fon­to­so­bb er­edménye a kri­tikus visel­kedés univ­er­zali­tása. Ez azt je­lenti, hogy a másod­ren­dű fá­zisátalaku­lási pon­tok köz­elében a ren­dszer bi­zo­nyos tu­laj­donsá­gai füg­get­lenek a mi­krosz­kopikus köl­csön­ha­tások rész­leteitől, csak a tér di­men­zió­szá­mától és a ren­dszert je­llem­ző szim­metriáktól füg­genek. Ilyen univ­er­zális tu­laj­donsá­gok pél­dául a ter­mo­dinamikai men­nyisé­gek diver­genciáit je­llem­ző kri­tikus exponensek, vala­mint a kül­ön­böz­ő kor­re­lá­ciós függ­vények­ben meg­je­lenő kor­re­lá­ciós hos­szak hányadosai.

Az utóbbiból kö­vet­kezik: nem lényeges, hogy mely rész­cecskék tö­me­geit vá­lasz­tu­juk a rác­spa­ra­mé­terek be­állítá­sa­hoz, a kon­ti­nuum­lí­meszben helye­sen kap­juk a többi tö­me­get is. A mi­krosz­kopikus köl­csön­ha­tások­tól való füg­get­lenség pe­dig bi­zo­so­ítja, hogy a ha­tás bármilyen disz­kretizációját vá­lasz­tu­va, kon­ti­nuum­lí­

meszben ugyan­az az er­edmény adó­dik. Az egy­etlen lényeges szem­pont, hogy a ha­tás ren­del­ke­zzen a kon­ti­nuum­elmélet­ről meg­kö­ve­te­lt szim­metriákkal, vagy legalábbis e szim­metriák a kon­ti­nuum­lí­meszben áll­janak helyre.

Fel­merül­het az a kér­dés, hogy mi­lyen mó­don ér­te­hető meg a rác­smo­dell kap­cso­lata a neki meg­fe­le­lő per­tur­batív­an de­fi­niált kon­ti­nuum­beli kvantum­té­relmé­let­tel. Az utóbbi mindig azon al­pudul, hogy a fi­zikai men­nyisé­geket egy kép­ze­let­beli, szabad rész­cecskék­et tar­ta­lazo­zó, köl­csön­ha­tás­mentes elmé­let körül fej­tu­juk sor­ba a köl­csön­ha­tást je­llem­ző csatolási állan­dó szer­int. Kiderül, hogy ebben az eset­ben a rác­son meg­fogal­mazott elmé­let kon­ti­nuum­lí­mesz­ben a renormálási csoport egy Gauss-fix­pontja ha­ta­ro­zza meg, ahol a ha­tás kvadratikus, így ez éppen a köl­csön­ha­tás­mentes elmé­let­nek fe­lel meg. A rác­son hangol­an­dó füg­get­len pa­ra­mé­terek ezen fix­pont köz­elében éppen a releváns (és marginálisan releváns) csatolá­so­k, ezeket a pa­ra­mé­te­reket kell hangol­nunk, hogy a ren­dszer kri­tikussá vál­jon, a kor­re­lá­ciós hos­sz diver­gál­jon. A Gauss-fix­pont­beli releváns pa­ra­mé­te­rek pe­dig a kon­ti­nuum­elmélet ha­tás­ban a renormálható tagokat szor­zó csatolá­so­knak fe­lel­nek meg. Így a renormálási csoport se­gít­se­gé­vel rész­lete­sen meg­ér­te­hető a kon­ti­nuum­beli per­tur­batív és a rác­smeg­fogal­mazás kap­cso­lata.

Kvantum-színdinamika rác­son

A rác­sté­relmé­let leg­nagy­obb sikereit kétsé­g­kí­vül az erős köl­csön­ha­tás elmé­lete, a kvantum-színdinamika (QCD) a viz­gá­latában érte el. Ennek leg­főbb oka – amint azt már korábban em­lí­te­ttük –, hogy az erő­sen köl­csön­ha­tó ren­dszerek alacsonyenergiás visel­kedé­se­nek le­írásá­ra a csatolási erőssége miatt a rác­smeg­fogal­mazás az egy­etlen olyan módszer, amelynek se­gít­se­gé­vel első el­vekből, kontrollált mó­don tudunk fi­zikai er­edményeket származtatni. A rác­-QCD abból a szem­pont­ból is érdekes, hogy a QCD disz­kretizációjá több nem­triviális problémát is fel­vet, amelyekre Wilson adta az első hasz­nál­ható meg­oldást, és máig al­kalmaz­zuk az általa be­ve­ze­te­tt el­járásokat.

Az első és talán leg­főbb probléma abból fakad, hogy a QCD lokális mértékszimmetriával ren­del­ke­zik, és alap­ve­tő fon­to­so­ságú, hogy a rác­son is meg­ör­iz­zük ezt a szimmetriát. A mértékszimmetria azt je­lenti, hogy a téridő minden pon­tyában kül­ön­böz­ő bá­zis­transz­formációt haj­that­unk vé­gre a kvarkok három szín­kom­ponensét le­író három­di­men­ziós lokális komplex szin­terben, vagyis lokális SU(3) transz­formációt vé­gez­het­ünk. Ugyan­ek­kor a kvarkok köz­ötti köl­csön­ha­tást köz­ve­te­lő gluonmezőt is meg­fe­le­lően transz­formál­nunk kell. Szem­lé­letesen szólva, a gluon­mező azt mé­ri, hogy a szomszédos téridő­pon­tok­beli szin­terekben men­nyire kül­ön­böz­ő bá­zis­okat hasz­ná­

lunk, így különböző bázisok használata esetén is meg tudjuk határozni, mennyire változnak a kvarkmezők a téridőben, a változást kovariáns deriváltak segítségével mérjük. Ily módon a hatás a lokális mértéktranszformációkkal szemben invariáns.

Wilson felismerése az volt, hogy ezt a szemléletes geometriai képet úgy lehet átültetni a rácsra, hogy míg a kvarkmezőket a rácspontokban definiáljuk, a gluonmezőt a szomszédos rácspontokat összekötő élekhez rendelt $SU(3)$ mátrixok reprezentálják. Ezek az élváltozók tartják számon a szomszédos rácspontokbeli bázisok közötti áttérést, így a rácson definiált modell egzakt lokális mértékszimmétriával rendelkezik. A mértékelméletek ezen rácsdiszkrétizációja annyira sikeresnek bizonyult, hogy 50 év után a mai napig is csak ezt használjuk. Jelentőségét az is mutatja, hogy Wilsonnak messze ez a leghivatkozottabb munkája [1], jóval megelőzve azon publikációit, amelyek a Nobel-díj odaítélésének alapját képezték.

Tévedünk azonban, ha azt hisszük, hogy a mértékter diszkrétizálásával véget érnek a problémák, ugyanis a kvarkmezők diszkrétizálása is tartogat meglepetéseket. Kiderült, hogy ha a hatásban szereplő deriváltakat egyszerűen különbségi hányadosokkal helyettesítjük, akkor – a rácson fellépő impulzustérbeli periodicitás miatt – egy nulla tömegű kvark energiája nemcsak akkor tart nullához, ha impulzusa nulla, hanem akkor is, ha bármely impulzuskomponense megközelíti a rácson elérhető maximális impulzust. Ennek az a súlyos következménye, hogy a naiv rácsmodell nem egy, hanem tizenhat kvarkízt ír le. E probléma egyik máig használt megoldása is Wilson nevéhez fűződik. A megoldás lényege, hogy a hatáshoz egy impulzusra érzékeny magasabbrendű tagot hozzáadva elérhető, hogy a nagy impulzusú kvarkízek tömege kontinuumlímeszben végtelenhez tartson, ezáltal teljesen lecsatolódjanak az elméletről. Így kontinuumlímeszben egyetlen kvarkíz marad, amelynek energiája csak nulla impulzus esetén tűnik el.

Sajnos azonban a Wilson által javasolt megoldás sem tökéletes, ugyanis a hatáshoz hozzáadott új tag sérti az elmélet egyik fontos közelítő szimmétriáját, a királis szimmétriát, amely csak kontinuumlímeszben áll helyre, így sérülése véges rácsállandó esetén komoly technikai nehézségekhez vezet. Azonban Wilsonnak ezek kiküszöbölésére is volt ötlete. *Paul Ginsparggal* együtt megfogalmazták, hogy milyen feltételeknek kell eleget tennie a kvarkmezők olyan diszkrétizációjának, amely nem tartalmaz extra nemkívánt kvarkízeket, mégis rendelkezik királis szimmétriával [2]. Ez a gondolat jócskán megelőzte korát, és a cikket több mint tíz évre teljesen elfelejtették, míg a '90-es évek közepén több olyan kvarkdiszkrétizációt sikerült konstruálni, amelyek teljesítik a Ginsparg és Wilson által megfogalmazott feltételt. Ezeket is máig kiterjedten használják rácsszimulációkban, amikor a királis szimmétria teljesülése lényeges.

Hol tartunk ma?

A rácsstérelmélet ma már 50 éves múltta tekinthet vissza. Ez alatt az idő alatt mind a számítógépek, mind az algoritmusok hatalmas fejlődésen mentek keresztül, és az utóbbi nem kis mértékben köszönhető annak, hogy – részben a rácsstérelmélet segítségével – sokkal jobban sikerült megértenünk az erős kölcsönhatás működését. A rácsstérelmélet egyik legfontosabb eredménye, hogy segített a kvantumtérelméletek számos olyan aspektusának szemléletes megértésében, amelyek a perturbatív megfogalmazáson keresztül sokkal nehezebben érthetőek.

Mindemellett hatékony, praktikus számolási módszereket is szolgáltat, amelyek segítségével nemcsak a standard modell jóslatainak helyességét sikerült százaléknál jobb pontossággal ellenőrizni, hanem új fizikai eredmények is adódtak. Ezek közül az egyik legfontosabb annak kimutatása volt, hogy az erősen kölcsönható hadronikus anyag magas hőmérsékleten való átalakulása kvark-gluon plazmává – az előzetes várakozásokkal ellentétben – nem fázisátalakulás, csak crossover [3]. Ez azt jelenti, hogy a termodinamikai jellemzők az átmeneti tartományban ugyan gyorsan változnak a hőmérséklet függvényében, azonban szinguláris viselkedést nem mutatnak. Hasonló módszerekkel sikerült meghatározni az erősen kölcsönható anyag állapotegyenletét is [4]. Ezek az eredmények rendkívül fontosak a világ legnagyobb részecskegyorsítóiban jelenleg is zajló nehézion-ütközési kísérletek értelmezése szempontjából. A kvantum-színdinamika helyességének ellenőrzésében mérföldkövet jelentett a könnyű hadronok tömegeinek pontos meghatározása, és ezek egyezése a kísérletileg mért tömegekkel [5].

Ezzel azonban nem ért véget a rács-QCD története. A jelenleg is zajló kutatások talán két legérdekesebb területe a véges barionsűrűségű anyag tulajdonságainak, fázisdiagramjának meghatározása és a müon anomális mágneses momentumához adott erős kölcsönhatási járulék kiszámolása. Az utóbbi azért rendkívül fontos, mert elképzelhető, hogy szignifikáns eltérés van a kísérleti és az elméletileg meghatározott érték között, ami akár a standard modellen túlmutató, új fizika létezésére is utalhat. Az elméleti számolásban azonban komoly bizonytalanságot okoz az erős kölcsönhatás járulékának becslése, amely a rács-QCD segítségével jelentősen pontosítható. Az eddigi eredmények alapján úgy tűnik, hogy a kísérleti és elméleti értékek nagy valószínűséggel összhangban vannak egymással [6].

A rács-QCD legkeményebb, máig megoldatlan problémája olyan rendszerek szimulációja, amelyekben a barionsűrűség nem nulla. Ez azért lenne különösen érdekes, mert azt gyanítjuk, hogy elegendően nagy barionsűrűség esetén a kvark-gluon plazmába való véges hőmérsékletű átmenet crossoverből elsőrendű fázisátalakulássá válik. Több évtizedes megol-

datlan probléma e sejtés ellenőrzése és a kritikus barionsűrűség meghatározása. Erre azért is volna különösen nagy szükség, mert a közeljövőben tervezett nehézion-kísérletek éppen ebben a tartományban fognak adatokat gyűjteni.

Véges barionsűrűség rácson való szimulációja azért rendkívül nehéz, mert ekkor a hatás komplexsége válik, így a statisztikus fizikai interpretációban fellépő ugyancsak komplex „Boltzmann-faktoroknak” nem tudunk valószínűségi jelentést tulajdonítani, emiatt a fontossági mintavételezésen alapuló módszerek nem használhatók. A probléma megoldására számos kísérlet történt, de a kifejlesztett módszerek mindegyikének az a hátránya, hogy a számolások bizonytalansága a térfogattal exponenciálisan nő. Emiatt lehetetlen megbízható eredményeket kapni termodinamikai (végtelen térfogat) és kontinuumlímeszben. A munka azonban tovább folyik, a világ több pontján számos csoport dolgozik e probléma megoldásán.

Irodalom

1. K. G. Wilson Confinement of Quarks. *Phys. Rev. D* 10 (1974) 2445–2459. doi:10.1103/PhysRevD.10.2445
2. P. H. Ginsparg, K. G. Wilson: A Remnant of Chiral Symmetry on the Lattice. *Phys. Rev. D* 25 (1982) 2649. doi:10.1103/PhysRevD.25.2649
3. Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz, K. K. Szabo: The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. *Nature* 443 (2006) 675–678. doi:10.1038/nature05120
4. S. Borsanyi, G. Endrodi, Z. Fodor, A. Jakovac, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti, K. K. Szabo: The QCD equation of state with dynamical quarks. *JHEP* 11 (2010) 077. doi:10.1007/JHEP11(2010)077
5. S. Durr, Z. Fodor, J. Frison, C. Hoelbling, R. Hoffmann, S. D. Katz, S. Krieg, T. Kurth, L. Lellouch, T. Lippert et al.: Ab-Initio Determination of Light Hadron Masses. *Science* 322 (2008) 1224–1227. doi:10.1126/science.1163233
6. S. Borsanyi, Z. Fodor, J. N. Guenther, C. Hoelbling, S. D. Katz, L. Lellouch, T. Lippert, K. Miura, L. Parato, K. K. Szabo et al.: Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD. *Nature* 593 (2021) no. 7857, 51–55. doi:10.1038/s41586-021-03418-1

RENDEZETLEN RENDSZEREK RENORMÁLÁSA

Juhász Róbert

Wigner Fizikai Kutatóközpont, Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet

Kritikus jelenségek és a renormálási csoport

A renormálási csoport *Kadanoff*, *Wilson* és mások által kidolgozott úttörő módszerének egyik sikeres alkalmazási területe a statisztikus fizika, azon belül is a kritikus jelenségek elméleti leírása. A nagy szabadsági fokú, statisztikus rendszerek renormálási módszerei a valós térbeli renormálási módszerek körébe tartoznak, amelyek a méretskála fokozatos növekedésével járnak, és a rendszer egyre nagyobb skálán való szemléléseként foghatók fel. Eme eljárások alapvető és történetileg is első példája a klasszikus Ising-modell Kadanoff-féle blokkspin-renormálása volt [1]. Ezen modell egy d -dimenziós rács pontjaiban ülő és egymással kölcsönható klasszikus spinekből áll, az eljárás pedig a rácsot b^d számú spint tartalmazó, azonos blokkra osztja fel. A blokkokat azután egyetlen

effektív spinváltozóval helyettesíti, amelyek kölcsönhatását közelítőleg egy – a kiinduló modelléhez hasonló – Hamilton-függvény fogja leírni, módosult csatolási állandókkal. Ez a lépés tetszőlegesen sokszor ismételhető, és a spinek számának folyamatos csökkenését, a méretskála növekedését (lépésenként b -szeresére) és a csatolások változását eredményezi. A kritikus állapot meghatározó tulajdonsága a skálainvariancia, így leírásában a kulcsszerepet a renormálási transzformáció fixpontjai játsszák. A renormálási módszer nagy eredménye, hogy lehetővé teszi a folytonos fázisátalakulások kritikus exponenseinek meghatározását, amelyek a fixpontban linearizált transzformáció mátrixának sajátértékeivel állnak kapcsolatban. Ezzel összefüggő, további fontos eredménye, hogy természetes magyarázatot ad az univerzalitás jelenségére. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a folytonos fázisátalakulásokat jellemző kritikus exponensek nem a rendszer mikroszkopikus részleteitől függenek, hanem csak kevés számú adattól, úgymint a térbeli dimenzió, a rendparaméter dimenziója és a rendszer szimmetriái. Így tehát, akár merőben eltérő megjelenésű rendszerek, amelyekben azonban az említett néhány paraméter megegyezik, ugyanazon kritikus exponenseken fognak osztozni. A renormálási képben a mikroszkopikus részleteket irreleváns skálaváltozók jelenítik meg, amelyek a transzformáció során – kezdeti értéküktől függetlenül – nullához tartanak, és



Juhász Róbert a Wigner Fizikai Kutatóközpont Szilárdtestfizikai és Optikai Intézetének tudományos főmunkatársa. 2003-ban szerzett doktori fokozatot a Szegedi Tudományegyetemen. Fő kutatási területe a rendezetlen rendszerek fázisátalakulásainak elmélete.

a kritikus viselkedést kizárólag a fixponti transzformáció fogja meghatározni.

A renormálási módszer kezdeti alkalmazásai idealizált rácsmodellekre irányultak, amelyekben a szabadsági fokok közötti kölcsönhatás rövid hatótávolságú, legtöbbször csak a legközelebbi szomszédokra szorítkozik, továbbá a lokális paraméterek mindenütt egyformák, azaz a modell térben homogén. A valóságban azonban ezek a feltételezések gyakorta nem helytállóak: a kölcsönhatás hosszú hatótávolságú lehet, mint például a különféle elektromágneses multipólus-kölcsönhatások; másrészt a kiterjedt rendszerek – majdnem elkerülhetetlenül – valamilyen fokú térbeli inhomogenitást tartalmaznak, gondoljunk itt kristályok rácshibáira, szennyeződéseire, az amorf anyagokra, vagy akár komplex hálózatok strukturális rendezettségére. Amennyiben ez az inhomogenitás a rendszer dinamikájának időskáláján alig változik, akkor *befagyott rendezetlenségről* beszélünk. Elméleti modellekben az ilyen típusú rendezetlenség helyről-helyre (véletlenszerűen) változó, de időben állandó lokális paraméterekkel vehető figyelembe. Mindkét említett körülmény, azaz a hosszú hatótávolságú kölcsönhatás és a befagyott rendezetlenség is megváltoztathatja a fázisátalakulások jellemzőit.

Rendezetlen rendszerek

A fentiek alapján felmerül a kérdés – ami ezen írás fő témája is –, hogy a renormálásicsoport-módszer miképpen tud megbirkózni a rendezetlenség által jelentett kihívással. Egy rendezetlen rendszer hipotetikus renormálása során – amennyiben utóbbit leegyszerűsítve, egyetlen paraméterrel, a rendezetlenség erősségével jellemezzük – a következő forogatókönyvek képzelhetők el. Lehetséges, hogy a renormálás során a rendezetlenség erőssége mindvégig csökkenve nullához tart; ilyen esetben a rendszer nagy skálán homogén viselkedést mutat. Előfordulhat azonban az is, hogy a rendezetlenség erőssége állandósul a renormálás során. Ez esetben azt mondjuk, hogy a kritikus viselkedést egy végesen rendezetlen fixpont írja le. Végül pedig megtörténhet az is, hogy a rendezetlenség erőssége minden határon túl növekszik a renormálás során, amely esetben egy *végtelenül rendezetlen fixpontról* beszélünk. Főleg az utóbbi osztályba tartoznak a rendezetlen rendszerek különleges képviselői, az *erősen rendezetlen* rendszerek, amelyekről e lap hasábjain már olvashattunk [2]. Ilyen rendszerekben a rendezetlenség fluktuációi – azaz a lokális kontrollparaméter helyről-helyre történő ingadozásai – szinte teljesen háttérbe szorítják a – homogén rendszerek átalakulásait egyébként uraló – kritikus kvantum- vagy sztochasztikus fluktuációkat. Ennek megnyilvánulása, hogy az átlagos mennyiségek viselkedését a véletlen mintákban ritkán előforduló, de kiug-

róan nagy járulékot adó régiók fogják meghatározni. Az ilyen típusú, erősen rendezetlen rendszerekre – a homogén rendszerek mintájára – ugyan megfogalmazható blokkrenormálási séma, azonban ezek a módszerek itt erősen közelítő jellegűvé válnak, hasonlóan oly sok más módszerhez, amelyek számára az inhomogenitás nehezen leküzdhető akadályt jelent. Ezért is meglepő, hogy létezik a renormálás egy olyan megközelítése, ami éppen az inhomogenitás jelenlétéből kovácsol előnyt. Ennek alapgondolata *Ma, Dasgupta* és *Hu* 1979-ben megjelent cikkében fogalmazódott meg először [3]. Lényege, hogy – ilyen rendszerekben – fel kell adni azt az egyformásító törekvést, ami az azonos blokkokra való felosztásban nyilvánul meg, és magának a rendezetlenségnek kell átengedni a renormálási folyamat irányítását. Ezen eljárás során a blokkok redukcióját szekvenciálisan, egymás után hajtjuk végre; a sorrendet pedig a rendezetlenség szabja meg azáltal, hogy mindig a legnagyobb gerjesztési energiájú blokk redukcióját végezzük el, így lépésről-lépésre távolítva el a nagyenergiájú állapotokat. A renormálás tehát elveszíti egységes térbeli jellegét, és így előrehaladását – a méretskála helyett – célszerűbb a fokozatosan csökkenő energiaskálán keresztül nyomon követni. Ezt a szemléletbeli újítást – amely először véletlen, antiferrómágneses spinláncok összefüggésében fogalmazódott meg – 1992-ben *Daniel Fisher* alapvető munkái követték [4]. Ő hasonló eljárást fogalmazott meg a merőleges terű Ising-láncrea, és kidolgozta a módszer átfogó matematikai leírását, megmutatva, hogy a renormálási transzformáció – habár kezdetben közelítő jellegű – a kritikus fixpontban aszimptotikusan egzakttá válik. Az ezt követő évtizedekben a módszer alkalmazási köre folyamatosan egészült ki további kvantumspin- és fermionmodellekkel, valamint sztochasztikus rácsmodellekkel, és az alacsonyenergiás tulajdonságokon túl, a dinamika és a véges hőmérsékletű állapotok vizsgálatával [5]. A módszer hazai kutatása, amelyet *Iglói Ferenc* kezdett el, a Wigner Fizikai Kutatóközpontban jelenleg is aktívan folyik, és főként a Griffiths-fázis, a sztochasztikus folyamatok, valamint a magasabb dimenziós és a hosszú hatótávolságú rendszerek területén hozott jelentős eredményeket.

A kontaktfolyamat renormálása

Noha az erős rendezetlenségi renormálás első alkalmazásai kvantumspinmodellekhez kapcsolódnak, a módszert mégis egy sokkal szemléletesebb példán, a kontaktfolyamat renormálásán keresztül fogjuk bemutatni, és csak ezt követően térünk át a kvantumláncok világába.

A *kontaktfolyamat* egy rácsba rendezett, bináris változókon zajló, folytonos idejű Markov-folyamat [5]. A változók aktív vagy inaktív állapotban lehetnek, és

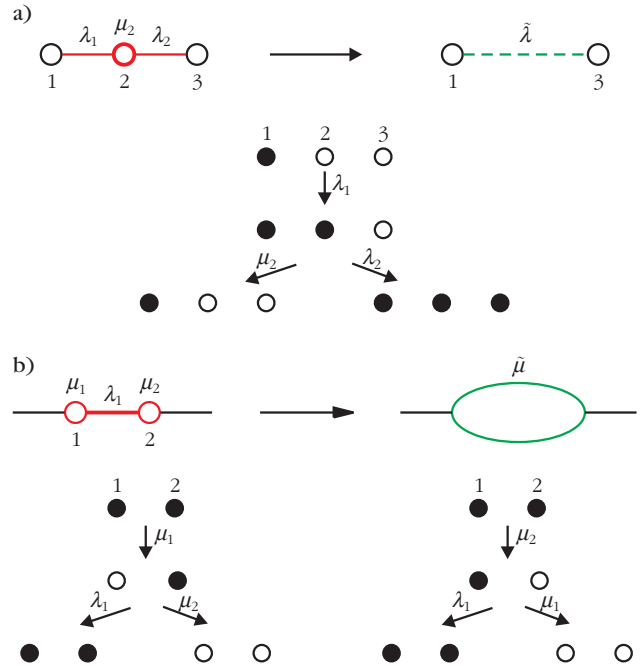
kétféle átmenet során változhatnak meg: az aktív rácshelyek aktívvá tehetik inaktív szomszédait λ rátával, vagy pedig spontán módon inaktívvá válhatnak μ rátával. Ez a folyamat egy egyszerű járványterjedési modellként értelmezhető, amelyben az aktív, illetve inaktív rácshelyek beteg, illetve egészséges egyedeket reprezentálnak, vagy akár populációdinamikai modellként, amelyben a binér változó egy helyhez kötött faj által kolonizált vagy lakatlan élőhelyfolt állapotait kódolja. A statisztikus fizika részéről e modell iránti érdeklődést az táplálja, hogy a λ/μ viszony kritikus értékénél folytonos fázisátalakulást mutat. Ez – a véges aktivitássűrűségű fázist az inaktív fázistól elválasztó – kritikus pont a nemegyensúlyi átalakulások egyik legnépesebb osztályába, az irányított perkoláció univerzalitási osztályába tartozik [7]. A modell egydimenziós, rendezetlen változatára, amelyben a λ_n és μ_n ráták helyről-helyre változó, egymástól független, véletlen paraméterek, *Hooyberghs*, Iglói és *Vanderzande* dolgozta ki azt a renormálási sémát [8], amelynek lépéseit az 1. ábra foglalja össze. Először is meg kell keresnünk a mintában található legnagyobb rátát. Ha ez egy (μ_2) deaktiválási ráta, továbbá a mellette lévő aktiválási ráták jóval kisebbek, $\mu_2 \gg \lambda_1, \lambda_2$, akkor a 2-es rácshely majdnem mindig inaktív állapotban lesz. Ezt a rácshelyet ezért eltávolíthatjuk; hatása csupán annyi lesz, hogy – rajta keresztül – szomszédai ezután egy effektív $\tilde{\lambda}$ rátával közvetlenül aktiválhatják egymást, amelyre az ábrán vázolt részlépéseket végigkövetve, valószínűségszámítással a

$$\tilde{\lambda} \approx \lambda_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \approx \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_2}$$

kifejezést kapjuk. Amennyiben a legnagyobb ráta egy aktiválási ráta (λ_1), továbbá $\lambda_1 \gg \mu_1, \mu_2$, akkor világos, hogy az 1-es és 2-es rácshely majdnem mindig egyszerre lesz aktív vagy inaktív. Ekkor a két rácshely egy klaszterre kapcsolható össze, amelynek állapotát egyetlen binér változóval adhatjuk meg; effektív deaktiválási rátájára pedig az ábrán látható részlépések alapján a

$$\tilde{\mu} \approx \mu_1 \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2} + \mu_2 \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \approx 2 \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1}$$

kifejezést kapjuk. Láthatjuk, hogy mindkét fajta lépés során a szabadsági fokok száma eggyel csökken. A renormálás ezen elemi lépések iterálásából áll, mindig az éppen legnagyobb rátát megkeresve és a megfelelő típusú redukciós lépést végrehajtva, ami az $\Omega = \max\{\lambda_p, \mu_j\}$ rátaskála fokozatos csökkenését eredményezi. Ezzel az eljárással tehát olyan, egyre kevesebb szabadsági fokú, effektív rendszerek sorozatát kapjuk, amelyekből a $\tau = 1/\Omega$ időskálánál

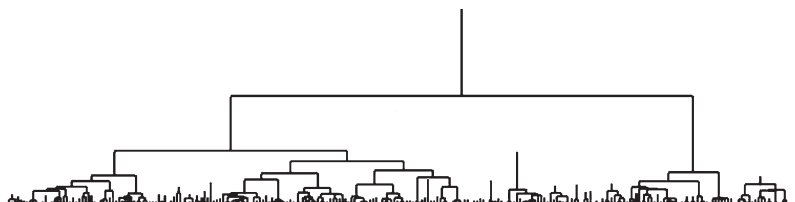


1. ábra. A kontaktfolyamat renormálási sémáját felépítő elemi lépések: a rácshely-elimináció (a) és a klaszterképződés (b).

gyorsabb folyamatokat kiszűrtük, viszont amelyek a nagy időskálájú folyamatokat tekintve hasonló az eredeti rendszerhez. Jogos ellenvetés, hogy a fenti redukciós lépések feltételei kezdetben csak közelítően teljesülnek, de – amint azt látni fogjuk – a kritikus fixpont felé haladva a közelítés egyre pontosabbá válik, és végső soron az eljárás aszimptotikusan egzakt lesz. A vázolt renormálási eljárás egy aggregációs-annihilációs folyamatként is felfogható, ami a renormált rendszert egymással nem kölcsönható klaszterek összességeként állítja elő. A klaszterek, amelyeket egy-egy effektív deaktiválási ráta jellemez, különböző számú és nem feltétlenül szomszédosan elhelyezkedő eredeti rácshelyből állnak, amint azt a 2. ábra illusztrálja.

A fenti renormálási séma matematikai leírása is kidolgozható, köszönhetően annak, hogy az effektív ráták egymástól függetlenek maradnak, így elegendő az eloszlásuk fejlődését nyomon követni. Itt nem részletezett módon felírható egy-egy – a λ és μ ráták evolúcióját leíró – vezéregyenlet, amelyek egyszerű, egyparaméteres megoldásairól megmutatható, hogy attraktívak, azaz tetszőleges kiinduló rátaeloszlás hozzájuk fog tartani, amint $\Omega \rightarrow 0$. Ezek pedig

2. ábra. A renormálási folyamat dendrogramja egy konkrét véletlen mintában.



$$g_\Omega(\beta) = g_0 e^{-g_0 \beta} \quad \text{és} \quad f_\Omega(\zeta) = f_0 e^{-f_0 \zeta}$$

alakúak, ahol $\beta = \ln(\Omega/\mu)$ és $\zeta = \ln(\Omega/\lambda)$ logaritmusos ráták, a $g_0(\Gamma)$ és $f_0(\Gamma)$ paraméterek változását pedig a

$$\frac{dg_0}{d\Gamma} = \frac{df_0}{d\Gamma} = -g_0 f_0$$

folyamegyenletek adják meg, ahol $\Gamma = \ln(\Omega/\Omega_0)$. Tehát

$$\frac{df_0}{dg_0} = 1,$$

és így a renormálási trajektóriák – a g_0 - f_0 diagramon – egységnyi meredekségű egyenesek lesznek. Ezek egy része az f_0 tengely valamelyik pontjába fut be; ilyenek mentén haladva a kétféle redukciós lépés közül a klasztereződés kerül túlsúlyba, és végül egy makroszkopikus méretű klaszter alakul ki. Ez tehát a rendszer aktív fázisának felel meg. A g_0 tengely felé tartó trajektóriáknál fordított a helyzet. Itt majdnem mindig eliminációs lépések mennek végbe, és végül makroszkopikus számú, véges méretű klaszter keletkezik. Ez tehát az inaktív fázis. Az origóba futó trajektória írja le a kritikus rendszert. E mentén haladva a ráták logaritmusának eloszlásai minden határon túl szélesednek, és így az eljárás – a végtelenül rendezetlen kritikus fixpontban – aszimptotikusan egzakttá válik. Itt a kétféle redukciós lépés egyforma valószínűséggel megy végbe, és a kialakuló klaszterek

$$d_f = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 0,809\dots$$

dimenziójú fraktálok lesznek.

Hogyan lehet a renormálási képből kiolvasni a modell – szimulációk során gyakran vizsgált – dinamikai viselkedését, például a $\rho(t)$ aktivitássűrűség időbeli változását, ha a rendszert a teljesen aktív állapotból indítottuk? Egyszerű a válasz: t idő elteltével az olyan klasztereket alkotó rácshelyek, amelyek élettartama (azaz deaktiválási rátájának reciproka) nagyobb t -nél, már gyakorlatilag inaktívak lesznek. A többi klaszter alkotó rácshelyek viszont ekkor még jellemzően aktívak. Az átlagos sűrűséget tehát a t -nél nagyobb élettartamú klasztereket alkotó rácshelyek aránya fogja megadni. Nézzük először a kritikus pontot! A folyamegyenletekből a $\xi(\tau)$ átlagos méretskála és a $\tau = 1/\Omega$ időskála közötti $\ln \tau \sim \sqrt{\xi}$ összefüggés vezethető le. Mivel $\xi(\tau)$ lényegében a τ skálán még aktív klaszterek kiterjedése, a klaszterek fraktáldimenziója pedig ismert, a sűrűség időfüggése

$$\rho(t) \sim [\xi(t)]^{d_f - d} \sim [\ln(t)]^{-\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

alakú lesz. Azt a szokatlan eredményt kaptuk tehát, hogy – a kritikus viselkedést általában jellemző hatványtörvények helyett – itt az idő logaritmusosa lép fel, vagyis a dinamika rendkívül lassú lesz, ami a végtelenül rendezetlen kritikus pontok fő ismérve. Érdeemes szemügyre venni az inaktív fázist is. A klaszterek tipikus mérete itt véges, viszont élettartamaik eloszlása széles, hatványfüggvény alakú, $P_s(\tau) \sim \tau^{-1/z}$, ahol $1/z$ a $g_0(\Gamma)$ paraméter fixponti értéke. Maga z pedig dinamikai exponensként értelmezhető, ami egy véges, L méretű rendszer élettartamának méretfüggését adja meg a $\tau(L) \sim L^z$ összefüggés szerint. Az előbbi gondolatmenettel azt kapjuk, hogy az átlagos sűrűség hatványfüggvény szerint csökken, $\rho(t) \sim t^{-1/z}$, ahol a kitevő nemuniverzális, azaz a kritikus ponttól való távolsággal változik. Ez a fajta lassú csökkenés ismét csak eltér a nemkritikus, homogén rendszerekben megszokott exponenciális dinamikától. Egyúttal azt is jelenti, hogy itt nincs véges időskála, azaz a dinamika szempontjából olyan a viselkedés, mint egy konvencionális kritikus pontban. A térbeli korrelációs hossz, amit a klaszterek tipikus kiterjedése szab meg, viszont véges, tehát ilyen szempontból a rendszer nem mutatkozik kritikusnak. Ezt a különös viselkedést, amelynek okai a rendezetlen kvantumágnesekben fellépő Griffiths–McCoy-szingularitásokéval azonosak [9], *szemikritikus* viselkedésnek szokás hívni.

Véletlen kvantumláncok renormálása

Az erős rendezetlenségi renormálás egyik korai alkalmazása a lokalizált, feles spinek mágnességének paradigmatisztikus modelljéhez, a *merőleges terű Ising-lánc*hoz kötődik. Hamilton-operátora egy dimenzióban

$$\mathcal{H} = -\sum_i J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \sum_i h_i \sigma_i^z \quad (1)$$

alakú, ahol σ_i^x és σ_i^z Pauli-operátorok, a $J_i > 0$ csatolások és $h_i > 0$ külső terek pedig véletlen változók. Jól ismert, hogy homogén változata – zérus hőmérsékleten – kvantum-fázisátalakulást mutat a $J = h$ pontban, amely a paramágneses ($J < h$) és ferromágneses ($J > h$) fázisokat választja el egymástól; utóbbiban a spontán mágnesezettség folytonosan tűnik el a kritikus ponthoz közelítve. A modell rendezetlen változatának kritikus viselkedését a Fisher által megfogalmazott renormálási séma derítette fel [4], ami a következőképpen működik (ld. a 3. *ábrát*). Itt is meg kell keresnünk a láncbéli legnagyobb paramértet. Ha ez egy külső tér (h_i), továbbá $h_i \gg J_{i-1}, J_i$ akkor ez az i spint z irányban rögzíti, és így az gyakorlatilag nem járul hozzá az x irányú mágnesezettséghez. Ezért a spint kidecimálhatjuk, azaz az $i-1$, i és $i+1$ spinből álló blokkot egy kétspinblokkra képesszük, és az ebben megjelenő effektív csatolást perturbációszámítással

$$\tilde{J} = \frac{J_{i-1}J_i}{h_i}$$

alakban kapjuk meg. Ha a legnagyobb paraméter egy J_i csatolás, továbbá $J_i \gg h_i, h_{i+1}$, akkor az i és $i+1$ spinekből álló blokk két alsó energiaszintje, amely az

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rightarrow\rangle \pm |\leftarrow\leftarrow\rangle)$$

állapotokhoz tartozik, elkülönül a másik két magasán fekvő nívótól. Tehát a spinek egy ferromágneses klasztert képeznek, ami jól leírható egyetlen,

$$\tilde{h} = \frac{h_i h_{i+1}}{J_i}$$

külső térbe helyezett spinnel. Ezeket a lépéseket iterálva fokozatosan megszabadulunk a magas energiájú gerjesztésektől, és olyan kisebb, effektív láncokat kapunk, amelyek az eredeti modell alacsonyenergiás tulajdonságait hűen adják vissza. Az eljárással kapott (közelítő) alapállapot egy szorzatállapot,

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes |\phi_3\rangle \otimes \dots,$$

ahol

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rightarrow\dots\rightarrow\rangle + |\leftarrow\leftarrow\dots\leftarrow\rangle)$$

az egy klaszterbe tartozó spinek állapota. Egy ilyen állapotban a

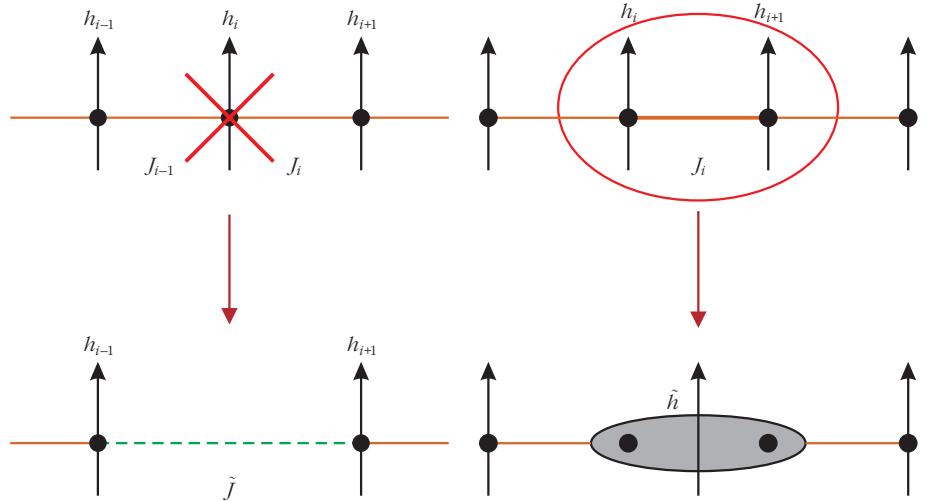
$$C(l) = \langle \sigma_i^x \sigma_{i+l}^x \rangle$$

korrelációs függvényről könnyen belátható, hogy nem lesz önátlagoló. Tipikus értéke, amelyet a különböző klaszterhez tartozó spinpárok adnak, rendkívül csekély:

$$C(l) \sim e^{-c\sqrt{l}}.$$

Azon ritka esetekben viszont, amikor két spin egyazon klaszter része, a korreláció $O(1)$, így az átlagos korrelációs függvény, amit a ritka járulékok állítanak be, jóval lassabban, hatványfüggvény szerint csökken:

$$\overline{C(l)} \sim l^{-2(d-d_p)}.$$



3. ábra. A merőleges térű Ising-lánc renormálásának elemi lépései: a spindecimálás (balra) és a klaszterképződés (jobbra).

A figyelmes olvasó bizonyára észrevette a hasonlóságot a kontaktfolyamat renormálási sémájával. A csatolások, illetve terek a λ , illetve μ rátáknak feleltethetők meg, az energiaskála az időskála reciprokának, a ferromágneses klaszterek az aktív klasztereknek, a fázisátalakulás rendparamétere, a mágnesezettség pedig az aktivitássűrűségnek, és végső soron a két modellt ugyanaz az elmélet írja le. Így tehát, habár a két modell homogén változatai eltérő univerzalitási osztályba tartoznak, a rendezetlenség ezt a különbséget eltörli.

Áttekintésünk utolsó példajaként nézzük meg azokat a

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^L J_n (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z) \quad (2)$$

Hamilton-operátorral definiált *XXZ-spinláncokat*, amelyekkel az erős rendezetlenségi renormálás története elindult. Ez a modell szintén feles spinekből áll, a kölcsönhatás azonban antiferromágneses ($J_n > 0$); a Δ anizotrópiaparamétert illetően pedig a $0 \leq \Delta \leq 1$ tartományra szorítkozunk. Speciális esetei az XX-lánc ($\Delta = 0$) és a Heisenberg-lánc ($\Delta = 1$). Ez a renormálási séma is a legerősebb csatolás (J_2) kiválasztásával indul, azután iteratívan végrehajtjuk a renormálás elemi lépését, amelyet a 4. ábra szemléltet. A J_2 csatolással összekötött spinpár jó közelítéssel szingulett állapotba kerül. Ezt eliminálva, az újonnan szomszédossá váló spinek között – perturbációs számítással – egy effektív XXZ-kölcsönhatást kapunk

$$\tilde{J} = \frac{J_1 J_3}{(1 + \Delta_2) J_2} \quad \text{és} \quad \tilde{\Delta} = \frac{1 + \Delta_2}{2} \Delta_1 \Delta_3$$

paraméterekkel. Megfigyelhető, hogy a Δ anizotrópia-paraméter, noha kezdetben homogén volt, az eljárás során rendezetlenné válik. A fenti iteráció eredménye-

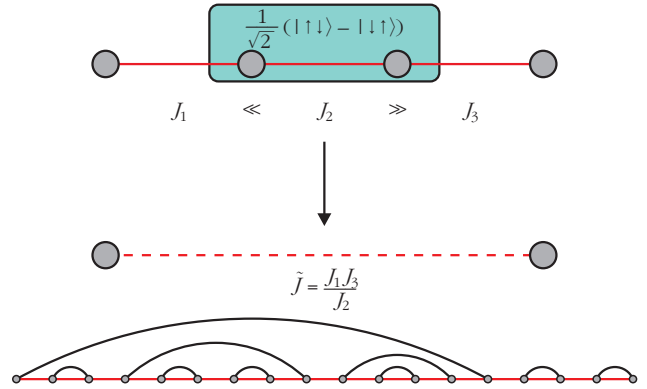
ként kialakuló (közelítő) alapállapot szingulett állapotának szorzata lesz. A párok tagjai azonban tetszőlegesen távol lehetnek egymástól, amint azt a 4. ábra szemlélteti. Ebben a véletlen szingulett állapotban a korrelációs függvény – hasonlóan az Ising-lánchoz – nem lesz önátlagoló: tipikus értéke rendkívül kicsiny,

$$O(e^{-c\sqrt{l}}),$$

összetartozó spinpárookra viszont $O(1)$. Miután a szingulett kötések hosszeloszlása $p(l) \sim l^{-2}$ alakú, az átlagos korrelációs függvény ugyanezt a lassú lecsengést fogja követni.

Összefoglalás

Az erősen rendezetlen rendszerek kritikus viselkedését – mint azt a kontaktfolyamat és spinláncok példáján láttuk – a rendezetlenség fluktuációi uralják: az átlagos mennyiségek, amelyeket a ritka régiók kiugró járuléka határoznak meg, eltérnek a tipikustól. A dinamikai kritikus viselkedést hatványtörvények helyett logaritmikus skálázás jellemzi, ami formálisan végtelen nagy dinamikai exponensnek felel meg. Az ilyen rendszerek sikeres kvantitatív vizsgálatát az erős rendezetlenségi renormálási módszerek teszik lehetővé, amelyek a kritikus viselkedést egy végtelenül rendezetlen fixponttal írják le. A módszer, bár az elmúlt évtizedekben számos fontos kérdést tisztázott a rendezetlen rendszerek területén, további kihívások előtt



4. ábra. Az XXZ-lánc renormálási sémájának elemi lépése (fent) és az eredményeként kialakuló, véletlen szingulett állapot (lent).

áll; ilyen – többek között – a magasabb dimenziós vagy a hosszú hatótávolságú rendszerek fázisátalakulásainak mind teljesebb megértése [10].

Irodalom

1. L. P. Kadanoff, *Physics Physique Fizika* 2 (1966) 263.
2. Iglói F., Kovács I., *Fizikai Szemle* 64/11 (2014) 366.
3. S.-K. Ma, C. Dasgupta, C.-K. Hu, *Phys. Rev. Lett.* 43 (1979) 1434.
4. D. S. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 534; *Phys. Rev. B* 51 (1995) 6411.
5. F. Iglói, C. Monthus, *Phys. Rep.* 412 (2005) 277; *Eur. Phys. J. B* 91 (2018) 290.
6. T. E. Harris, *Ann. Prob.* 2 (1974) 969.
7. G. Ódor: *Universality in Nonequilibrium Lattice Systems*. World Scientific (Singapore, 2008); *Rev. Mod. Phys.* 76 (2004) 663.
8. J. Hooyberghs, F. Iglói, C. Vanderzande, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 100601; *Phys. Rev. E* 69 (2004) 066140.
9. R. B. Griffiths, *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969) 17; B. M. McCoy, *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969) 383.
10. R. Juhász, I. A. Kovács, F. Iglói, *Europhys. Lett.* 107 (2014) 47008.

REFLEKTORFÉNYBEN

A 2022. ÉVI GYULAI ZOLTÁN-DÍJ: KÉTDIMENZIÓS ANYAGOK MODELLEZÉSE

Vancsó Péter

Energiatudományi Kutatóközpont
Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézet

Egyetemi és doktori évek

Egyetemi tanulmányaimat 2004-ben kezdtem meg az ELTE fizikus szakán, pont abban az évben, amikor az első kétdimenziós (2D) anyagot, a grafént felfedezték [1], ami későbbi kutatásaim középpontjába került. Az egyetemi évek alatt érdeklődésem a kvantummechanika mellett a fizika tanítása felé fordult,

ezért 2006-ban a fizikatanári szakot is felvettem. Ez a kettős érdeklődés végigkísérte egyetemi éveimet és megjelent a választott diplomamunkámban is, amelyet 2008-ban a Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézetben (MFA) Márk Géza témavezetése mellett kezdtem el a különböző szén nanoszerkezetek pásztázó alagútmikroszkópos (STM) leképezésének elméleti vizsgálata területén. Diplomamunkámban az

időfüggő Schrödinger-egyenlet numerikus megoldásának segítségével vizsgáltuk az elektron alagutazásának részleteit, azaz, hogy mely effektusok játszanak fontos szerepet az STM-tűből a nanoszerkezet felületére alagutazó elektronok esetében. Az alkalmazott hullámcsomag-dinamikai szimulációk nemcsak a tudományos kérdések megválaszolásában bizonyultak hasznosnak, hanem a kvantummechanika megértésében, szemléltetésében is. Első publikációm, amelyet 2009-ben a *Fizika Szemlében* közlünk [2], ehhez a témához kapcsolódva mutatta be az interneten elérhető interaktív hullámcsomag-dinamikai programunk lehetőségeit a kvantummechanika oktatása számára.

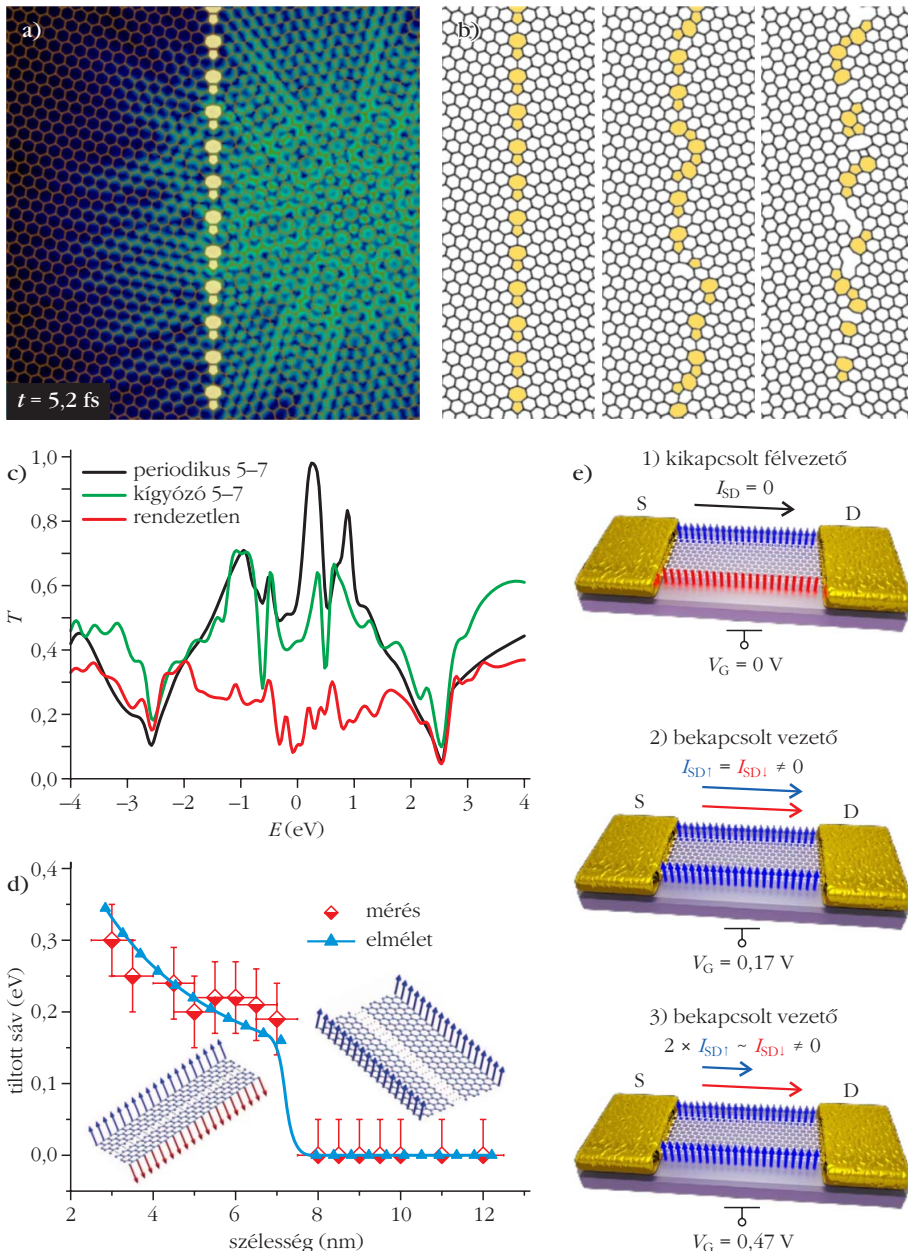
Doktori tanulmányaimhoz kapcsolódó kutatásaimat *Biró László Péter* által vezetett Nanoszerkezetek Osztályon kezdtem meg, továbbra is Márk Géza vezetése alatt, amelynek fókuszában már az első kétdimenziós (2D) kristály, a grafén állt. Ez a választás döntőnek bizonyult további tudományos munkásságom szempontjából, ugyanis a Nanoszerkezetek Osztály már ekkor is élen járt a 2D anyagok kísérleti vizsgálata területén, így elméleti fizikusként egy kiemelkedően sikeres kísérleti csoporttal dolgozhattam együtt. A téma aktualitását pedig jól szemlélteti, hogy ebben az évben, 2010-ben, a fizikai Nobel-díjat *Andre Geim* és *Konstantin Novoselov* számára ítélték oda a grafén felfedezéséért. Csoportunk kísérleti kutatóival való szoros együttműködésem első állomása volt a grafénben jelenlévő egydimenziós (1D) vonalhibák, azaz a szemcsehatárok vizsgálata. Ismert volt, hogy a hibamentes grafénben a töltéshordozók mozgékonyasága még szobahőmérsékleten is elérheti a $200\,000\text{ cm}^2/\text{Vs}$ értéket, ami ígéretessé teszi sokkal gyorsabb működésű és kisebb fogyasztású elektronikai eszközök előállításához. Jelentős problémát okozott ugyanakkor, hogy a nagyméretű minták előállítására alkalmazott kémiai gőzfázisú leválasztás (CVD) módszer során az egyrétegű grafénmembrán sok, kisebb kristallit összenövéséből épül fel, amelyek szemcsehatárokon keresztül kapcsolódnak egymáshoz. Az első kísérleti eredmények azt mutatták, hogy a szemcsehatárok jelentős hatással vannak a grafén elektronszerkezeti és transzporttulajdonságaira, azonban a tulajdonságoknak a szemcsehatár pontos atomi szerkezetével való összefüggései nem vol-

tak ismertek. Kollégáimnak STM-mérésekkel atomi skálán sikerült információt nyerniük a szemcsehatárok elektronszerkezeti tulajdonságairól, ugyanakkor a szemcsehatár atomi szerkezete továbbra is ismeretlen maradt, mivel az STM-mérésekben a pontos atomi szerkezet és az elektronszerkezeti hatások együttesen jelennek meg. Így a mérések értelmezéséhez elengedhetetlenül szükség volt számítógépes szimulációkra, a grafén szemcsehatárok atomi geometriáinak modellezésére. Munkám során hullámcsomag-dinamikai szimulációk és elektronszerkezeti számítások segítségével részletesen vizsgáltam, hogyan befolyásolja a szemcsehatárok atomi szerkezete azok elektronszerkezetét és transzporttulajdonságait (*1. a-c ábra*). Megmutattam, hogy nem minden szemcsehatár-geometria okoz jelentős változást a grafén elektromos tulajdonságaiban. Számolásaim rávilágítottak arra, hogy a leromló elektromos tulajdonságokért elsősorban a kettős koordinációjú szénatomok a felelősek [3, 4]. Eredményeinkből később *Fizikai Szemle*-cikket is írtunk [5].

A grafén szemcsehatáraival kapcsolatos publikációink után egyre több kísérleti munka értelmezésébe csatlakoztam be. Így érdeklődésem a 2D anyagok elektronszerkezeti tulajdonságai és az azokban megjelenő új jelenségek modellezése felé fordult. Ennek szép példája volt a cikcakkos élű grafénnanoszalagok élatomjain megjelenő itineráns mágnesség, amelyet *Hagymási Imre* kollégámmal közösen vizsgáltunk. A szénatomok köztudottan nem rendelkeznek mágneses momentummal, így a pusztán belőlük felépülő graféneken sem várunk mágneses tulajdonságokat. Ugyanakkor a grafén speciális cikcakkos éle mentén szimmetriaokokból jelentős állapotsűrűség jelenik meg, amelyet az elektronok közötti kölcsönhatás képes felhasítani. Ez a folyamat rendezett mágneses momentumokhoz vezet a grafén élein, amely aktívan vizsgált területe a grafén kutatásának. *Tápasztó Levente* vezetésével kollégáim elsőként figyeltek meg félvezető-fém átmenetet STM litográfias módszerrel kivágott cikcakkos élű grafénnanoszalagokon (*1.d ábra*). Elméleti számításokkal sikerült megmutatnunk, hogy a kísérletileg észlelt félvezető-fém átmenetet mágneses rendeződés okozza, ahol a spinpolarizált szalagok két éle közötti mágneses csatolás anti-ferromágnesesről ferromágnesesre vált a szalagok szélességének függvényében – nullától különböző töltéstranszfer esetén. Az eredmények jelentőségét mutatta, hogy a témában írt cikkünket a *Nature* folyóirat közölte [6], és mára több mint hétszáz tudományos munka hivatkozza. A megfigyelt jelenséget felhasználva javaslatot tettem egy cikcakkos nanoszalagokra épülő spintronikai eszközre, amelyben egyszerre lehet a töltés- és spináramot vezérelni egy egyszerű kapuelektroda segítségével (*1.e ábra*), amely kiemelkedően gyors működésű és hangolható eszközt tenne lehetővé [7].



Vancsó Péter 2010-ben diplomázott fizikusként, majd 2015-ben szerzett doktori fokozatot az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Junior Prima-díjas fizikus (2018). Jelenleg az Energiatudományi Kutatóközpont Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézetének tudományos főmunkatársa. Fő kutatási területe a kétdimenziós anyagok tulajdonságainak modellezése.



1. *ábra.* Grafén szemcsehatárai és nanoszalagok transzport- és mágneses tulajdonságai. a) A polikristályos grafénben szemcsehatárok választják el a különböző orientációjú doméneket. A szemcsehatárok transzportra gyakorolt hatását hullámcsomag-dinamikai számolásokkal tanulmányoztuk, amelynek során a szemcsehatár egyik oldalára injektált elektron terjedését követtük végig a szemcsehatár túoldalára. Az a) ábrán az elektron-hullámcsomag $\rho(\mathbf{r}, t)$ megtalálási valószínűsége látható zöld színnel egy adott időpillanatban, amikor elérte a szemcsehatárt a grafén felületén. A sárgával jelölt öt- és hétszögek a szemcsehatárt emelik ki, az elektronok ezeken szóródnak. b) Három modellezett szemcsehatár-geometria esetében vizsgáltuk a transzporttulajdonságokat. c) A szemcsehatárok transzmissziós függvényeinek összehasonlítása megmutatta, hogy a jelentősen lecsökkent transzportért a kettős koordinációjú szénatomok a felelősek. Spektroszkópiai méréseket sikerült végezni STM-litográfia módszerrel előállított különböző szélességű cikcakk élű grafénnanoszalagokon. A d) ábrán a tiltott sáv kísérletekben mért és a Hubbard-modellből számolt értékei, illetve az éleken kialakuló mágneses rend szerkezeti modelljei láthatók. Félvezető szalagok esetében anti-ferromágneses, míg fémes szalagoknál ferromágneses csatolás alakul ki a spinpolarizált szalagok két éle között. e) Az általunk javasolt mágneses éllállapotokon alapuló spintronikai eszköz kapufeszültséggel hangolható állapotai: 1) kikapcsolt félvezető állapot, 2) bekapcsolt vezető állapot spinpolarizálatlan árrammal, 3) bekapcsolt vezető állapot spinpolarizált árrammal.

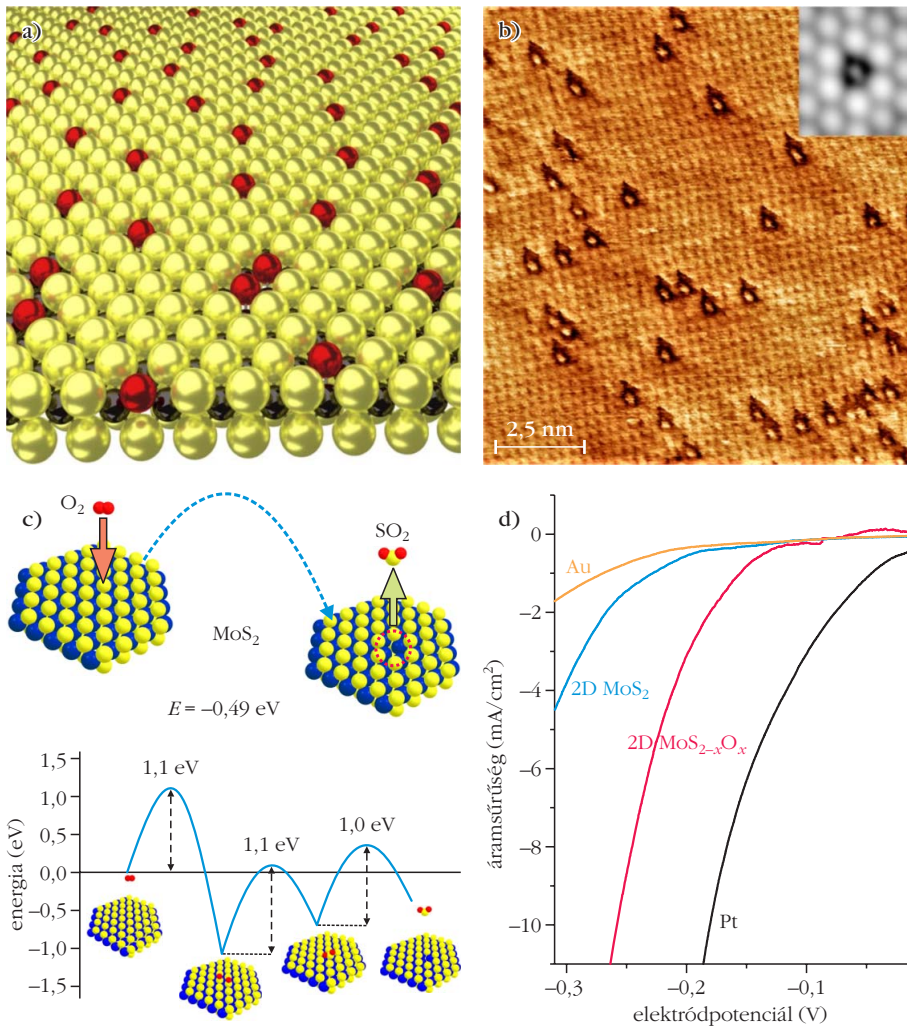
Doktori értekezésemet *Töltésterjedés grafén nanorendszerekben* címmel 2015-ben summa cum laude minősítéssel védtem meg. A grafénnel kapcsolatos ku-

tatásaim eredményeként 2016-ban Akadémiai Ifjúsági Díjban, 2017-ben pedig az Európai Akadémia Burgen Scholarship díjában részesültem. A doktori évek alatt is megmaradt érdeklődésem a középiskolai oktatás irányába, számos alkalommal tartottam tudomány népszerűsítő előadásokat középiskolákban a Fáy András Alapítvány szervezésével, továbbá témavezetőként aktívan részt vettem az MFA középiskolásoknak szervezett Nyári Iskolájában.

Posztdoktori évek

Kutatómunkámat Belgiumban, a Namuri Egyetemen folytattam posztdoktorként *Philippe Lambin* irányításával 2016 és 2018 között. A helyszín nem volt ismeretlen számomra, ugyanis Osztályunk a Namuri Egyetemen több mint 25 éve sikeres kutatási együttműködést tart fenn. Ennek köszönhetően már korábban is ellátogattam Namurbe, amelynek során a belga kollégákkal is dolgozhattam együtt a grafén szemcsehatárainak témájában. Időközben a 2D anyagok kutatásának területe rohamos léptekkel haladt előre, ennek köszönhetően a 2D anyagok családjába számos új taggal bővült. Ilyenek voltak az igen eltérő tulajdonságokkal rendelkező egyrétegű átmenetifém-dikalkogénidek (TMD), amelyek között található félvezető (MoS_2 , WS_2) vagy fémes (TaS_2) típusúak, sőt egzotikusabb szupravezető anyagok (NbSe_2) is. Emiatt tudományos érdeklődésem ezen új 2D anyagok felé fordult a posztdoktori évek alatt, amelyek modellezéséhez új numerikus módszereket sajátítottam el.

Szem előtt tartva a TMD-anyagok potenciális alkalmazási lehetőségeit, nagyméretű rendszereket vizsgáltam félempirikus módszerek segítségével, amelyek számítá-



2. ábra. 2D MoS_{2-x}O_x kristály szerkezete és katalitikus tulajdonságai. a–b) A 2D MoS₂ kristály szerkezete egy speciális oxidációs folyamaton megy keresztül környezeti körülmények között, amelynek során a felületén lévő kénatomok egyesével lecserélődnek oxigénatomokra. Az a) és b) ábrákon a kénvakanciába beépülő oxigénes szubsztitúciós hiba sematikus és atomi felbontású STM-képei láthatók. c) Ezt az oxidációs mechanizmust modelleztük DFT-számolások alapján. Megmutattuk, hogy első lépésként egy O₂-molekula kölcsönhatásba lép egy felületi kénatommal, majd SO₂-molekulaként távoznak a felületről. Az alsó c) ábrán az O₂-molekula jelenlétében létrejövő kénvakancia képződésének egyes lépései láthatók a számolt kinetikus energiákkal együtt. A kialakult vakancia a felületen később O-atommal töltődik be. A b) ábra felső sarkában az oxigénes szubsztitúciós hibának DFT-módszerrel szimulált STM-képe látható. A sötét háromszögben megjelenő világító pötty a szimulált ábrán jó egyezést mutat a kísérletileg mért hibahelyekkel. d) Az oxigénes szubsztitúciós hibákat tartalmazó kristályok katalitikus aktivitását összehasonlítva a hibamentes MoS₂ kristályokkal, azt tapasztaltuk, hogy az oxigénhibák jelentősen növelték a kristály katalitikus aktivitását, amely így megközelítette a legjobb katalizátor, a platina értékét.

si szempontból továbbra is jelentős kihívást jelentenek. Ezen nagyméretű rendszerek és bennük lévő hibák vizsgálata világszerte aktívan kutatott terület, ugyanis kiemelkedően fontos információval tud szolgálni a gyakorlati alkalmazások számára. Munkám során a MoS₂-ban jelenlévő vonalhibák elektronszerkezeti vizsgálataival tanulmányoztam komplexebb MoS₂ rendszerek optikai [8] és gázérzékelési [9] tulajdonságait.

A Belgiumban töltött időszak alatt 2017-ben részt vehettem egy Solvay-konferencián, amelyet abban az évben Philippe Lambin szervezett *From physics of graphene to graphene for physics* címmel. Ezt a kon-

ferenciasorozatot *Ernest Solvay* még 1911-ben indította el Brüsszelben, ahol a résztvevők között a korszak legnevezebb fizikusai szerepeltek. A 2017-es konferencia színvonalát jól mutatta, hogy három Nobel-díjas fizikus is jelen volt: Konstantin Novoselov, a grafén, *Klaus von Klitzing*, a kvantum Hall-effektus, illetve *Albert Fert*, az óriás mágneses ellenállás felfedezője [10]. A konferencián poszteren mutattam be a grafénnel kapcsolatos korábbi eredményeimet.

Két év posztdoktori kutatómunka után tértem vissza az EK–MFA-ba, ahol ERC és Lendület kutatócsoportok munkájába kapcsolódtam be, de az aktív együttműködést a belgiumi kollégákkal továbbra is fenntartottam. Legutóbbi közös munkánk során nanoszkálájú grafén gyűrődéseinek optikai tulajdonságait modelleztük, és sikerült elméletileg alátámasztani a Nanoszerkezetek Laboratóriumában a világon elsőként létrehozott látható frekvenciájú grafénplazmonok létezését, az eredmények a rangos *Nature Nanotechnology* folyóiratban jelentek meg 2022-ben [11].

Visszatérés Magyarországra

2018-ban újra a Nanoszerkezetek Osztály munkatársaként OTKA projektet nyertem

el, amelynek témája a különböző 2D anyagok szerkezeti hibáinak elméleti és kísérleti vizsgálata volt. A projekt erősen támaszkodott a korábban megszerzett tapasztalataimra és kiváló lehetőséget nyújtott a kísérleti kollégákkal való további együttműködésre. Számos értékes eredmény született, ilyen volt a MoS₂ pont- és vonalhibáinak vizsgálata, a MoS₂ nanoszalagok mágneses tulajdonságainak tanulmányozása, illetve a MoS₂ mechanikai feszültség által módosított elektromos és optikai tulajdonságok meghatározása. Ezt a kutatást a 2019-ben elnyert Bolyai János Kutatási Ösztöndíjam is segítette. Az elmúlt

évekből még egy fontos témát emelnék ki, amely a posztdoktori évek alatt indult és mindmáig csoportunk igen aktívan kutatott területe, a 2D anyagok katalitikus tulajdonságainak vizsgálata. Sikeresen megmutatnunk, hogy a MoS₂ szerkezetébe beépülő egyedi oxigénatomok képesek jelentősen növelni a kristály katalitikus aktivitását, elősegítve az elektrokémiai hidrogénfejlesztést. Az egyatomos katalízis jelenleg igen aktívan kutatott terület, ugyanis a katalizátorszemcsék méretét tekintve ez jelenti a végső határt. A lógó felületi kötésektől mentes 2D anyagok esetében azonban egyáltalán nem triviális, hogyan lehetséges egyedi, katalitikusan aktív atomokkal stabilan dekorálni a 2D kristály felületét. Ezt a problémát sikerült megoldanunk, kihasználva a MoS₂ egy speciális oxidációs reakcióját. Sűrűségfüggő (DFT) számításokkal igazoltam, hogy szulfidok esetében egy lassú oxidáció folyamat zajlik le, amelynek során O₂-molekula jelenlétében a felületén lévő kénatomok egyesével lecserélődnek oxigénatomokra, ezáltal egy újfajta kétdimenziós MoS_{2-x}O_x kristályt hozva létre (2. ábra). Számításaim alapján ezek az oxigénsubstitúciós hibák lesznek a katalitikusan aktív hibahelyek. A megnövekedett katalitikus aktivitást kísérletileg is megfigyelték kollégáink az EK Felületkémiai és Katalízis Laboratóriumban, így eredményeinket a neves *Nature Chemistry* folyóiratban publikáltuk [12]. A MoS₂ esetében megfigyelt kiemelkedő katalitikus aktivitás rávilágít az egyatomos katalízis fontos szerepére a 2D anyagok esetében. Ez az irányvonal egy jelenleg is futó Európai Unió COST pályázatunk témáját képezi, amelynek én vagyok a hazai vezetője. A TMD-anyagok hibáinak elméleti vizsgálatában elért eredményeimnek köszönhetően 2022-ben az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Gyulai Zoltán-díjában részesültem.

Kitekintés

Közel 20 év telt el a grafén felfedezése óta, és a 2D anyagok továbbra is az anyag- és nanotudományi kutatások fókuszában állnak. Az elmúlt években a kutatók különböző 2D anyagok egymásra helyezésével mesterséges van der Waals (vdW) heteroszerkezeteket hoztak létre, amelyekben nem csupán az atomi rétegek megválasztásával, hanem akár a rétegek közötti elforgatási szög segítségével is kontrollálhatók a heteroszerkezet tulajdonságai. A rétegek közötti kölcsönhatások következtében olyan új és érdekes fizikai jelenségeket figyeltek meg, mint például a nem-konvencionális szupravezetés [13], a Wigner-kristályba rendeződő elektronok vagy a nemtriviális spintextúrák [14]. Az eredmények nem csupán az alapkutatás, de a gyakorlati alkalmazások szempontjából is jelentősnek nevezhetők, mivel ezek képezhetik majd a kvantumtechnológián alapuló eszközeink alapját. A

Nanoszerkezetek Laboratórium – egy Élvtal projekt keretében – a következő évekre célul tűzte ki ezen új anyagcsalád kísérleti vizsgálatát, építve az elmúlt években elért kiemelkedően sikeres eredményekre a 2D anyagok kutatása területén. Ezzel összhangban 2022-ben elnyertem egy OTKA fiatal kutatói kiválósági programot, amelynek célja, hogy különböző méretskálán végzett szimulációs módszerek segítségével feltárjuk a vdW heteroszerkezetekben megjelenő szuperrács-effektusok és a hibák elektronszerkezetre gyakorolt együttes hatását. A kísérleti kollégákkal való szoros együttműködés lehetőséget nyújt majd a vdW heteroszerkezetek atomi és elektronszerkezetének mélyebb megértésére, új távlatokat nyitva a 2D anyagokra épülő, újszerű tulajdonságokkal rendelkező anyagok kutatása területén.

Irodalom

1. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov: Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science* 306 (2004) 666.
2. P. Vancsó, L. P. Biró, G. I. Márk: Kvantum Főnix – hullámcsomag dinamika az Interneten. *Fizikai Szemle* 59 (2009) 233.
3. P. Vancsó, G. I. Márk, Ph. Lambin, A. Mayer, Y.-S. Kim, C. Hwang, L. P. Biró: Electronic transport through ordered and disordered graphene grain boundaries. *Carbon* 64 (2013) 101.
4. P. Vancsó, G. I. Márk, Ph. Lambin, A. Mayer, C. Hwang, L. P. Biró: Effect of the disorder in graphene grain boundaries: A wave packet dynamics study. *Appl. Surf. Sci.* 291 (2014) 58.
5. G. I. Márk, P. Vancsó, L. P. Biró: Lehet-e tökéletes nanoelektronikai eszközt készíteni tökéletlen grafénból? *Fizikai Szemle* 63 (2013) 381.
6. G. Zs. Magda, X. Jin, I. Hagymási, P. Vancsó, Z. Osváth, P. Nemes-Incze, C. Hwang, L. P. Biró, L. Tapasztó: Room temperature magnetic order on zigzag edges of narrow graphene nanoribbons. *Nature* 514 (2014) 608.
7. P. Vancsó, I. Hagymási, L. Tapasztó: A magnetic phase-transition graphene transistor with tunable spin polarization. *2D Mater.* 4 (2017) 024008.
8. G. Deokar, N. S. Rajput, P. Vancsó, F. Ravoux, M. Jouiad, D. Vignaud, F. Cecchet, J.-F. Colomer: Large area growth of vertically aligned luminescent MoS₂ nanosheets. *Nanoscale* 9 (2017) 277.
9. G. Deokar, P. Vancsó, R. Arenal, F. Ravoux, J. Casanova-Cháfer, E. Llobet, A. A. Makarova, D. V. Vyalikh, C. Struzzi, Ph. Lambin, M. Jouiad, J.-F. Colomer: MoS₂-Carbon Nanotube Hybrid Material growth and Gas Sensing. *Adv. Mater. Interf.* 4 (2017) 1700801.
10. G. I. Márk: Solvay-konferencia, Brüsszel 2017. *Fizikai Szemle* 68 (2018) 36.
11. G. Dobrik, P. Nemes-Incze, B. Majerus, P. Süle, P. Vancsó, G. Piszter, M. Menyhárd, B. Kalas, P. Petrik, L. Henrard, L. Tapasztó: Large-area nanoengineering of graphene corrugations for visible-frequency graphene plasmons. *Nat. Nanotechnol.* 17 (2022) 61.
12. J. Pető, T. Ollár, P. Vancsó, Z. I. Popov, G. Zs. Magda, G. Dobrik, C. Hwang, P. Sorokin, L. Tapasztó: Spontaneous doping of 2D MoS₂ basal plane by oxygen substitution during ambient exposure. *Nat. Chem.* 10 (2018) 1246.
13. Y. Cao, V. Fatemi, S. Fang, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Kaxiras, P. Jarillo-Herrero: Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices. *Nature* 556 (2018) 43.
14. D. M. Kennes, M. Claassen, L. Xian, A. Georges, A. J. Millis, J. Hone, C. R. Dean, D. N. Basov, A. N. Pasupathy, A. Rubio: Moiré heterostructures as a condensed-matter quantum simulator. *Nat. Phys.* 17 (2021) 155.

EGY ENERGETIKÁHOZ KAPCSOLÓDÓ TANÓRA A KÖZÉPISKOLAI FIZIKATANÍTÁS LEZÁRÁSÁHOZ

A nukleáris energia pozitív bemutatása

Gärtner István
Óbudai Árpád Gimnázium

Gyakorló fizikatanárként sokszor kell szembenéznem azzal a ténnyel, hogy az energetika témaköre mennyire kevésbé tárgyalt része a középiskolai fizikatanításnak. A tankönyvekben szereplő adatok gyakran hiányosak, többször pontatlanok és általában nem naprakészek, pedig a diákok számára egyáltalán nem lenne érdektelen ez a téma. Ez elsősorban abból mérhető le, hogy a tanulók elég sokat kérdeznek, és szerencsére ez a fajta kíváncsiság nem csak a fizika iránt fogékonyabbakra jellemző. Általános tapasztalatom, hogy az energetika és ezen belül különösen a nukleáris energiával kapcsolatos ismeretek a tanulók nagy többségét komolyan érdeklik. Ennek okán az utóbbi években már tudatosan úgy irányítom tanóráimat, hogy a tankönyvi ismeretek mellett több olyan kiegészítő információt is átadok tanítványaimnak, amelyek véleményem szerint hozzájárulhatnak az energiatermeléssel kapcsolatos kérdések helyes értelmezéséhez. Ez a 7–8. évfolyamokon a fizikai háttér egyszerűsített bemutatásában, a magasabb évfolyamokon ennek részletes ismertetésében, illetve jelentőségének, valamint előnyeinek és hátrányainak megfogalmazásában és elemzésében nyilvánul meg. Megpróbálom ezzel azt biztosítani, hogy az évek során a diákokban kialakuljon egy olyan fizikatudásra épülő szemlélet, amely elősegítheti az energetika témakörében felmerülő problémák reális megítélését.

A gimnáziumi fizikatanítás lezárásaként, a 11. tanév (a hatosztályos képzésben részt vevők esetében 2024-

ig), illetve a 10. tanév (2020-as NAT szerint tanulók esetében) utolsó fizikaóráján az általam tanított osztályok egy 15 kérdésből álló, 15 perc időtartamú, energetikához kötődő *Energiatesztet* írnak meg. A teszt első 10 kérdése egy 2011-es ELTE-s felmérésből [1], a 11–15. kérdések saját ötleteimből származnak. Az eredeti felmérés kérdései elsősorban az energetikához kapcsolódó általános fizikai ismeretekre utalnak, az általam kitalált kérdések pedig konkrétan Magyarország jelenlegi energiatermelésére vonatkoznak [2]. Egy kivétellel egyik válasz sem igényel számolást, törvények ismeretére és a jelenségek fizikai magyarázatára kérdez rá, illetve számszerű becslést kér a magyarországi energiatermelésben résztvevő alkalmazások részarányáról.

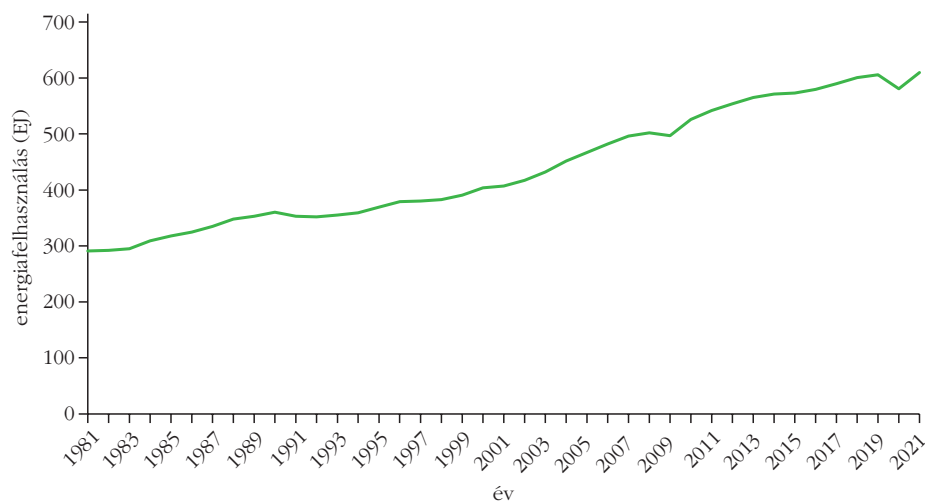
Az utóbbi három évben a tesztet három alkalommal sikerült megíratnom, ebben három különböző tagozatú osztály vett részt, egy humán (angol), egy reál (speciális matematika) és egy vegyes (természettudomány-német) érdeklődésű tanulócsoporthoz. A válaszok ismertetése még az órán megtörtént, így a tanulók rögtön felmérhették a témakörhöz kapcsolódó tudásukat. Sajnos az eredmények mindhárom esetben elgondolkodtatón alacsonyok voltak, az összesített helyes válaszok aránya mindegyik osztálynál csak 40% körül ingadozott. Öt évnyi fizikatanulás után ez az érték rendkívül gyengének mondható, a jövőben ezt mindenképpen emelni kell. Ehhez az évek során természetesen szükséges lesz a diákok részére további ismeretek átadása, de emellett célszerűnek látszik a záró órán néhány eddigihez képest új információt is közölni. Ezek a már befejezett fizikatanulás alapján a diákok számára teljesen érthető és felnőttkorukban segíthetnek az aktuális energetikai problémákkal kapcsolatos tisztánlátásban.

Az ismeretanyag átadása, konkrét adatok bemutatása a témához kapcsolódó kérdések és válaszok, illetve egy-egy egyszerűbb számolás alapján a diákokkal történő beszélgetés formájában nyilvánulhat meg. Ebben az adatok forrásai (linkek), illetve az információkhoz kapcsolódó videók és ábrák is kivetítésre kerülhetnek, amellyel lehetővé válhat számukra a további böngészés lehetősége is. A bemutatandó adatok a következők lehetnek:

A cikk a Magyar Nukleáris Társaság által tanároknak kiírt pályázaton II. díjat nyert azonos című pályamű gondolatai alapján íródott. (<https://nuklearis.hu/dijaztuk-tanarainkat>)



Gärtner István 38 éve van a tanári pályán, 2000 óta az Óbudai Árpád Gimnázium fizikatanára. Jelenleg az ELTE Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítási Program doktori védés előtt álló PhD hallgatója, kutatási területe az energetika témaköréhez, illetve ennek középiskolások számára történő megismertetéséhez kapcsolódik.



1. ábra. Az emberiség évenkénti energiafogyasztása (1981–2021).

– A Föld lakosságának éves teljes energiafogyasztása [3], az elmúlt négy évtized növekedési üteme (1. ábra – saját forrás).

– A Föld lakosságának számértéke [4].
 – Egy ember által mechanikai úton átlagosan megtermelhető energia mennyisége [5].

– A különböző energiaforrások részarányának változása a világ teljes energiatermelésében az elmúlt évtizedekben [6].

– A Föld lakosságának éves elektromosenergia-fogyasztása [7].

– A különböző típusú energiaforrások jelenlegi részaránya a világ elektromosenergia-termelésében [8].

– Magyarország lakosságának éves teljes energiafogyasztása [9], kiegészítve a megújuló energiaforrások elmúlt két évtizedben megjelenő részarányával [10].

– Magyarország lakosságának éves elektromosenergia-fogyasztása, kiegészítve a különböző energiaforrások elmúlt két évtizedben megjelenő részarányával [11].

Az adatok megjelenítésének célja az is, hogy észrevevtesse a diákokkal a fosszilis energiahordozók energiatermelésben betöltött magas és évtizedek óta gyakorlatilag stagnáló részarányát. Ennek alapján joggal feltételezhetik, hogy ez az arány az ő aktív felnőttkorukban, tehát az elkövetkező 20-30 évben sem fog jelentősen változni. Célszerű elfogadniuk azt a tényt, hogy a jövőben is szükség lesz mind a fosszilis, mind a nukleáris energiahordozók alkalmazására is, mert csak megújuló energiaforrásokkal lehetetlen megoldani az emberiség energiaproblémáit. Lényeges, hogy a felnövekvő korosztályok is megértsék, hogy a nukleáris energia szerepe meghatározó lehet az ő életükben is, ezért ismerniük kell az ehhez kapcsolódó információkat is.

A nukleáris energiahordozók pillanatnyi (2021) részaránya a teljes energiatermelésben valamivel több, mint 4%, ami a 2000-es évek elején mért közel 7% értékhez képest visszaesést mutat [5]. Okkal feltételezhető viszont, hogy a jelenlegi háborús konfliktus-

ból származó energiaválságnak köszönhetően, ez a csökkenő folyamat meg fog állni, sőt esetleg vissza is fordul. Az energiafogyasztás trendje (1. ábra) alapján az is belátható, hogy az energiafelhasználás nem fog csökkenni, ugyanakkor a kieső fosszilis energiahordozókból származó energiamennyiséget megújulókkal nem lehet maradéktalanul pótolni, így nukleáris energiára továbbra is szükség lesz. Érdekes erről a diákokkal olyan kérdésekkel irányított beszélgetést kezdeményezni, amelyben ők is elmondhatják

véleményüket, illetve a megoldásra vonatkozó ötleteiket. Néhány lehetséges kérdés, amelyek felmerülhetnek ebben a beszélgetésben:

1. Szerintetek mi lehet az oka annak, hogy a nukleáris energia társadalmi megítélése az utóbbi évtizedekben negatív irányba változott?

2. A nukleáris energia milyen felhasználási lehetőségeit ismeritek?

3. Melyek a nukleáris energiaforrások felhasználásának előnyei a többi energiahordozóhoz képest?

4. Melyek a nukleáris energiaforrások felhasználásának hátrányai a többi energiahordozóhoz képest?

5. Hogyan lehet ezen hátrányokat kompenzálni?

6. Jelenleg milyen energiahordozókkal történő energiatermelési lehetőségei vannak Magyarországnak, ezek milyen részarányt képviselnek a teljes energiatermelésben?

7. Változhat-e jelentősen ez a közeli jövőben, és ha igen, akkor véleményetek szerint milyen mértékben?

8. Milyen érvek szólnak Magyarországot esetében a nukleáris energiahordozókkal történő elektromos energiatermelés mellett?

Több évtizedes tanítási tapasztalatom alapján feltételezem, hogy a bejövő válaszokban több pontatlanságra lehet számítani, hiányos ismeretre, illetve esetenként téves elképzelésekre is, amelyek általában valamilyen külső hírforrásból (internet, újságok) erednek. Melyek lehetnek a várható válaszok?

1. A környezetvédő szervezetek befolyását biztosan megemlítik, és utalnak azokra a társadalmi félelmekre is, amelyek a nukleáris katasztrófák vélelméből adódnak. Általában nem veszik észre, hogy a félelmek keltésében és erősítésében a médianak van a legnagyobb szerepe.

2. A lehetőségek közül főleg az elektromos energiatermelés kerül elő, esetleg a tengeralattjárókban, illetve a jégtörőkben történő alkalmazás, de a gyógyászati lehetőségekre (például izotópgyártás) általában nem gondolnak.

3. Az előnyök között egészen biztosan elhangzik a „környezetbarát” energiatermelési mód, tehát, hogy nincs káros kibocsátás, és valószínűleg megjelenik a stabilitás kérdése is, vagyis a közel állandó mennyiséggel megtermelt energia ténye. Viszont valószínűleg tanári kiegészítéssel kell tudatosítani azt, hogy a nukleáris energia előállítására igényli a legkevesebb mennyiségű fűtőanyagot, az ily módon előállított energia a legkisebb költségű, és hogy az üzemeltetés sok és biztos munkahelyet teremt.

4. A hátrányok között első helyen a sugárzástól, illetve a katasztrófaaktól való félelem szerepel, és egy-egy diákban tudatosul a fegyverként történő felhasználás lehetősége is. Itt tanári kiegészítésként meg kell említeni a magas építési, illetve a leállítás utáni leszerelési költségeket is.

5. A kompenzálásra a fizikai sugárvédelem ötlete kerülhet elő, de a diákok közül kevesen ismerik pontosan, hogy milyen konkrét megoldások biztosítják a védekezést a radioaktív hulladékokkal szemben. Ennél a kérdésnél a tanárnak kell bemutatnia a Bábaapátiiban található hulladékártoló szerepét, és beszélni azokról a megoldásokról, amelyekkel ott hosszú távra biztosítják a hulladékok elhelyezését. Célszerű rövid ismertetést adni a Paksi Atomerőmű biztonságáról is, valamint arról, hogy bár az építési költségek jelentősek, de a nukleáris erőművek élettartama többszöröse a fosszilis, illetve – a vízenergiát nem számítva – a többi megújuló energiaforrással működő erőműnek.

6. A tanulók talán itt szembesülnek először – a számok alapján is – azzal a ténnyel, hogy az energia szempontjából mennyire kiszolgáltatott Magyarország, illetve azzal is, hogy az általunk megtermelt energia milyen összetevőkből áll elő.

7. A táblázatok [9–11] elemzése rávezeti a diákokat arra, hogy az elkövetkező évtizedben jelentős változás nagyon kis valószínűséggel következik be, legfeljebb néhány százalékos növekedés valósulhat meg.

8. Az érvek felsorolása csak akkor lehet pontos, ha a tanulók megfelelő földrajzi ismeretekkel is rendelkeznek. Ebben szerepelnie kell a napsütéses órák száma korlátozottságának, a kevés mennyiségű és egyenetlen széljárásnak, valamint a folyók kis eséséből és alacsony vízhozamából származó, az energiatermelés szempontjából kedvezőtlen lehetőségeknek. Itt lehet pontosan megértetni a középiskolás diákokkal az energiatermelésben nagyon fontos energiasűrűség fogalmát.

Az óra lezárásaként célszerű kikérni a tanulók véleményét az energetika témakörének általános fontosságáról, és ezzel egyben rávezetni őket arra, hogy a témakörhöz kapcsolódó kérdések, az adott válaszok, valamint a kiegészítő ismeretek, a jövőjük szempontjából meghatározók lehetnek. Meg fogják érteni, hogy mindannyian kerülhetnek olyan helyzetbe, amikor a már említett megfelelő tudáson alapuló, és így reálisnak mondható szemlélet sokat segíthet egy adott kérdés eldöntésében, vagy egy ismeretlen információ valóságtartalmának pontos megítélésében. Ez lehet a végső cél!

Irodalom

1. Juhász András, Nagy Péter: Mit tudnak középiskolások az energiáról? – Egy felmérés eredményei. In: *Természettudomány Tanítása Korszerűen és Vonzóan* – Konferenciakiadvány, Budapest (2011) 354–363.
2. http://www.arpadgimnazium.hu/wp-content/uploads/2022/10/A-nukleáris-energia-pozitiv-bemutatasa_gartner-istvan.pdf
3. <https://yearbook.enerdata.net/total-energy/world-consumption-statistics.html>
4. <https://www.worldometers.info/population/>
5. <https://www.netfizika.hu/miert-nem-eros-emberek-termelik-az-aramot-hanem-eromuvek>
6. <https://ourworldindata.org/grapher/sub-energy-fossil-renewables-nuclear?time=1965..latest>
7. <https://yearbook.enerdata.net/electricity/electricity-domestic-consumption-data.html>
8. <https://ourworldindata.org/electricity-mix>
9. https://www.ksh.hu/stadat_files/ene/hu/ene0002.html
10. https://www.ksh.hu/stadat_files/ene/hu/ene0001.html
11. https://www.ksh.hu/stadat_files/ene/hu/ene0009.html

LEGUTÓBB 768 696 FORINTTAL TÁMOGATTÁK A TÁRSULAT MUNKÁJÁT, KÖSZÖNJÜK.

SZÁMÍTUNK RÁD, HOGY A FIZIKA BAZILIKÁJA!

Adószámunk: 19815644-2-43

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtítkár, felelős szerkesztő Iglói Ferenc főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszerűsített adószámmal.

Megjelenik havonta (nyáron duplaszámmal), egyes szám ára: 1200.- Ft (duplaszámú 2400.- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)



PETR BECKMANN: A PI TÖRTÉNETE

Izgalmas könyvsorozat első darabja került pár hete a könyvesboltokba, *Petr Beckmann A pi története* című műve, amely a remek természettudományos és tudománytörténeti könyveiről ismert Typotex Kiadó gondozásában jelent meg 2022. év végén.

A sorozat alap gondolatát *Edwin Taylor*, a zseniális *Téridőfizika* (Gondolat, 1974, illetve Typotex, 2006) társszerzője adta. E sorok írója körülbelül 10 éve az ő bostoni könyvespolcán látott meg egymás mellett három könyvet: Petr Beckmann *A History of Pi*, *Eli Maor e – The Story of a Number* és *Robert Kaplan The Nothing That Is – A Natural History of Zero* című kötetét. A három könyvet más-más kiadók adták ki, több évtized különbséggel, csupán Taylor rendszerező elméje helyezte őket egymás mellé a polcon, hiszen mindhárom könyv témája *egy-egy szám*.

Rövid kutatómunka után kiderült, hogy – ismét csak más-más szerzők tollából, más-más kiadók gondozásában – további nevezetes számokról is kiadtak már tudománytörténeti munkákat: léteznek külön könyv például az *i imaginárius egységről*, a *végtelen számfogalmáról*, és az *aranymetszés számáról*. A Typotex Kiadó lelkesen fogadta az ötletet, hogy a nevezetes számokról írt könyvek egyetlen, egységes arculattal ellátott *sorozatként* jelenjenek meg magyarul. E tervezett sorozat indítódarabja *A pi története*.

A könyv írója, Petr Beckmann (1924–1993) Csehszlovákiában született. 1939-ben a nácik elől családjával együtt Angliába menekült, ahol a Királyi Légierő cseh alakulatának tagjaként harcolt a világháborúban. A háború után hazájába visszatérve villamosmérnöki diplomát, később PhD fokozatot szerzett. 1963-ban ismét elmenekült Csehszlovákiából, ezúttal a kommunista rezsim elől, és az Egyesült Államokban telepedett le. A Colorádói Egyetem villamosmérnök professzora lett, és hátralevő éveit ott is élte le.

Mintegy tucatnyi szakmai és történeti könyve közül hírnévben kiemelkedik a pi történetét elmesélő „szubjektív tudománytörténeti mű”. A könyv egyik vezérmotívuma, hogy a pi *számértékét* a különböző korokban a természettudósok milyen módszerekkel próbálták

meghatározni, és egyáltalán mennyire tartották a pontos számérték meghatározását fontos elvi vagy gyakorlati kérdésnek. A könyv az ókori Egyiptommal és Indiával indít, azután több fejezeten keresztül, igazi rajongó szenvedéllyel ír a görög matematika aranykoráról. Közben a római birodalmat is megemlíti a szerző, ahol ismét feltűnő a szenvedélye, csak ellenkező előjellel (jellemző fejezetcím: *A római pestis*). Következik a sötét

középkor, majd a felvilágosodás és az újkori matematika aranykora. Külön fejezet szól *Newtonról* és *Eulerről*, mint a pi történetének (is) kiemelkedő szereplőiről. Szó esik a kör négyeszetítésének problémájáról, a pi irracionális és transzcendens voltáról, érdekes geometriai szerkesztésekről, elégszám algebrai összeg- és szorzat-formulákról, végül – a pi legújabbkori történetének fontos fejezeteként – a számítógépes „számjegyvadászatról” is.

A pi történetének hősei között zseniális, korszakalkotó matematikusokat és „tisztess mesterembereket” egyaránt találunk, és Beckmann egyforma érzelmi hőfokon, egyforma empátiával mutatja be őket. Vannak személyes hősei, akikkel elfogult (legfőképpen Newton, akiről olvasás

közben az a kép alakul ki, hogy egyszerűen soha semmiben nem tévedett), de ez az időnkénti elfogultság sem zavaró. Az ember szívesebben olvas lelkes és szenvedélyes tudománytörténetet – még ha időnként magában vitatkozik is vele –, mint tényyszerű, távolgártartó adatközléseket.

A könyv nagyon széles olvasóközönséget vesz célba. Az érzékletes és izgalmas tudománytörténeti leírásokat azok is élvezettel olvashatják, akiknek matekkel utoljára középiskolában volt dolguk, és azóta nem is szívesen keresik vele a kapcsolatot. De a könyvben igazi matematikai ínycsége is található, amelyek nagy intellektuális élvezetet nyújthatnak mérnököknek, természettudomány-tanároknak, egyetemistáknak, de érzésem szerint akár matematikusoknak is.

Köszönjük a Typotexnek a pi-könyvet, *Gerner Józsefnek* pedig a remek magyar fordítást. Várjuk a számkönyvsorozat többi darabját!

Bokor Nándor



MAGYAR TUDÓSOK ÉS MŰVÉSZEK SZÜLŐHÁZA

- akik Nyugaton alakították a 20. század történelmét és kultúráját

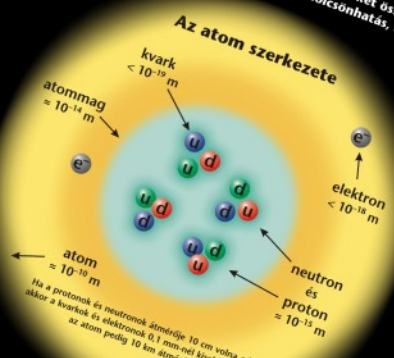
Z ELEMELI RÉSZECSKÉK ÉS ALAPVETŐ KÖLCSÖNHATÁSOK

Standard Modellje

Az elemi részecskékre és alapvető kölcsönhatásokra vonatkozó jelenlegi legpontosabb ismereteinket összegzi a Standard modell, amely az erős és egyesített elektromgennyel, a gravitáció, jöhetett alapvető kölcsönhatás, nem része a Standard modellnek.

leptonok (spin = 1/2)

| jel/iz | tömeg GeV/c ² | elektromos töltés |
|----------|--------------------------|-------------------|
| elektron | < 10 ⁻⁶ | 0 |
| muon | 0,000511 | -1 |
| tauon | < 0,0002 | 0 |
| neutrínó | 0,106 | -1 |
| ... | < 0,02 | 0 |
| ... | 1,7771 | -1 |



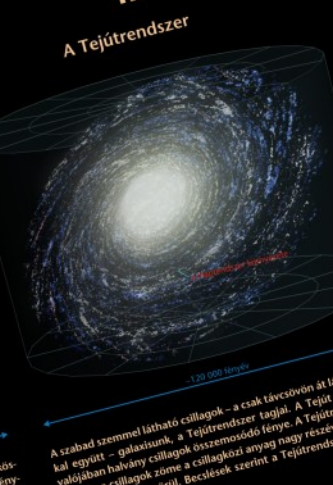
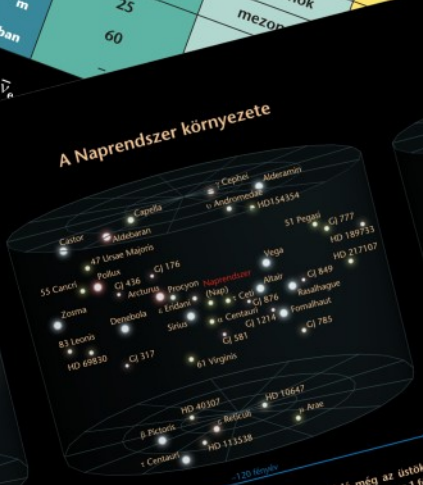
Bozonok - a kölcsönhatások közvetítői, spinjük: 0, 1, 2...

| erős - a kölcsönhatások közvetítői | elektromgennyel | | |
|------------------------------------|-----------------|---------|-----------------|
| jel/név | spin (spin = 1) | jel/név | spin (spin = 1) |
| gluon | 0 | photon | 0 |
| W boson | 1 | Z boson | 1 |

A kölcsönhatások tulajdonságai

| kölcsönhatás | erős | elektromgennyel |
|-----------------|------------------|------------------|
| erős | szintöltés | szintöltés |
| elektromgennyel | kvarkok, gluonok | kvarkok, gluonok |
| gravitáció | gluonok | gluonok |
| ... | 25 | 60 |

HELYÜNK A VILÁGEGYETEMEN



A szabad szemmel látható csillagok - a csak távcsővön át látható lárszakkal együtt - galaxisunk, a Tejútrendszer tagjai. A Tejútrendszer spirális galaxis: a csillagok zöme a csillagközi anyag nagy részével együtt spirális csillag alkotja.

A galaxisok túlnyomó többsége nem elszórtan helyezkedik el a térben, hanem csoportosulva. Néhány tucat tagból állnak a galaxiscsoportok, és több száz vagy akár ezer tagja is van a galaxis-halmazoknak. A Tejútrendszer a Lokális csoporthoz tartozik körülbelül 60 ismert galaxissal együtt. E csoport meghatározó tagjai a Tejútrendszer spirális csillag (M31) és a Triangulum-kód (M33) - mindhárom spirális galaxis. Mellékletük számos szabálytalan és ellipszoidális törpegalaxis alkotja a Lokális csoportot.

POSZTEREINKET KERESD A FIZIKAISZEMLE.HU MELLÉKLETEK MENÜPONTJÁBAN!

A Naprendszer nem ér véget a Kuiper-övezet, kifelé még az üstökösöket tartalmazó Oort-felhő található, amelynek átmérője az 1 fényévet is meghaladja. A Naphoz legközelebbi csillag, a Proxima Centauri körülbelül 4,2 fényévre van tőlünk. A csillagok nem egyforma méretűek, ezért egy csillag látszó fényességéből nem lehet következtetni a távolságára. A csillag látszó fényességét (luminositása) a felszíni hőmérsékletétől és az átmérőjétől függ. Az égbolt legfényesebb csillaga a Sirius 8,6 fényre van tőlünk, jó néhány csillag ennél közelebbi. A legfényesebb csillagokra egyedi tulajdonságaikkal, a haláluk utáni állapotukkal és a csillagfajlagosságukkal kapcsolatos információkat lehet beszerezni.

A Föld energia-háztartása bolygónkban lévő rendszert írja le, egyrészt a légkörét erő, valamint az onnan származó hő- és fényenergia mennyiségeket. Ezek lehetnek szűkebb értelemben a hő- és fényenergia, mint az a hő- és fényenergia, amely a Föld felszínéről a légkör felé áramlik, vagy a légkör felől a Föld felé áramlik. A légkör felől a Föld felé áramló hő- és fényenergia a napenergia, amely a Föld felé áramlik, mint az infravörös sugárzásból származó energia.

a légkör által elnyelt **77 W/m²**

a felszín által visszavert **23 W/m²**

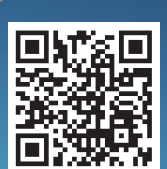
infravörös kisugárzás **239,7 W/m²**

a légkör által kibocsátott **170 W/m²**

a légkör által elnyelt **358 W/m²**

felhők által kibocsátott **100 W/m²**

légköri ablak **40 W/m²**



A poszterek szabadon letölthetők, kinyomtathatók és oktatási célra, nonprofit felhasználhatók. Kereskedelmi forgalomba nem hozhatók, változtatás csak a Fizikai Szemle engedélyével lehetséges. A kirakott poszterekről fényképet kérünk a szerkesztok@fizikaiszemle.hu címre.