

fizikai szemle

Nobel-díj 2025

A kvantumfizika akcióban

Plan Fluor
10X/0.30 A
∞/0 EPI
MADE



A vikingek navigációja

2026/1

nka

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

SZERKESZTŐSÉG

Felelős szerkesztő: Iglói Ferenc főszerkesztő
Olasz szerkesztő: Bodrog Zoltán
Technikai szerkesztő: Hock Gábor

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG

Asbóth János, Biró László Péter, Csengeri Kamilla, Czitrovsky Aladár, Gyürky György, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Járai-Szabó Ferenc, Kiss Ádám, Kopasz Katalin, Néda Zoltán, Ormos Pál, Pálfalvi László, Pásztor Gabriella, Sándor Bulcsú, Simon Ferenc, Simon Péter, Sódor Ádám, Sükösd Csaba, Szabó Gábor, Takács Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

Kiadja és terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat,
1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III.
Telefon/fax: (1) 201-8682
Felelős kiadó: Újfalussy Balázs főtítkár

A Társulat és a folyóirat honlapja:
<http://fizikaiszemle.elft.hu>,
e-postacíme: elft@elft.hu

A folyóirat szerkesztőségi e-mail címe:
fsz_szerkesztok@elft.hu. A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük. Kéziratokat nem őrünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.



Nyomdai előkészítés: Hock Gábor. *Nyomdai munkálatok:* OOK-PRESS Kft., *felelős vezető:* Szathmáry Attila ügyvezető igazgató. Előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán. Az egyes számok ára: 2000,- Ft (a dupla számoké 4000,- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015-3257 (nyomtatott)
HU ISSN 1588-0540 (online)

A lapot az MTA Magyar Tudományos Művek Tára (MTMT) archiválja



A címlapon:

Kvantumos áramkör mikroszkóp alatt a BME TTK Kvantumelektronika Laborjából

TARTALOM

NOBEL-DÍJ 2025

Vendégszerkesztő: Asbóth János

- Asbóth János:* A 2025-ös fizikai Nobel-díj hatásáról – Vendégszerkesztői előszó 1
Vukics András: A 60 éves Jaynes–Cummings-modell és a 2025-ös fizikai Nobel-díj 2
A cikk abból ad ízelítőt, milyen új távlatokat nyitott a Nobel-díjjal frissen kitüntetett 1984-es kísérletsorozat a kvantumoptikában – még pontosabban, a rezonátoros kvantum-elektrodinamikában.
- Pályi András, Svastits Domonkos:* A kvantummechanikai mérés egyszerű dinamikai modellje 7
A kvantum mérés „tankönyvi esete” a mért kvantum rendszer véletlenszerű, azonnali „beugrását” jelenti valamilyen makroszkopikus mérőműszer hatására. A valódi mérés azonban zajos és zűrös, nem pillanatszerű; és ennek mélyebb megértéséhez kapcsolódó egyszerűbb modellt mutat be az írás.
- Gilyén András:* Hogyan használjuk majd a kvantumszámítógépeket? 12
A kvantumszámítógépek jövőbeli alkalmazási lehetőségeiről ír Magyarország egyik gyakorló kvantumalgoritmus-fejlesztője.
- Kováts Éva:* A fém-szerves vázszerkezetek tudománya: A 2025-ös kémiai Nobel-díj háttere 18
A 2025-ös kémiai Nobel-díjat egy sokféleképpen variálható, porózus anyagcsalád kifejlesztéséért ítélték oda. Ezek az újfajta, nagy üregeket tartalmazó, akár rugalmas kristályok számos fontos gyakorlati alkalmazással rendelkeznek, pl. az energiatárolásban, a szén-dioxid vagy a víz megkötésében.

TANULMÁNY

- Horváth Gábor, Száz Dénes, Takács Péter, Farkas Alexandra, Blahó Miklós, Bernáth Balázs, Barta András, Egri Ádám:* A vikingek égpolarizációs navigációja, avagy milyen eséllyel érthették el Grönlandot és fedezhették föl Amerikát? 23
A viking hajósok az északi irányt napiránytű segítségével rögzítették, melyhez a Nap helyzetét lineáris polárszűrőkhöz hasonlóan működő napkő-kristályokkal határozták meg.

A FIZIKA TANÍTÁSA

- Tóth Kristóf:* A kvantummechanikai valószínűségekről középiskolában 27
A szerző egy saját tanóráin kipróbált megközelítést ismertet, ahol olyan gondolat kísérleteket tárgyalnak egyszerű, intuitív módon, amelyeket fotonokkal, polarizációs szűrőkkel végezhetünk el.
- Jánosi Dániel, Jánosiné Kemenczei Edina:* A kaotikus mozgás tanítása – akár általános iskolában 34
Az írás bemutatja, hogy egy szokatlan mozgás, a kaosz fogalma már általános iskolai szinten bevezethető, és segít a tananyagot közelebb vinni a valósághoz.

NOBEL PRIZE 2025

- J. Asbóth:* On the impact of the 2025 Nobel Prize in Physics – Introduction
A. Vukics: 60 years of the Jaynes–Cummings model and the 2025 Nobel Prize in Physics
A. Pályi, D. Svastits: A simple dynamic model of quantum mechanical measurement
A. Gilyén: How will we use quantum computers?
É. Kováts: The science of metal-organic frameworks: The background to the 2025 Nobel Prize in Chemistry

STUDY

- G. Horváth, D. Száz, P. Takács, A. Farkas, M. Blahó, B. Bernáth, A. Barta, Á. Egri:* The celestial polarization navigation of Vikings, or what were the chances they could have reached Greenland and discovered America?

TEACHING PHYSICS

- K. Tóth:* About quantum mechanical probabilities in high school
D. Jánosi, E. Jánosiné Kemenczei: Teaching chaotic motion – even in elementary school

Fizikai Szemle
MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését támogatják:



KULTURÁLIS ÉS
INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM

nka
Nemzeti Kulturális Alap

group
m v m



A 2025-ÖS FIZIKAI NOBEL-DÍJ HATÁSÁRÓL – VENDÉGSZERKESZTŐI ELŐSZÓ

Asbóth János^{1,2}

¹BME, Elméleti Fizika Tanszék, ²HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest
E-mail: asboth.janos@ttk.bme.hu

Épp csak lezárult a 2025-ös „Kvantum Nemzetközi Éve”, amikor lépten-nyomon találkozhattunk a kvantumfizika érdekességeivel (pl. a *Fizikai Szemle* 2025. július–augusztusi dupla számában, vagy az MTA-n tartott „Kvantumok világa” előadás-sorozatban), és most ismét kvantumfizikai cikkek egy kisebb csokrát közöljük a *Fizikai Szemlében*. Az ok, hogy a Kvantum Nemzetközi Évéről a Nobel-bizottság sem felejtkezett el: 2025-ben a Nobel-díjat John Clarke (University California, Berkeley), Michel H. Devoret (Yale University és University of California, Santa Barbara) és John M. Martinis (University of California, Santa Barbara és Qolab, Los Angeles) kapta egyenlő arányban megosztva, mert „elektromos áramkörben kimutatták a makroszkopikus kvantumos alagutazást és az áramkör energiáinak kvantáltságát”. A Nobel-díjjal kitüntetett 1984–1985-ös kísérletsorozat, annak háttérét és hatását a *Fizikai Szemle* 2025. decemberi számában Csonka Szabolcs és Makk Péter ismertette. A mostani számban olyan hazai kvantumos kutatásokról, oktatási kísérletekről számolunk be, amelyek a Nobel-díjhoz tágabb értelemben kapcsolódnak.

Vukics András cikke, „A 60 éves Jaynes–Cummings-modell és a 2025-ös fizikai Nobel-díj”, abból ad ízelítőt, milyen új távlatokat nyitott a frissen Nobel-díjjal kitüntetett 1984-es kísérletsorozat a kvantumoptikában – még pontosabban, a rezonátoros kvantumelektrodinamikában. A fizika ezen területén a fény és anyag kvantumos kölcsönhatását talán a legjobban lecsupaszítva, leegyszerűsítve tanulmányozzák, erre példa a Jaynes–Cummings-modell is. Itt a szereplők egy fénymódus és egy atomi átmenet, melyek kvantumos gerjesztéseket cserélhetnek ki egymással, illetve amelyek „kívülről” (lézerrrel) gerjeszthetők, és „kifele” bomlanak. A Nobel-bizottság szerint a szupravezető áramkörök „lehetővé teszik a kvantumoptika tanulmányozását olyan paramétertartományokban, amelyek az atomfizika számára nem hozzáférhetőek”. Erre példa az úgynevezett fotonblokad



Asbóth János a BME Elméleti Fizika Tanszékének docense és a HUN-REN Wigner FK Kvantumoptika és Kvantuminformatika Osztályának tudományos főmunkatársa. A BME-n kvantumos hibajavításos elméleti kutatásaival az „OpenSuperQPlus” EU-s projekthez járul hozzá, amely egy szupravezető 1000 kvantumbites, EU-s kvantumszámítógép építését célozza.

áttörésének jelensége, amit Vukicsék elméletileg 2015-ben tártak fel, és amit szupravezető áramkörökkel 2017-ben, majd később 2024-ben valósítottak meg – lényegileg az 1984-es, Nobel-díjas kísérletsorozat továbbfejlesztett verziójával.

Pályi András és *Svastits Domokos* cikke, „A kvantummechanikai mérés egyszerű dinamikai modellje”, a Nobel-díjjal kitüntetett munkához hasonlóan a kvantummechanika elvi alapjainak és az elektronikai kísérletnek a kapcsolatáról szól. Itt a szuperpozíció helyett a kvantummechanika másik rejtélyes fogalma, a mérés áll a középpontban. A kvantumos mérés „tankönyvi esete” – ahogy azt az egyetemen tanítjuk – a mért kvantumos rendszer véletlenszerű, azonnali „beugrását” jelenti valamilyen makroszkopikus mérőműszer hatására. A valódi mérés azonban zajos és zűrös, nem pillanatszerű, hanem egy dinamikai folyamat – ezzel kell szembenéznie bárkinek, aki például elektronikus áramkörökben vizsgál kvantumos jelenségeket. Az ilyen valódi mérések mélyebb megértéséhez fontosak az olyan könnyen vizsgálható modellek, amelyet itt a szerzők bemutatnak.

Gilyén András azt a – mondhatnánk, százmillió dolláros – kérdést teszi fel: hogyan használjuk majd a kvantumszámítógépeket? A Nobel-díj bizottság kiemeli, hogy a díjazottak munkája vezetett el a szupravezetőn alapuló kvantumszámítógépekhez. De mit is várhatunk ezektől, mire lesz jó, ha majd sikerül elég sok biten elég megbízhatóan működő kvantumszámítógépet építeni? Ebbe nyújt betekintést Gilyén András, Magyarország kevés gyakorló kvantumalgoritmus-fejlesztőinek egyike.

Tóth Kristóf cikke, „A kvantummechanikai valószínűségekről középiskolában”, is kapcsolódik a 2025-ös fizikai Nobel-díjhoz, hiszen mindig felmerül a kérdés: hogyan lehet a kvantummechanika furcsaságait, a szuperpozíciót, a mérést megismertetni, felfedeztetni a középiskolásokkal. A szerző egy saját tanóráin kipróbált megközelítést ismertet, ahol olyan kísérleteket tárgyalnak egyszerű, intuitív módon, amelyeket fotonokkal és polarizációs szűrőkkel végeztek. A kísérleteket ugyan közvetlenül az iskolában nem lehet elvégezni, mert a szükséges egyfotonforrások, egyfotonos detektorok drága eszközök, de a kísérletek leírása elég egyszerű ahhoz, hogy a diákok megértsék az eredményeket, feltehessék a kérdéseiket azokkal kapcsolatban, és így saját munkával tudják felfedezni azt, miben más a kvantummechanikai véletlenszerűség a hagyományoshoz képest.

Remélem, a cikkek segítenek megmutatni a 2025-ös fizikai Nobel-díj mai kontextusát. Jó olvasást!

A 60 ÉVES JAYNES–CUMMINGS-MODELL ÉS A 2025-ÖS FIZIKAI NOBEL-DÍJ

Vukics András

HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Kvantumoptika és Kvantuminformatika Osztály, Budapest
E-mail: vukics.andras@wigner.hun-ren.hu

Bevezetés

A 2025-ös fizikai Nobel-díjat a *makroszkopikus kvantummechanikai alagúteffektus* és az *energiakvantáltság elektromos áramkörben való kimutatásáért* ítelték oda [1], vagyis annak a fizikai platformnak a megalapozásáért, amelyet a kvantumtechnológia területén ma szupravezető kvantumáramköröknek vagy a fenomenológia nézőpontjából áramköri kvantumelektrodinamikának (*circuit quantum electrodynamics* – cQED) nevezünk [2,3]. A Josephson-átmenetekre épülő, mesterséges atomokként viselkedő szupravezető áramkörök jelenleg a kvantumszámítógépek egyik fő implementációját képezik, amelyek fejlesztésében akadémiai szereplők mellett olyan technológiai óriások is vezető szerepet vállaltak, mint a Google és az IBM.

Jelen írásunkat azonban nem annyira a kvantumszámítástechnikai alkalmazások inspirálták, mint inkább a cQED kvantumoptikával való kapcsolata, melyre a Nobel-bizottság indoklása is rámutat:

„A qubiteken túl a szupravezető kvantumáramkörök hatással voltak a kvantumoptika fejlődésére is, amely hagyományosan az atomok és az elektromágneses tér kölcsönhatását vizsgálja. Szupravezető áramkörök felhasználásával a Josephson-átmeneteken alapuló új, mesterséges atomok tervezhetők, amelyek lehetővé teszik a kvantumoptika tanulmányozását olyan paramétertartományokban, amelyek az atomfizika számára nem hozzáférhetők.”

Ezt a kapcsolatot a Jaynes–Cummings-modellel és annak szupravezető kvantumáramkörökben történő szimulációin keresztül mutatjuk be. Így az írás másik apropója, hogy a modell 2023-ban ünnepelte 60. évfordulóját [4].

A Jaynes–Cummings-modell

A Jaynes–Cummings-modell a napjainkban mindinkább fősodorra váló kvantumtudomány egészének egyik leg-



Vukics András fizikus 2003-ban végzett az ELTE-n, 2007-ben doktorált a Szegei Tudományegyetemen. Az Innsbrucki Egyetemen töltött posztdoktori éveit után a Wigner Fizikai Kutatóközpontban folytatta a munkát, ahol jelenleg főmunkatárs és a Kvantumoptika és Kvantuminformatika Osztály vezetője. Kutatási területe a mikro- és mezoszkopikus nyílt kvantumrendszerek dinamikájának elméleti, komputációs és kísérleti vizsgálata.

alapvetőbb modellje, hiszen a legegyszerűbb modell, ami képes leírni egy kvantumbit és egy bozonikus módus kölcsönhatását. Ez utóbbi lehet a mikrohullámú vagy az optikai mező egy módusa, de akár egy anyaghullám (Bose-kondenzátum) egy módusa is. A modell Hamilton-operátora ($\hbar = 1$ egységrendszerben):

$$H_{JC} = \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \omega_r a^\dagger a + g(\sigma a^\dagger + \sigma^\dagger a).$$

A σ operátorok a kvantumbit dinamikáját írják le, és az $1/2$ -es spin esetéből ismert Pauli-algebrát alkotnak. Tehát például az első tag azt fejezi ki, hogy a 0 és 1 állapotok között ω_q energiakülönbség van. Egy fizikai rendszer kvantumbitként való viselkedése általában közelítésként jelenik meg, például egy atom esetében így viselkedhet egy alap- és egy gerjesztett állapot vagy két hiperfinom alapállapot, szupravezető kvantumáramkörök esetében pedig például az áram kétféle iránya.

Az a operátor a módus léptetőoperátora, ω_r pedig a módus körfrekvenciája. Az atomi és bozonikus alrendszer közötti csatolási állandó g , melyet Rabi-frekvenciának is nevezünk. Ennek az elnevezésnek az az oka, hogy a kölcsönhatási tag egy, a Rabi-spektroszkópia alapját képező jelenséggel¹ analóg oszcillációhoz vezet abban az esetben, ha a rendszert egy rögzített gerjesztési számú állapotban preparáljuk. Például, ha a kezdeti állapotban egy gerjesztés van a rendszerben: a kvantumbit az 1 állapotban van, a módus pedig a vákuumállapotban – vagy fordítva –, akkor ez a gerjesztés g frekvenciával oszcillálni fog a két alrendszer között.

A módus bozonikus természete miatt, vagyis mivel

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{és} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

ahol $|n\rangle$ az n darab fotont tartalmazó állapot, növekvő számú gerjesztés esetén az oszcilláció frekvenciája növekszik, ez a bozonikus erősítés egyfajta megjelenése. Tehát ha például a kvantumbit a 0 állapotban, a módus pedig az n fotont tartalmazó állapotban van, akkor a gerjesztés kicserélésének frekvenciája $\sqrt{n}g$ -re növekszik. Az oszcilláció tehát nemcsak az atom általi intenzívebb elnyelést, hanem az intenzívebb kibocsátást is

¹ A Rabi-oszcilláció először a nukleáris mágneses rezonancia, majd a mikrohullámú atomórák kapcsán merült fel az 1930-as és '40-es években. Ezekben a rendszerekben a kvantumbit egy klasszikus mező (mikrohullámú forrás vagy később lézer) hajtja meg, amely a Jaynes–Cummings-modellből kiindulva úgy írható le, hogy a modell utolsó tagjában az a operátort formálisan egy oszcilláló komplex amplitúdóval helyettesítjük. A mai kvantumtechnológiák nézőpontjából a jelenség lényege, hogy a kvantumbit egy teljesen klasszikus mezővel meghajtva a kvantum szuperpozíció állapotába hozhatjuk.

magában foglalja – ez utóbbi a *stimulált emisszió*, amely a kvantumelektrodinamika sajátos jelensége, és amely a Jaynes–Cummings-modellben egyszerűen az hermiticitás következtében jelenik meg. Ennek kapcsán érdemes megjegyezni, hogy névadói a Jaynes–Cummings-modellt eredetileg a mézérrel kapcsolatban dolgozták ki [5], amelyben a stimulált emisszió a koherens sugárzás létrejöttének alapmechanizmusa – ebben a tekintetben egyébként a lézérrel teljes analógiában.

A Jaynes–Cummings-modell egy sarkalatos közelítést is magában foglal. Abban az esetben ugyanis, ha egy atom és a vákuumbeli elektromágneses mező egy – tipikusan a mikrohullámú vagy optikai tartományba eső – módusa közötti kölcsönhatás leírására használjuk, legegyszerűbben az elektromos dipólus kölcsönhatás Hamilton-operátorából indulhatunk ki, amely $E \cdot d$ -vel arányos. Az atomi elektronok energiaszintjei közül két jól meghatározott állapotot kiválasztva az atom elektromos dipólusmomentumának d operátorát kifejezhetjük a Pauli-operátorokkal.

Lévén, hogy E és d külön-külön hermitikusak, belátható, hogy az így kapott Hamilton-operátorban a Jaynes–Cummings-tagok mellett egy, a gerjesztési számot meg nem őrző, σ_a alakú tag, valamint ennek hermitikus konjugáltja is jelen lesz.

Mivel ezek a tagok $\omega_q + \omega$, nagyságú eltérést okoznak az energiában, az idő és az energia közötti határozatlan-sági reláció következtében csak az ezen anomália reciprokának nagyságrendjébe eső időskálán befolyásolhatják a dinamikát. Míndaddig tehát, amíg a Jaynes–Cummings-dinamika releváns részét meghatározó g csatolási állandó jóval kisebb a szabad alrendszer sajátfrekvenciáinál, a gerjesztési számot meg nem őrző tagok elhanyagolhatók. Ez a forgóhullám-közelítés², amely tehát része a Jaynes–Cummings-modell nemrelativisztikus kvantumelektrodinamikából való levezetésének.

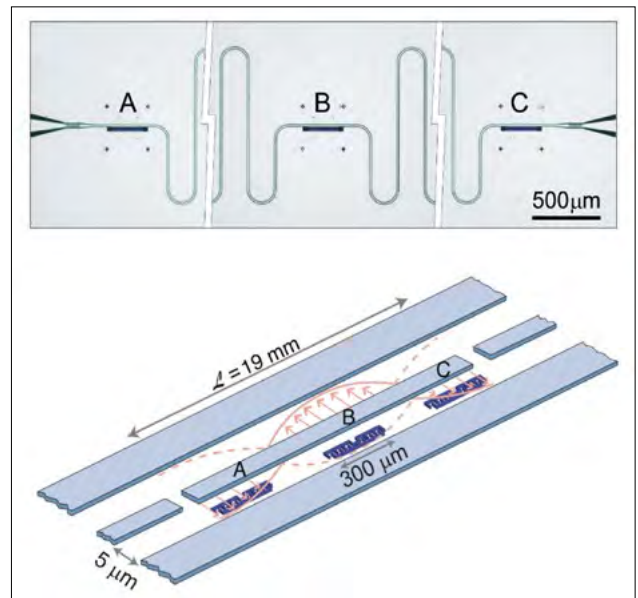
Az áramkör-quantumelektrodinamika

Meglepő módon bizonyos áramkörök, annak ellenére, hogy atomok milliárdjait tartalmazzák, úgy viselkednek, mint egyetlen atom – abban az értelemben, hogy spektrumuk alacsony energiás része jól meghatározott energiaszinteket tartalmaz, amelyek egyenlőtlenül helyezkednek el. Ennek alapja a szupravezetés, konkrétan, hogy egy klasszikus LC rezgőkörhöz Josephson-átmenetet csatolnak. Mára az ilyen szupravezető kvantumbiteknek a pontos áramköri szerkezet mentén több változata létezik, melyekben más-más szabadsági fokban van kódolva a kvantumbit két állapota, és amelyek tervezését a külső, fluktuáló mezők hatásával szembeni robusztusság vezérli. A *Fizikai Szemle* egy korábbi számában Gyenis András áttekintette ezt a témakört [2], ezért az áramkör-quantumelektrodinamikában megjelenő Jaynes–Cummings-modell kvantumbit-összetevő-

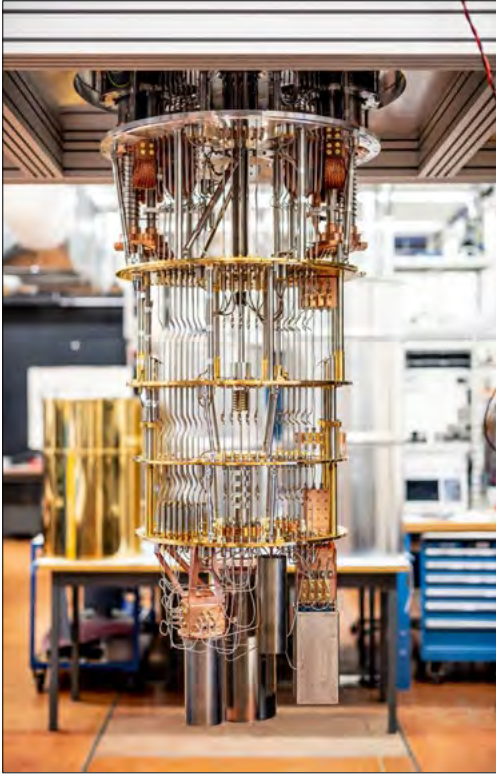
² Amelynek itt egy nagyon intuitív leírását adtuk, a rigorózus levezetés a kölcsönhatási képen és a szekuláris-sorfejtésen alapul.

jével itt nem foglalkozunk részletesen, ezt a nemzetközi terminológiát követve „transzmonnak” fogjuk nevezni a továbbiakban. Ezekben a rendszerekben a kvantumbit két állapotának energiakülönbsége, ω_q a mikrohullámú tartományba esik, tipikus értéke 5–10 GHz.

Ebben a fejezetben a másik összetevőt, a bozonikus módot járjuk körül részletesebben, valamint ennek a transzmonhoz való csatolását, tehát a Jaynes–Cummings-modell második és harmadik tagját. A transzmonalapú kvantumszámítógépekben minden kvantumbithez tartozik egy beíró mikrohullámú átviteli vonal, amellyel a Rabi-oszcilláción alapuló állapotpreparálást és az egy kvantumbites kapukat megvalósítják. Ennek ideálisan nincs önálló dinamikája, mindössze egy meghajtó tagként jelenne meg a JCM-ben. Az állapotkiolvasáshoz azonban tipikusan egy ún. koplánáris rezonátort használnak, amely egy olyan, két végén lezárt, az áramköri lapra integrált átvitelivonal-szakasz – lényegében egy darab kilapított koaxiális kábel – melynek hossza a mikrohullám hullámhosszának egész számú többszöröse. Így ennek lesz egy olyan módusa, amely közel rezonáns a transzmon átmeneti frekvenciájával, és a köztük lévő kapacitív csatolás révén gerjesztést cserélhetnek. A rezonátor e módusát kvantumos harmonikus oszcillátorként kezelve (a léptetőoperátorral) ez a kölcsönhatás eléggé általános körülmények között a Jaynes–Cummings-modellel írható le. A transzmon-rezonátor csatolt rendszert az 1. ábrán illusztráljuk.



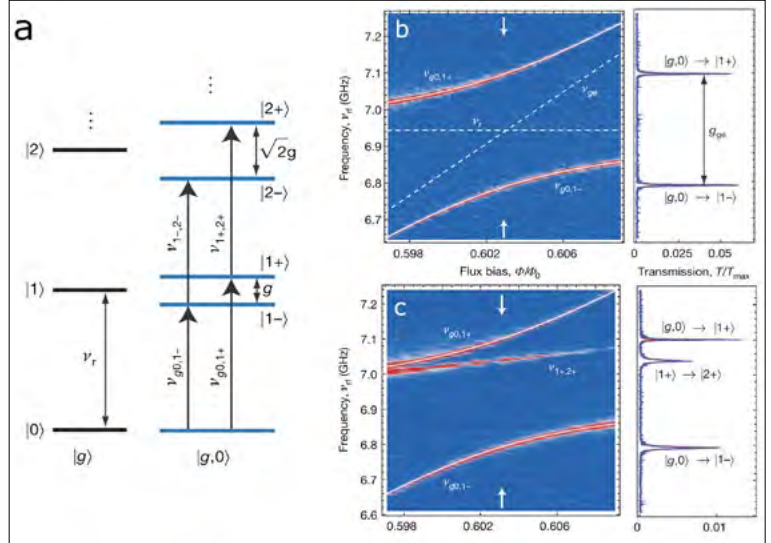
1. ábra. Egy három transzmonhoz (A, B, C) tartozó koplánáris rezonátor fényképe és sémája. A transzmonok úgy helyezkednek el, hogy a mikrohullámú módus duzzadóhelyeihez csatolódnak a csatolási állandó maximalizálása érdekében. Az átviteli vonalakkhoz hasonlóan, amelyeknek egy-egy végét a rezonátor két végéhez kapacitívan csatolva láthatjuk, a koplánáris rezonátor is egy központi ér szakaszából és két földelt árnyékolóból áll, a koaxiális kábel két-dimenziós analógiát képezve. Ez az elrendezés szükséges ahhoz, hogy a központi eret alkotó keskeny fémlap egyébként terahertzes tartományba eső plazmonikus módusai helyett a mikrohullámú tartományba eső módusokat kapjunk, melyek sorba kapcsolt LC-körök kaszkádjával modellezhetők. *Forrás:* [13]



2. ábra. A He-keveréses hűtő belső szerkezete. A vékony függőleges elemek a be- és kimenő átviteli vonalak. A vízszintes lemezek hópajzsok, amelyek az egyes hőmérsékleti, valamint gyengítési, illetve erősítési fokozatok határát képezik. A kísérleti eszköz a szerkezet legeljén található, és egy hűtő tipikusan több különböző eszközt is tartalmaz egyidőben. *Forrás:* Wallraff-csoport, ETH Zürich

A mikrohullámú tartományban történő kvantumos működés előfeltétele az alacsony hőmérséklet, mert ki kell küszöbölni a termikus fotonokat a rendszerből. Ezért a szupravezető kvantumáramköröket héliumkeveréses hűtőkben működtetik, tipikusan néhány 10 mK hőmérsékleten (2. ábra). Szintén fontos, hogy a transzmon és a rezonátor meghajtása csak alacsony – pikowattnál kisebb – teljesítménnyel történhet, ezért a mikrohullámú forrásból származó jelet több lépésben gyengítik a hűtő mélye felé haladva. Megfordítva, a kvantumos folyamatok érzékeléséhez nagyon alacsony intenzitású jeleket kell detektálni, amelyhez szintén több lépcsős erősítőket használnak a hűtőből felfelé haladva. Az alacsony hőmérséklet követelményének másik oka, hogy az erősítők első, mélyebben fekvő fokozatainál a zajt leszorítsák.

Hogyan használható egy ilyen rezonátor a kvantumbit állapotának kiolvasására anélkül, hogy az állapot megváltozna? Erre a problémára a diszperzív kölcsönhatás szolgáltatja a megoldást, amely a Jaynes–Cummings-modellből a nagy elhangolás határesetében ($|\omega_q - \omega_r| \gg g$) származtatható. Ebben a határesetben a módus egy frekvenciatolást szenved el a kvantumbittel való kölcsönhatástól, amelynek előjele függ az utóbbi állapotától. Ez a diszperzív eltolódás egy, a módus frekvenciájához közel hangolt meghajtás átérésztési tulajdonságain keresztül detektálható.



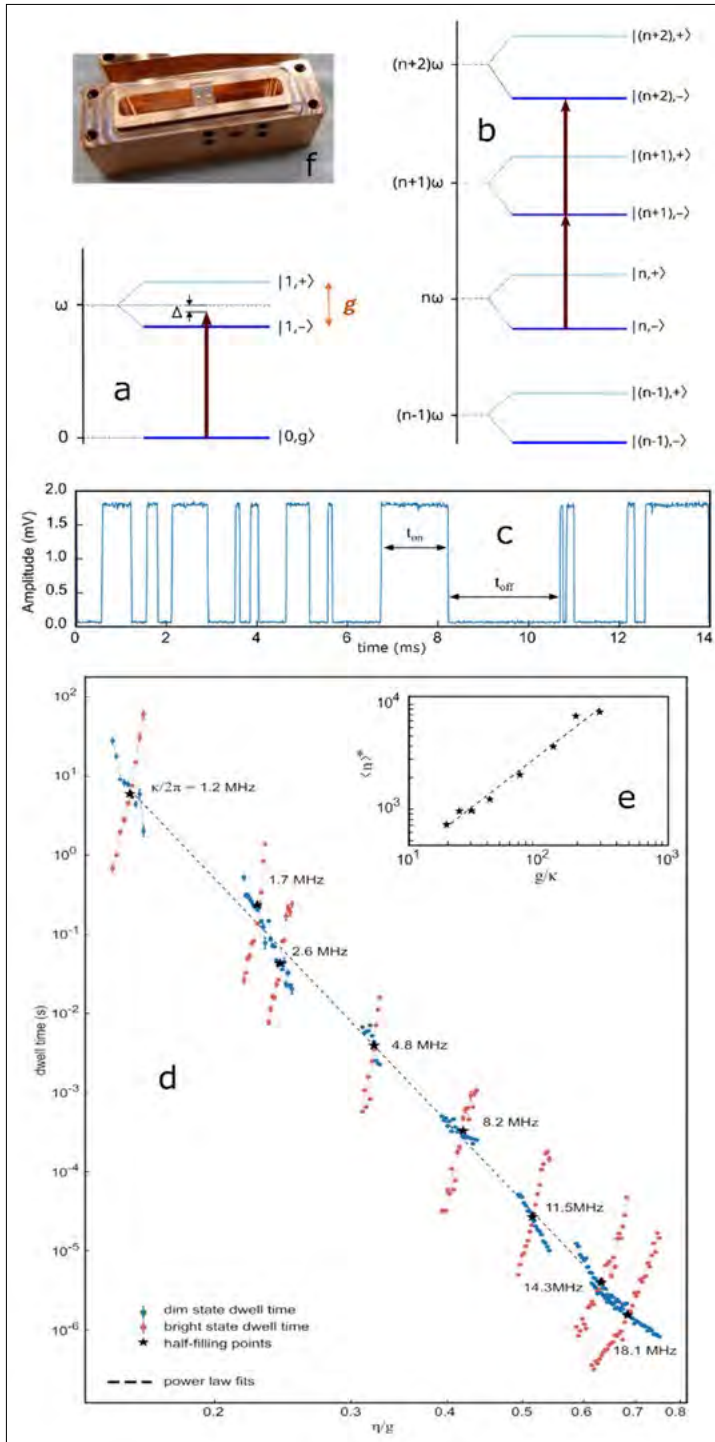
3. ábra. (a) Kékkel a JCM spektrumának legelső öt állapota a rezonáns ($\omega_q = \omega_r$) esetben, bal oldalt feketével a csatolatlan módus harmonikus létrájának alsó része. A (b) és (c) paneleken olyan spektrumokat látunk, ahol a vízszintes tengelyen a transzmon, a függőleges tengelyen pedig a meghajtás frekvenciáját hangolják. (b) Monokromatikus meghajtás: a frekvencia rezonancia körüli hangolásával megtalálhatók a Rabi-felhasadt egygerjesztéses dublett frekvenciái. A fehér nyilak jelölik a rezonancia pontját a vízszintes tengelyen, ahol az (a) részben látott szimmetrikus JCM-spektrumot várjuk. (c) Bichromatikus meghajtás: az egyik frekvenciát a $|g, 0\rangle \rightarrow |1, \pm\rangle$ átmenetre hangolják, amely populációt hoz létre az $|1, \pm\rangle$ állapotban. Így a másik frekvencia hangolásával elérhetővé válik az $|1, \pm\rangle \rightarrow |2, \pm\rangle$ átmenet, amikor eltaláljuk ennek frekvenciáját. Ez tehát egy harmadik csúcsként megjelenik a spektrumban. A spektrumvonalak kiváló feloldottsága arra utal, hogy a rendszer a rezonátoros kvantumelektrodinamikából (cavity quantum electrodynamics – CQED) ismert erős csatolás tartományában van. Ez azt jelenti, hogy a veszteségi ráták – például a rezonátorból való fotonkiszökés rátája, amelyet hagyományosan κ -val jelölünk –, melyek a vonalak szélességét adják, sokkal kisebbek, mint a g Rabi-frekvencia, amely a vonalak egymástól való távolságát határozza meg. *Forrás:* [6]

Jaynes–Cummings-fenomenológia az áramköri kvantumelektrodinamikában

A Jaynes–Cummings-modell spektrumát az úgynevezett „felöltöztetett” állapotok alkotják, amely kifejezés az 1960-as évek kvantumoptikájából származik, és arra utal, hogy a „meztelen” atomi állapotokat – amelyeket a Schrödinger-egyenlet megoldásából kapunk tökéletesen izolált atom esetén – módosítja a kvantált elektromágneses mezővel való kölcsönhatás:

$$|n, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, n+1\rangle \pm |e, n\rangle), \quad E_{n, \pm} = \omega_r \pm \sqrt{n} g,$$

ahol a két meztelen atomi állapotot most g -vel és e -vel jelöltük, és rezonanciát tételeztünk fel a két alrendszer között: $\omega_q = \omega_r$. A CQED egyik áttörő eredménye volt, amikor 2008-ban sikerült közvetlenül kimutatni ezt a spektrumot egy transzmon és egy koplánáris rezonátor erősen csatolt rendszerében [6], amely vizsgálatot a 3. ábrán foglaltuk össze. Az eredmény lényege, hogy a rendszert a $|g, 0\rangle$ alapállapotból egy változtatható frekvenciájú monokromatikus mikrohullámú próbajellel meghajtva először is megtalálhatók az $|1, \pm\rangle$ első gerjesztett kettősnek megfelelő energiák. Ezek energiakülönbségéből – az ún. Rabi-felhasadásból – meghatározható a g csatolási állandó. Ezt követően az alapállapot és az $|1, \pm\rangle$ gerjesz-



4. ábra. A fotonblokkád-áttörési bistabilitás (a) halvány és (b) fényes állapota. (c) Az időben kibontakozó bistabilitás egy cQED kísérletben. A bistabilitás (d) időskálájának és (e) amplitúdójának növekedése a csatolási erősség növelésével. A g Rabi-frekvencia nem módosítható egy ilyen kísérletben, mert azt a technológiai mintakészítés határozza meg, ehelyett a rezonátor κ fotonkiszökési rátájának változtatásával g/κ -t változtatják. (f) Ebben a kísérletben nem koplanáris rezonátort, hanem a mézerekből ismert tömbi rezonátort használtak, amelynél κ hangolható egy változtatható hosszúságú antenna révén. A transzmon a rezonátor középpontjában, a módus duzzadóhelyén van rögzítve. Forrás: [11]

tett állapot közötti frekvenciára hangolják a meghajtást, és erre szintetizálnak egy másik monokromatikus próba-jelét, amelynek frekvenciáját változtatva a spektrumban

felbukkan az $|1, \pm\rangle$ és $|2, \pm\rangle$ állapotok közötti átmeneti frekvencia azon a helyen, amelyet a Jaynes–Cummings-modellből várunk. A több-frekvenciás meghajtás ezen technikájával elvben a Jaynes–Cummings-modell tetszőleges sajátállapota megcímezhető áramimpulzusokkal.

Ez a tanulmány megnyitotta az utat a Jaynes–Cummings-modell kvantumszimulációja felé olyan paramétertartományokban is, amelyek – főként a csatolási erősség vonalán – természetes atomokkal elérhetetlenek. Hangsúlyozzuk, hogy itt teljesen másról van szó, mint amikor kvantumbit-alapú – „digitális” – kvantumszámítógépek platformjaként alkalmazzák a szupravezető kvantumáramköröket, ahol a rezonátor ráadásul csak a diszperzív kiolvasás eszközeként van jelen. Itt két kölcsönható dinamikai összetevő alkotja azt a fizikai modellt, amely a hűtő mélyében lévő rendszeren közvetlenül megvalósul, hasonlóan a klasszikus analóg számítógépek koncepciójához.

A 2010-es évek közepétől egy új, Jaynes–Cummings-modellen alapuló fenomenológia tárult fel [7–9], a fotonblokkád-áttörés jelenségköre, amelyet szintén az áramköri kvantumelektrodinamikában sikerült kísérletileg megvalósítani [10, 11]. A jelenség ugyancsak a rezonáns esetben jelenik meg a legtisztábban, és megértéséhez ismét a Jaynes–Cummings-modell spektrumából kell kiindulni.

Képzelnék el, hogy a rendszer az alapállapotból indul, és a meghajtást közel hangoljuk a szabad alrendszer frekvenciájához, $\Delta \ll g$, (4a. ábra). Ekkor, mivel a meghajtás „nem talál el” állapotot a frekvenciatérben, képtelen gerjeszteni a rendszert, amely így beragad az alapállapotba. Ez a *fotonblokkád* jelensége, amely elnevezés arra utal, hogy egy ilyen meghajtás nem képes fotont juttatni a rendszerbe. Ugyanez a meghajtás azonban a spektrum egy magasabb részén (4b. ábra) rezonáns lesz a mínuszos (sötétkék) vagy a pluszos (világoskék) allétrával (Δ előjelével megegyezően), mivel az energiaszintek \sqrt{n} -es függése miatt a létra fokai közötti különbség n -függése ellaposodik. A spektrumnak ezen a részén tehát a meghajtás és a disszipáció egyensúlyából kialakulhat egy, a harmonikus oszcillátor koherens állapotához hasonló állapot, amely azonban kizárólag az egyik vagy a másik allétrára korlátozódik. Hogy ez milyen gerjesztési számnál következik be, könnyen meg is becsülhető:

$$n_{\text{fényes}} \sim g^2/\Delta^2,$$

vagyis annál magasabban, minél erősebb a csatolás, mivel a csatolási erősség határozza meg a spektrum alsó részének anharmonicitását, amely a blokkád alapja.

Ez a magasan gerjesztett – „fényes” – kvázi-koherens állapot a fotonblokkád-áttört állapot, amely tehát a közel az alapállapottal megegyező – „halvány” – „fotonblokkolt” állapot mellett egy másik lehetséges kvázistacioner állapot a rendszernek.

A kvantum-sztochasztikus numerikus szimulációk során az derült ki [7, 8], hogy elegendően intenzív gerjesztés esetén a rendszer képes hirtelen átváltani e két állapot között többfotonos átmenetek és kvantumugrások révén. Így időben egy jól feloldott bistabilitás – egy sztochasztikus telegráfjel – valósulhat meg, melyre a 4c. ábrán látunk példát, amely azonban már nem szimulációból, hanem egy kimondottan erre a célra készített cQED eszközön végrehajtott kísérletből származik. Hangsúlyozzuk, hogy a meghajtás folytonos, és ennek relatíve nagy intenzitása ellenére a rendszer nemcsak a halvány állapotból tud a fényesbe átváltani, hanem ez az ellenkező irányban is megtörténik!

A fényes állapot gerjesztésének iménti kifejezéséből látszik, hogy a fotonblokkád-áttörés bistabilitásának amplitúdója – és ezzel együtt időskálája is – növekszik g növekedésével. Ugyanebben a kísérletben közel hét nagyságrenddel keresztlül tudták követni a bistabilitás időskálájának növekedését, amely időskála négy nagyságrenddel haladja meg a rendszer leglassabb mikroszkopikus időskáláját (4d. ábra).

A két kvázistacioner állapot közötti átcsapást kiválthatja egy csatolt külső mező változása vagy egy csatolt kvantumrendszer állapotának megváltozása, így a jelenség érzékelésre vagy kvantumállapot-detektálásra alkalmas.

Kitekintés

Az imént a 3. ábra kapcsán taglaltuk a rezonátoros kvantumelektrodinamika erőcsatolás-tartományát, amely fizikailag a jól feloldott Rabi-felhasadást jelenti. Az erős csatolás megvalósítása természetes atomokkal az optikai tartományban nagy kihívás, amely csak az 1990-es évek végétől kezdődően vált lehetőségessé.

A 3. és 4. ábrán látható példákban a csatolási erősség $g = 300$ MHz. Ha ezt nem a veszteségi rátákhoz, hanem a csatolatlan alrendszerek frekvenciáihoz – $\omega_q = \omega_r \approx 10$ GHz – mérjük, akkor a kapott 3%-os arány számos nagyságrenddel meghaladja azt, ami természetes atomok és optikai rezonátorok elektromágneses módusai között akár csak elvben elérhető. A példákban szereplő eszközök tehát már az *ultraerős csatolás* [12] határán mozognak, mely paramétertartomány lehetősége a kétezres évek közepétől kezdődően vetődött fel, és amelyet az definiál, hogy a csatolási erősség és a csatolatlan alrendszerek frekvenciáinak aránya eléri a 10%-ot.

Az *ultraerős csatolás* aláássa a Jaynes–Cummings-modell előfeltevéseit, hiszen a forgóhullámú közelítésnek éppen az volt a feltétele, hogy $g \ll \omega_q, \omega_r$. Ebben a tartományban tehát szerephez jutnak a gerjesztési számot nem megőrző tagok, amelyek például az alapállapot szerkezetében, illetve az atomi és bozonikus alrend-

szerek közötti elemi gerjesztési folyamatokban okoznak lényeges változásokat. A szupravezető kvantumáramkörök az *ultraerős csatolás-tartomány* megvalósításának és a fenomenológia kvantumos szimulációjának egyik elsődleges platformját képezik.

Ugyancsak az elmúlt mintegy másfél évtized fejleménye a hibrid kvantumrendszerek megjelenése. E fogalom alatt olyan elrendezéseket értünk, amelyekben egy mesterséges, de kvantumos viselkedésre képes rendszert egy természetes kvantumrendszerhez csatolnak. Ilyen hibrid architektúra például a cQED-eszközhöz csatolt atomchip, ahol ugyanazon a szupravezető áramköri lapon hoznak létre mágneses mikrocsapdát, amelyben egy Bose-kondenzátumot a koplanáris rezonátortól 10–100 μm távolságra csapdáznak. Ennek egyik ígéretes alkalmazása a kvantumos – fotonok szintjén történő – mikrohullámú-optikai jelátalakítás. Az atomok hiperfinom szerkezetük révén egyszerre csatolhatók mikrohullámú és optikai sugárzásához, így többfotonos folyamatok segítségével átjátszóként működhetnek. Miközben a kvantumszámítás a mikrohullámú cQED-platformon történik, a kvantuminformáció-továbbítás ezen átalakítók révén már optikai szálakon valósulhat meg.

Irodalom

1. Nobel Prize in Physics 2025. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach 2025. Thu. 20 Nov 2025.
2. Gyenis András (2025): Az áramkörök kvantálása és a szupravezető kvantumszámítógépek. *Fizikai Szemle*, 2025/7–8, 264–268.
3. Blais A., Grimsmo A. L., Girvin S. M., Wallraff A. (2021): Circuit quantum electrodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 93(2), 025005.
4. Larson J., Mavrogordatos T., Parkins S., Vidiella-Barranco A. (2024): The Jaynes–Cummings model: 60 years and still counting. *Journal of the Optical Society of America*, B 41(8), JCM1–4.
5. Jaynes E. T., Cummings F. W. (2005): Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1), 89–109.
6. Fink J. M., Göppl M., Baur M., Bianchetti R., Leek P. J., Blais A., Wallraff A. (2008): Climbing the Jaynes–Cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity QED system. *Nature*, 454(7202), 315–318.
7. Dombi A., Vukics A., Domokos P. (2015): Bistability effect in the extreme strong coupling regime of the Jaynes–Cummings model. *The European Physical Journal*, D 69(3), 60.
8. Carmichael H. J. (2015): Breakdown of photon blockade: A dissipative quantum phase transition in zero dimensions. *Physical Review*, X 5(3), 031028.
9. Vukics A., Dombi A., Fink J. M., Domokos P. (2019): Finite-size scaling of the photon-blockade breakdown dissipative quantum phase transition. *Quantum*, 3, 150.
10. Fink J. M., Dombi A., Vukics A., Wallraff A., Domokos P. (2017): Observation of the photon-blockade breakdown phase transition. *Physical Review*, X 7(1), 011012.
11. Sett R., Hassani F., Phan D., Barzanjeh S., Vukics A., Fink J. M. (2024): Emergent macroscopic bistability induced by a single superconducting qubit. *PRX Quantum*, 5(1), 010327.
12. Vukics A. (2022): Light-Matter Interaction towards Ultrastrong Coupling. D.Sc. thesis.
13. Fink J. M., Bianchetti R., Baur M., Göppl M., Steffen L., Filipp S., Leek P. J., Blais A., Wallraff A. (2009): Dressed collective qubit states and the Tavis–Cummings model in circuit QED. *Phys. Rev. Lett.*, 103, 083601.

A KVANTUMMECHANIKAI MÉRÉS EGYSZERŰ DINAMIKAI MODELLJE

Pályi András^{1,2,@}, Svastits Domonkos^{1,3}

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Fizikai Intézet, Elméleti Fizika Tanszék, Budapest

²Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, HUN-REN-BME-BCE Kvantumtechnológia Kutatócsoport, Budapest

³Qutality @ Faulhorn Labs, Budapest

@E-mail: palyi.andras@ttk.bme.hu

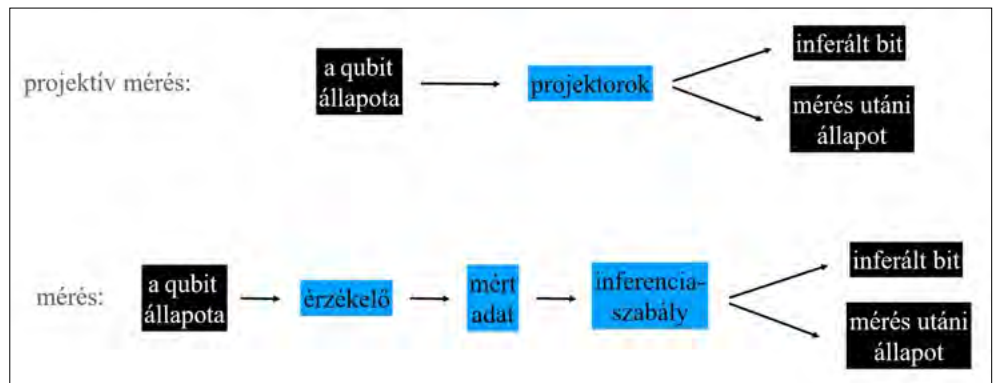
A kvantummechanikai mérést a tankönyvek gyakran idealizált, projektív mérésnek íróják le. Például egy két-állapotú kvantumrendszer (*kvantumbit* vagy *qubit*) mérésekor 0 vagy 1 mérési eredményt kapunk, és ezek valószínűségeit, illetve a mérés utáni állapotokat két ortogonális projektor segítségével számítjuk ki, ahogy az *1. ábra* felső sora mutatja. Ha azonban egy kísérletet végzünk, amelyben egy qubit állapotát akarjuk megmérni, akkor a tényleges fizikai jel, amely alapján a bináris mérési eredményt meghatározzuk, sokkal több információt hordoz, mint egyetlen bit. Egy ilyen kísérletben például egy fotodetektorra beeső fotonok érkezési idejeit, vagy egy vezetéken átfolyó áram időfüggését rögzítjük.

Ebben a cikkben bemutatunk egy egyszerű dinamikai modellt [9], ami összekapcsolja a valóságos mérés folyamatát és a tankönyvekben posztulált idealizált projektív mérést. Modellünkben – a kvantummechanikai mérés-elméletben gyakran alkalmazott séma alapján [11] – a qubit egy koherens kvantumrendszerrel, egy ún. *érzékelővel* lép kölcsönhatásba. Az érzékelőn sok egymás utáni projektív mérés végződik, ezek kimeneteiből áll elő a mért adat, amelyből végül kikövetkeztethető a bináris mérési eredmény – ezt mutatja az *1. ábra* alsó sora. A modellünk különösen egyszerű abban az értelemben, hogy az érzékelőt is qubitként írjuk le. Ebből következik, hogy az analízishez csupán 4×4 -es mátrixokkal kell műveleteket végez-

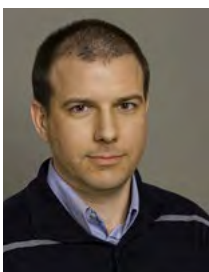
ni, így a modell pedagógiai célokra is könnyen használható. Kutatásainkban is alkalmazzuk ezt a modellt, és ennek általánosításait, mégpedig arra, hogy megértsük a félvezetőkben létrehozott egyelektronos qubitek [3] mérését jellemző hibákat, és eljárásokat adjunk a mérési hiba csökkentésére [9].

I. Projektív mérés

A kvantumelmélet elmúlt száz évének fontos alapkövei a mérésre vonatkozó posztulátumok, melyek Max Born 1926-os [2] és Neumann János 1932-es [8] munkái nyomán kristályosodtak ki. Tekintsük át a projektív mérés ezen posztulátumait egy konkrét kétállapotú kvantumrendszer, egy ún. töltésqubit kapcsán! Ilyen töltésqubitet például félvezetőkben lehet létrehozni, kapuelektrodákkal keltett elektromos terekkel becsapdázva egy elektront egy kétfenekű potenciálvölgybe. Az elektron a potenciálvölgy két minimuma közül elfoglalhatja az egyiket



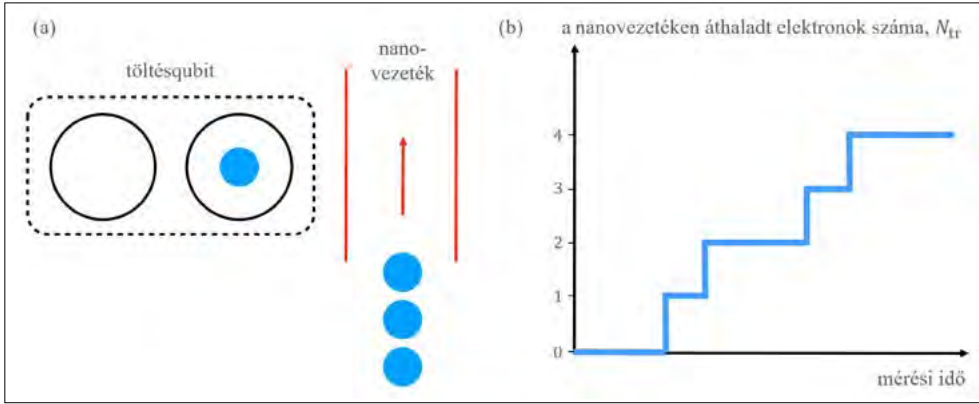
1. ábra. Projektív mérés és valódi mérés. A kvantumelmélet mérési posztulátumai szerint egy qubit mérésekor projektorok segítségével számíthatjuk ki a mérési eredmények (inferált bit) valószínűségeit és a mérés utáni állapotot. Egy valódi mérés során a mérendő kvantumrendszer kölcsönhat egy érzékelővel, az érzékelő valamilyen komplex, információban gazdag mért adatot szolgáltat, amiből egy inferenciaszabály segítségével határozzuk meg az inferált bit értékét és a mérés utáni állapotot



Pályi András 2004-ben végzett fizikusként az ELTE-n és ugyanott szerzett PhD-fokozatot 2008-ban. 2008 és 2010 között a Konstanz Egyetemen volt posztdoktori kutató, 2011 és 2015 között pedig az ELTE Anyagfizika Tanszékén dolgozott egyetemi adjunktusként. 2015 óta a BME Fizikai Intézetében egyetemi docens, 2025-től a HUN-REN-BME-BCE Kvantumtechnológia Kutatócsoport vezetője is. Elméleti fizikus, a szilárdtestfizika és a kvantuminformáció-elmélet területén kutat és oktat.



Svastits Domonkos 2024-ben végzett fizikusként a BME-n. Jelenleg PhD-munkáját végzi a BME Elméleti Fizika Tanszéken a kvantumtechnológia és a kvantumszámítás területein.



2. ábra. A töltésqubit mérése egy közeli nanovezeték áramának segítségével. (a) Töltésqubit: egy elektron egy kétfenekű potenciálvölgy két legalacsonyabb energiájú állapotát töltheti be. Lokalizálódhat a bal oldalra (L) vagy a jobb oldalra (R), de a két állapot szuperpozíójába is kerülhet. Ezt a qubitet megmérhetjük a mellette húzódó, feszültség alá helyezett nanovezetéken átfolyó áram méréseivel. (b) A nanovezetéken áthaladt elektronok számának időfüggése egy olyan véletlen folyamat eredménye, melynek lefolyása függ attól, hogy a töltésqubit milyen állapotban volt a mérés kezdetén

($|L\rangle$ bázisállapot) vagy a másikat ($|R\rangle$ bázisállapot), vagy lehet szuperpozícióban is ($|\psi\rangle = \alpha|L\rangle + \beta|R\rangle$). A qubit állapotát tehát az (α, β) kétkomponensű komplex vektor írja le, amely a valószínűségi értelmezés miatt normált: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

A qubit mérése a kvantummechanika mérési posztulátuma szerint úgy zajlik, hogy a mérés során a qubitet vagy az egyik, vagy a másik potenciálvölgyben találjuk, $|\alpha|^2$ és $|\beta|^2$ valószínűséggel (Born-szabály [2]). A mérésből kapott L és R értékeket 0-val és 1-gyel azonosíthatjuk, azaz a mérés során lényegében egyetlen bit értékét kapjuk meg, erre *inferált bitként* szokás hivatkozni. Továbbá a hullámfüggvény-kollapszus posztulátuma szerint a mérés utáni hullámfüggvény az egyik esetben az $|L\rangle$ bázisállapot, a másik esetben az $|R\rangle$ bázisállapot lesz. Mindkét posztulátum megfogalmazható a bázisállapotok altereire vetítő projektorokkal, ezért ezekre a posztulátumokra együttesen *projektív mérés*ként szokás hivatkozni.

II. Valóságos mérés

A valóságban egy ilyen méréshez természetesen nem projektorokra, hanem mérőeszközökre és adatfeldolgozásra van szükség. A mérés során az érzékelő nem egy klasszikus bit értékét jelzi ki, hanem komplex, információban gazdag mért adatot szolgáltat, amiből aztán egy inferencia-szabály segítségével kell egybités kimenetet képezni, ahogy azt az 1. ábra alsó sora mutatja. Ez a mérési folyamat jóval összetettebb, mint amit a projektív mérés leír, és ez a komplexitás általában mérési hibákhoz vezet: a valós mérést jellemző mérési statisztika és a mérés utáni állapot is különbözik attól, amit a fenti posztulátumok alapján várunk.

A töltésqubit méréséhez gyakran egy nanovezetéket használnak, ami az egyik potenciálvölgy közelében húzódik [5, 7]. Ha a nanovezeték forrás és nyelő elektródája közé elektromos feszültséget kapcsolunk, akkor áram

folyik át rajta a 2. ábrán látható módon. A mért adatot illusztrálja a 2b. panel: itt azt az idealizációt használjuk, hogy a mérés során rögzítjük, hogy mikor érkeznek be a nyelő elektródákra a nanovezetéken áthaladt elektronok. Az áram átlagértéke függ attól, hogy a töltésqubit a bal vagy a jobb pozícióban van-e: ha a jobb pozícióban van, akkor erősebb a töltésqubit és a nanovezeték elektronjai közti Coulomb-taszítás, tehát a nanovezetéken áthaladó elektronok nehezebben, kisebb valószínűséggel jutnak át, azaz a nanovezeték árama csökken – ahhoz képest, mintha a töltésqubit a nanovezetéktől távolabbi, bal állapotában lenne. Megfelelő kalibrációt követően tehát az áramot mérve a mérési adatsorból következtethetünk a qubit állapotára.

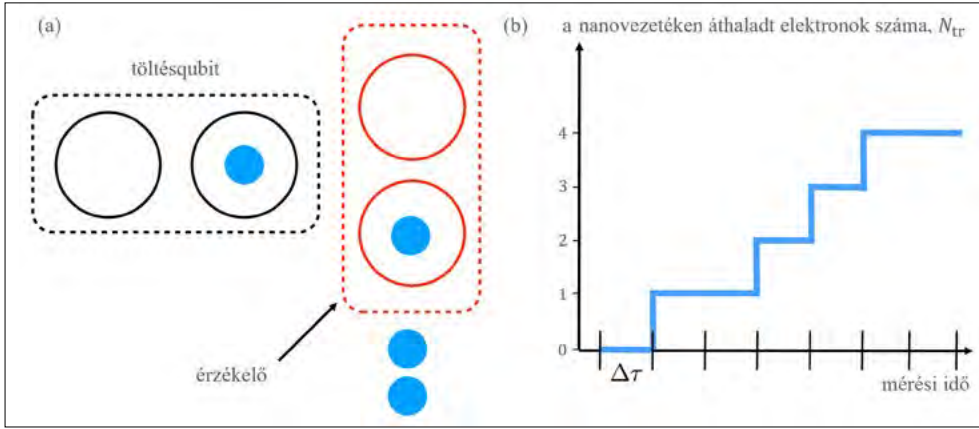
III. A mérés dinamikai modellje

A mérés dinamikáját egy egyszerű modellel írjuk le, melyben megjelenik a töltésqubit és az érzékelő (nanovezeték) is. Utóbbit az egyszerűség kedvéért szintén egy qubitként modellezzük, ahogy az a 3a. ábrán is látható. Ennek az érzékelő-qubitnek a bázisállapotai $|B\rangle$ és $|T\rangle$, ahol előbbi (utóbbi) reprezentál egy olyan elektront, ami a nanovezeték alsó (felső) szakaszán található.

A modell tehát két qubitből áll, azaz a dinamikát egy 4×4 -es Hamilton-mátrix írja le:

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_e + \hat{H}_k, \quad (1)$$

ahol $\hat{H}_q = \epsilon \hat{\sigma}_z + \nu \hat{\sigma}_x$ a qubit Hamilton-operátora, melyben ϵ a két potenciálvölgy energiaszintjeinek különbségének fele, ν pedig a potenciálvölgyek közötti alagutazási amplitúdó. Az érzékelő Hamilton-mátrixa $\hat{H}_e = \gamma \hat{\tau}_x$, ahol γ az érzékelő $|B\rangle$ és $|T\rangle$ állapotai közti alagutazási amplitúdó. A kölcsönhatást leíró $\hat{H}_k = -\delta \gamma |R\rangle\langle R| \otimes \hat{\tau}_x$ Hamilton-operátor azt fejezi ki, hogy az érzékelő alagutazási amplitúdója $\delta \gamma$ -val csökken, ha a qubit az $|R\rangle$ állapotában van. A Hamilton-operátorokban megjelenő Pauli-mátrixok a következőképp írhatók fel:



3. ábra. Töltésqubit mérésének modellje. (a) A töltésqubit és a mellette elhelyezett érzékelő. Az érzékelőt is két-állapotú kvantumrendszerként modellezzük. (b) Az érzékelőn áthaladt elektronok száma, mely a modell szerint $\Delta\tau$ időnként 0-val vagy 1-gyel nő az érzékelőn elvégzett projektív mérés eredményétől függően

$$\hat{\sigma}_z = |L\rangle\langle L| - |R\rangle\langle R|, \quad \hat{\sigma}_x = |L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|$$

$$\text{és } \hat{\tau}_x = |T\rangle\langle B| + |B\rangle\langle T|.$$

Cikkünkben azt az egyszerű esetet vizsgáljuk, amikor a töltésqubit alagutazási amplitúdója $v = 0$, kivéve a VIII. szakaszt, ahol a véges alagutazási amplitúdó szerepét mutatjuk be.

A mérés modelljében feltételezzük, hogy a nanovezetéken áthaladó elektronok egyenletes $\Delta\tau$ időközönként érkeznek a kölcsönhatási tartományba, és ugyanilyen időablak alatt dől el az is, hogy áthaladnak-e, vagy visszafordulnak. A qubit mérését $t_m = N\Delta\tau$ mérési időablak alatt próbáljuk végrehajtani, ez idő alatt tehát N elektron próbál meg átjutni a nanovezetéken alulról felfelé, azaz a forrástól a nyelő felé haladva. A mérés modelljében kiindulunk a qubit kezdeti állapotából, amit meg kívánunk mérni, majd N -szer hajtjuk végre a következő lépéssorozatot:

1. Inicializáljuk az érzékelőt a $|B\rangle$ állapotban.
2. Hagyjuk $\Delta\tau$ ideig időfejlődni a qubit és az érzékelő által alkotott csatolt rendszert.
3. Projektív méréssel megmérjük, hogy az érzékelő $\Delta\tau$ várakozás után melyik bázisállapotában van. Ha a $|T\rangle$ ($|B\rangle$) állapotban találjuk, az azt jelenti hogy az elektron áthaladt, transzmittálódott (visszaszóródott, reflektálódott) a nanovezetéken, ezt 1-essel (0-ssal) címkézzük.

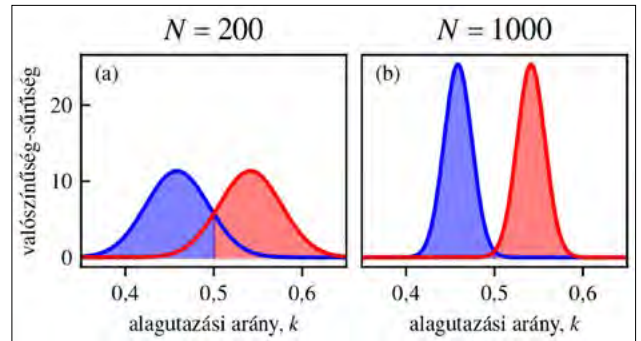
Ennek a ciklusnak a kimenete tehát N darab bináris érték, azaz egy N -hosszú bitsztring, ez modellezi a mért adatot. A továbbiakban N_{tr} jelöli majd az N -hosszú bitsztringben szereplő 1-ek számát, azaz hogy hány elektron transzmittálódott a nanovezetéken a mérés során. A továbbiakban az N_{tr} helyett a $k = N_{tr}/N$ alagutazási arányt is használjuk majd.

Ha a fenti ciklust sokszor futtatjuk le, akkor a transzmittált elektronok számát statisztikailag is tudjuk jellemezni. Erre a 4. ábra mutat két példát. A 4a. panelen a piros (kék) görbe mutatja az alagutazási arány valószínűségi

sűrűségfüggvényét abban az esetben, amikor a qubit kezdőállapota $|L\rangle$ ($|R\rangle$) volt, és a mérés során $N = 200$ elektron próbált meg átjutni a nanovezetéken. A 4b. panelen látható eredmények ugyanezt mutatják, de ötször hosszabb mérési időablak esetén, azaz amikor $N = 1000$ elektron próbált meg átjutni a nanovezetéken. Mindkét panel olyan paraméterértéknél készült, ahol a bal (jobb) állapotra vonatkozó transzmissziós valószínűség 54% (46%).

IV. Bináris inferencia

A 4. ábrán látható eloszlásokra építve, a maximum likelihood elv segítségével megalkothatjuk az inferenciaszabályunkat. Például, a 4a. panelen látható két sűrűségfüggvény a $k = 0,5$ pontban találkozik. Ha tehát 0,5-nél nagyobb k -t mérünk, akkor arra következtetünk, hogy a qubit az $|L\rangle$ állapotban volt, azaz az L mérési kimenetet inferáljuk. Ha pedig 0,5-nél kisebb k -t mérünk, akkor az R mérési kimenetet inferáljuk.



4. ábra. Az érzékelő áramát jellemző alagutazási arány valószínűség-sűrűsége. A piros (kék) görbék a L (R) állapothoz tartozó $k = N_{tr}/N$ alagutazási arány valószínűség-sűrűségét mutatják $N = 200$ (a) és $N = 1000$ (b) esetén. A görbék alatti terület pirosra (kékre) van színezve ott, ahol az adott k értékhez tartozó inferált bit (L) (R). Bár a k alagutazási arány diszkrét értékeket vesz fel, itt a jobb átláthatóság kedvéért folytonos görbékkel ábrázoljuk az eloszlásokat. A piros (kék) terület adja meg a sikeres inferencia valószínűségét, ha a töltésqubit kezdeti állapota $|L\rangle$ ($|R\rangle$). A paraméterek: $\epsilon = 10 \mu\text{eV}$, $\gamma = 5 \mu\text{eV}$, $\delta\gamma = 0,5 \mu\text{eV}$, $\Delta\tau = 0,11 \text{ ns}$, $v = 0 \mu\text{eV}$

V. Mérési hiba

Amíg a két sűrűségfüggvény átfed, mint ahogy a 4a. és 4b. paneleken egyaránt látható, addig a bináris inferencia nem tökéletes, mérési hibát tapasztalhatunk. A mérési hiba valószínűsége az inferencia hibájának valószínűsége, ami arányos a két sűrűségfüggvény átfedésével. Mivel a mérési idő növelésével ez az átfedés csökken – ahogy az a 4a. és 4b. panelek összevetésével is látszik –, a mérési hiba is csökken a mérési idő növelésével. A végtelen mérési idő ($N \rightarrow \infty$) határesetében az inferencia tökéletes. Ez megfelel a projektív méréstől elvárt viselkedésnek.

VI. Mérés utáni állapot

Modellünkben a mérés utáni állapot legegyszerűbb értelmezése a következő. Egyetlen mérés során egy N -hosszú bitsztringet kapunk, melyben N_{tr} darab 1-es van. Ebből kiszámítjuk a $k = N_{tr}/N$ alagutazási arányt, ebből pedig bináris inferenciával megkapjuk az L vagy R mérési kimenetet. Feltehetjük a kérdést: ha a kiindulási állapot mellett csak a bináris mérési kimenetet ismerjük, akkor mit tudunk a mérés utáni állapotról?

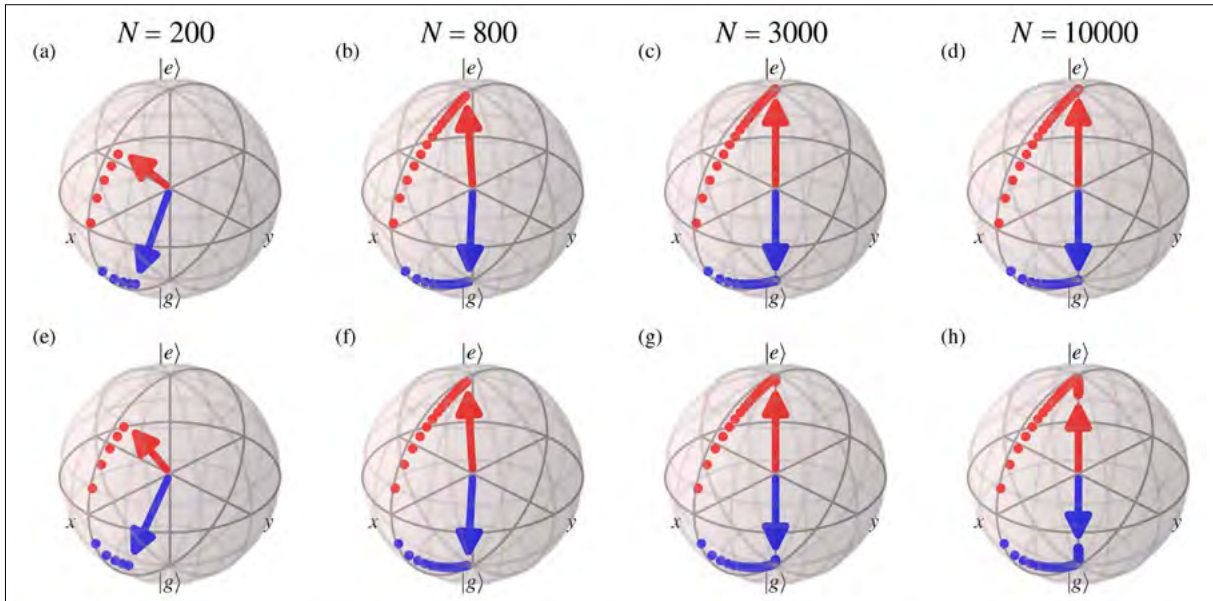
Véges N esetén a mérés utáni állapot kevert állapot lesz: ugyan bármelyik lemért bitsztringhez egy tiszta mérés utáni állapot tartozik, a bináris inferencia azzal jár, hogy sok különböző bitsztringet egy kalap alá vesszünk, azaz a vonatkozó mérés utáni tiszta állapotokat összekeverjük. Ennek a kevertségnek a mértéke függ a mérési időtartamától: érdekes módon az általunk vizsgált modellben a végtelen mérési idő határesetében, azaz az $N \rightarrow \infty$ határesetben a mérés utáni állapot tiszta állapot-

hoz tart. Sőt, ebben a határesetben a mérési utáni állapot az egyik bázisállapot lesz, azaz a modellel leírt mérés éppen egy projektív mérés lesz.

Ezt illusztrálják az 5. ábra a–d paneljei. Ezek azt a helyzetet mutatják, amikor a töltésqubit kezdeti állapota $(|L\rangle + |R\rangle)/\sqrt{2}$, azaz egy szuperponált állapotot mérünk meg. A szuperponált kezdőállapot Bloch-vektora az x tengely irányába mutat. Az 5a. paneleken a piros vektor mutatja a mérés utáni állapotot abban az esetben, ha $N = 200$ hosszú mérést végeztünk, és a mért adatokból az L kimenetet inferáltuk. A piros pontok mutatják, hogy $N = 200$ -nál rövidebb mérési hosszak esetén mi volt a mérés utáni állapot. Hasonlóan, a kék vektor és a kék pontok arra az esetre vonatkoznak, amikor a mért adatokból az R kimenetet inferáltuk. Az 5b–d. panelek mutatják, hogy ha a mérés hosszabb, $N = 800, 3000$ vagy 10000 , akkor hogyan alakul a mérés utáni állapot. Látszik, hogy minél hosszabb a mérés, annál pontosabban közelíti a mérés utáni állapot a két bázisállapotot.

VII. A mérési visszahatás törölheti is a qubitet

Egyszerű modellünk tehát egy dinamikai képet fest a hullámfüggvény-kollapszusról: ha nagyon hosszú ideig tart a mérés, akkor az nagyon hasonló lesz a projektív méréshez. A modellünkben a qubit és az érzékelő sincs kitéve környezeti zavaró hatásoknak, zajnak. A valóságban mindig jelen vannak ilyen zajforrások, tehát várható, hogy egy valósághűbb modellben eltéréseket látnánk az idealizált projektív méréshez képest. A kvantummos infor-



5. ábra. A mérés utáni állapotok különböző mérési időablakok esetén. A piros, illetve kék vektorok az L , illetve R mérési kimenetekhez tartozó mérés utáni állapotot mutatják a mérés hosszának különböző N értékeire. A piros, illetve kék pontok szintén a mérés utáni állapotokat mutatják N -nél rövidebb mérés esetén. Az a–d paneleken az alagutazási amplitúdó nulla ($v = 0$), és emiatt az $N \rightarrow \infty$ határesetben a mérés utáni állapotok a bázisállapotokhoz tartanak. Az e–h paneleken az alagutazási amplitúdó véges ($v > 0$). Ekkor a mérés utáni állapotok először megközelítik a bázisállapotokat, majd egyre kevertebbek lesznek. Az $|e\rangle$ és $|g\rangle$ állapotok a qubit \hat{H}_q Hamilton-operátorának sajátállapotait jelölik. Ezekre $v = 0$ esetén igaz, hogy $|e\rangle = |L\rangle$ és $|g\rangle = |R\rangle$; $0 < v \ll \epsilon$ esetén ezek az összefüggések csak közelítőleg igazak. Paraméterek: $\epsilon = 10 \mu\text{eV}$, $\gamma = 5 \mu\text{eV}$, $\delta\gamma = 0,5 \mu\text{eV}$, $\Delta\tau = 0,11 \text{ ns}$, az a–d paneleken $v = 0 \mu\text{eV}$, az e–h paneleken $v = 2 \mu\text{eV}$

mációtechnológiában fontos feladat az ilyen hibákat okozó mechanizmusok megértése és a hibák csökkentése.

Ilyen hibákat a modellünk is tud mutatni, még zajforrások bekapcsolása nélkül is. Elegendő megvizsgálni azt az esetet, amikor a qubit két lokalizált bázisállapota között alagutazhat az elektron, azaz amikor $v \neq 0$. Ebben az esetben a modellünkben megjelenik egy ún. relaxációs mechanizmus, ami drasztikusan megváltoztatja a mérés jellegét a hosszú mérési idő határesetében – ilyenkor nem kapjuk vissza a projektív mérést!

Ahogy azt az *5e-h. panelek* mutatják, ebben az esetben a mérés utáni állapot elindul ugyan a projekció útján, de a qubit és a mérési folyamat inkompatibilitása miatt – matematikailag: a qubit Hamilton-mátrixa és a qubitérzékelő kölcsönhatás Hamilton-mátrixa nem kommutál egymással, $[\hat{H}_0, \hat{H}_i] \neq 0$ – egyre hosszabb mérés végezve egyre kevertebbé válik a mérés utáni állapot, ahogy ezt az *5g. és 5h. panelek* mutatják. Ahogy az *5h. panel* is sugallja, a végtelen hosszú mérés határesetében így nem projektív mérést kapunk, hanem teljesen véletlenszerű mérési kimenet, és teljesen kevert mérés utáni állapotot¹. Ebben az esetben tehát a mérés radikálisan eltér a projektív méréstől.

VIII. Összefoglalás

A kvantumelmélet mérést leíró posztulátumai a mérendő mennyiséget reprezentáló operátor sajátaltereire vonatkozó projektorok segítségével adják meg a mért mennyiség valószínűségi eloszlását és a mérés utáni állapotot. Egy valóságos mérés során viszont az történik, hogy a mérendő rendszerrel kölcsönható érzékelő szolgáltat komplex és zajos mért adatot, és ezen mért adat alapján következtetünk a mérendő mennyiség értékére és a mérés utáni állapotra. A két mérésfogalom összeegyeztetését, megfeleltetését segítik azok az egyszerű modellek, melyek képesek a valóságos mérésre jellemző komponenseket szimulálni. Cikkünkben egy ilyen modellt írtunk le és elemeztünk, ami egy qubit mérési folyamatát mutatja be. A modell speciális esetben visszaadja a projektív méréstől elvárt viselkedést, de általában attól különböző kimenetet ad, és ezen különbségek nyilván fontos szerepet játszanak a méréselmélet alkalmazásaiban.

A modell vizsgálatához csupán 4×4 -es mátrixok esetére alkalmazott lineáris algebra van szükség, tehát pedagógiai célokra (pl. a kvantummechanikai mérési folyamat illusztrációja középiskolában és egyetemen, programozási házi feladat egyetemen) is jól használható – a BME „Kvantumszámítógép-architektúrák” című kurzusán [10] is bemutattuk. A szerzők és kutatótársaik a modell különböző változatait kutatási célból használják: félvezetőkben csapódzott egyelektron-kvantumbitek

¹ A mért adat, azaz az áram idősora, sokkal több információt rejt a mérés utáni állapotról, mint amit az általunk leírt inferencia-módszer elárul. Ez a módszer ugyanis csupán az alagutazási arányt, azaz lényegében az adott időszorra kiátlagolt áramértéket veszi alapul, azaz az idősorban rejlő információ nagy részét eldobja.

kiolevését modellezhetjük így, ami lehetőséget ad a mérési hibákat okozó mechanizmusok megértésre, illetve a mérési folyamat optimalizálására [9]. A mérés utáni állapot feltérképezése különösen fontos a kvantumszámítás olyan újszerű területein, mint a *dinamikus* [1] (vagy *adaptív* [6]) kvantumáramkörök és a hibátűrő kvantumszámítás [4], ahol bizonyos qubiteket az adott protokollban többször is meg kell mérni, ezért fontos tudni, hogy az egyes mérések után pontosan milyen állapotba kerül a qubit.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük a témában írt tudományos közleményünk [9] társszerzőinek az együttműködést: Stefano Bosco (TU Delft), Hetényi Bence (IBM Research Zürich), Daniel Loss (Bázei Egyetem), Széchenyi Gábor (ELTE), James Wootton (IBM Research Zürich/Moth). Kutatómunkánkat támogatta továbbá a Kvantuminformatika Nemzeti Laboratórium, az IGNITE, ONCHIPS, QLSI2, OpenSuperQPlus Horizont Európa kutatási projektek, a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapja az EKÖP_KDP-24-1-BME-2 pályázati programon keresztül, és a HUN-REN Magyar Kutatási Hálózat a Támogatott Kutatócsoportok Program keretében (HUN-REN-BME-BCE Kvantumtechnológia Kutatócsoport, TKCS-2024/34).

Irodalom

1. Elisa Baumer, Vinay Tripathi, Alireza Seif, Daniel Lidar, Derek S. Wang (2024): Quantum Fourier transform using dynamic circuits. *Physical Review Letters*, 133, 150602.
2. Max Born (1926): Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik*, 37, 863–867.
3. Guido Burkard, Thaddeus D. Ladd, Andrew Pan, John M. Nichol, Jason R. Petta (2023): Semiconductor spin qubits. *Rev. Mod. Phys.*, 95, 025003.
4. Earl T. Campbell, Barbara M. Terhal, Christophe Vuillot (2017): Roads towards fault-tolerant universal quantum computation. *Nature*, 549, 172–179.
5. Elzerman J. M., Hanson R., Willems van Beveren L. H., Witkamp B., Vandersypen L. M. K., Kouwenhoven L. P. (2004): Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot. *Nature*, 430, 431–435.
6. Foss-Feig M., Tikku A., Lu T.-Ch., Mayer K., Iqbal M., Gatterman T. M., Gerber J. A., Gilmore K., Gresh D., Hankin A., Hewitt N., Horst C. V., Matheny M., Mengle T., Neyenhuis B., Dreyer H., Hayes D., Hsieh T. H., Kim I. H. (2023): Experimental demonstration of the advantage of adaptive quantum circuits. *arXiv:2302.03029*.
7. Goan H.-S., Milburn G. J., Wiseman H. M., Sun H. B. (2001): Continuous quantum measurement of two coupled quantum dots using a point contact: A quantum trajectory approach. *Phys. Rev.*, B 63, 125326.
8. John von Neumann (1932): *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, Berlin.
9. Domonkos Svastits, Bence Hetényi, Gábor Széchenyi, James Wootton, Daniel Loss, Stefano Bosco, András Pályi (2025): Read-out sweet spots for spin qubits with strong spin-orbit interaction. *arXiv:2505.15878*.
10. Pályi András, Makk Péter: *Quantum Computing Architectures*. BME kurzus fizikus MSc- és PhD-hallgatóknak.
11. Wiseman H. M., Milburn G. J. (2009): *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press.

HOGYAN HASZNÁLJUK MAJD A KVANTUM-SZÁMÍTÓGÉPEKET?

Gilyén András

HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest

E-mail: gilyen.andras@renyi.hu

Az ezredforduló táján már az is komoly eredménynek számított, ha kutatók fel tudtak vázolni egy részletes, kísérletileg megalapozott tervet, amely elméletben elvezethet egy általánosan alkalmazható, úgynevezett univerzális kvantumszámítógép megépítéséhez [1]. Neves kutatók szilárdan hittek a technológia megvalósíthatóságában, de jócskán akadtak szkeptikusok, akik úgy vélték, hogy a fúziós erőművek és a kvantumszámítógépek megépítése is folyamatosan a 30 éves távlatban fog kirajzolódni a mindenkori jelenhez képest. Alig három évtized elteltével azonban örömmel láthatjuk, hogy ma már több nagy egyetem és cég is rendelkezik saját fejlesztésű kvantumszámítógéppel, amelyek – bár kis méretük és instabil működésük miatt még nem alkalmazhatóak univerzálisan – már képesek lehetnek tudományosan érdekes eredményeket is elérni. A 2025-ös fizikai Nobel-díjasok – John Clarke, Michel H. Devoret és John M. Martinis – úttörő munkássága jelentős szerepet játszott abban, hogy ilyen gyorsan ilyen messzire jutott a kvantumtechnológia.

Hibajavítás – az aktuális technológiai mérföldkő

A legnagyobb kihívást jelenleg az jelenti, hogy a klaszikus áramkörök *logikai kapuinak* megfelelő *kvantumkapuk* zajosak, ezért minden egyes lépésben egy kis pontatlanság, hiba jön bele a számításba. A ma elérhető legjobb kvantumkapuk hibája nagyságrendileg 10^{-4} körül mozog, ami azt jelenti, hogy tízezer lépés után már jelentős eséllyel rossz eredményt kapunk, százezer lépés után pedig szinte bizonyosan.

Ezzel szemben a klaszikus számítógépek logikai kapuit működtető tranzisztorok hibarátája mintegy hús nagyságrenddel kisebb [2]. A precíz működéshez ez a megbízhatóság elengedhetetlen, hiszen egy modern processzor sok milliárd tranzisztorból épül fel és az órajel is másodpercenként akár több milliárd számítási cik-

lust tesz lehetővé. Egy átlagos számítógép- vagy okostelefon-felhasználó számára ez az apró hibaráta szinte észrevehetetlen, és csak néhány kritikus rendszer (pl. a repülőgépek vagy az űreszközök irányítási rendszerei) vagy szuperszámítógép esetében érdemes óvintézkedéseket tenni a potenciálisan megjelenő hibák kiküszöbölésére.

A kvantumos jelenségek törékenysége miatt nem várható, hogy a kvantumkapuk működése belátható időn belül megközelítse a tranzisztorok megbízhatóságát. Ennek az égető problémának a megoldására fejlesztették ki a kutatók a kvantumos hibajavítás és a hibatűrő számítások elméletét, amelynek révén több, kevésbé megbízható *kvantumbit* (vagy röviden *qubit*) és kvantumkapu együttes használatával az itt-ott megjelenő hibák kiszűrhetőek és kijavíthatóak.

A *hibatűrő számítások* során több fizikai, zajos qubit tárja el a redundáns módon a kvantuminformációt, amelyek együttesen úgy viselkednek mint egyetlen sokkal megbízhatóbb qubit – ezt hívjuk *logikai qubitnek*. Viszont ahhoz, hogy a hibajavító módszerek működni tudjanak, az egyes kapuknak önmaguknak is legalább valamenynyire megbízhatónak kell lenniük. Ha a kvantumkapuk *fizikai hibarátája* jelentősen nagyobb, mint 10^{-2} , akkor elméletileg sem ismert olyan módszer, amelynek révén tetszőlegesen csökkenthető volna a *logikai hibaráta*.

A tranzisztorok megbízhatóságának megközelítéséhez jelenlegi ismereteink szerint logikai qubitenként több száz vagy akár ezer fizikai qubit együttes működtetésére is szükség lehet, méghozzá olyan fizikai kvantumkapuk segítségével, amelyek mindegyikének legalább olyan jól kell működnie, mint a ma elérhető legjobb kvantumkapuk. Noha már léteznek körülbelül ezer qubitet tartalmazó csipek, ezek ehhez még összességében túlságosan zajosak. Csak az elmúlt egy-két évben sikerült olyan csipeket létrehozni, amelyek egyszerre elég nagyok és precízek is voltak ahhoz, hogy az összetett hibajavító protokollok alkalmazása ne rontsa, hanem kicsit javítsa a számítások végeredményét.

A méret a lényeg?

Most, hogy túljutottunk a kvantumos hibajavítás kísérleti demonstrációjának első lépésein, az elkövetkező egy-két évben az várható, hogy ezek a hibajavító eljárások egyre több fizikai qubit alkalmazásával egyre precízebb logikai műveleteket tesznek majd elérhetővé, és akkor már „csak” a fizikai qubitek számának növelése szükséges az univerzálisan alkalmazható hasznos kvantumszámítógépek létrehozásához.



Gilyén András matematikus, a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos munkatársa, illetve a Kvantumszámítástudomány Lendület Kutatócsoport vezetője. Az Amszterdami Egyetemen doktrált a kvantumszámítógépes algoritmusok elmélete területén, majd két évet töltött posztdoktorként a Kaliforniai Műszaki Egyetemen (Caltech). 2025-ben ERC Starting pályázatot nyert a természet által inspirált véletlent használó kvantumos algoritmusok kutatására.

Ahhoz, hogy egy kvantumszámítógépnek esélye legyen a klasszikus gépeinket túlszárnyalni, legalább 50 qubitre van szükség, mert a jelenlegi számítógépekkel 40–50 qubit méretig többé-kevésbé szimulálható tetszőleges kvantumszámítógép. Márpedig 50 megbízható logikai qubithez több tízezer szorosban együttműködő stabil fizikai qubitre lesz szükség. Persze hibajavítás nélkül is lehet olyan kvantumáramköröket futtatni, amelyek nem használnak túl sok kvantumkaput, és ezek érdekesítő eredményeket is adhatnak, pl. néhány viszonylag egyszerű kvantumrendszer szimulációja során [3]. Mindazonáltal a szakmai konszenzus szerint a kvantumszámítógépek igazán hasznos alkalmazásaihoz szükséges lesz a hibajavított logikai qubitek és kvantumkapuk használata [4].

Az eddigi fejlődés ütemét és az utóbbi évek áttöréseit látva várható, hogy a következő évtizedben megépülnek majd az első olyan kvantumszámítógépek, amelyek képesek lesznek bizonyos feladatokban megbízható módon túlszárnyalni a klasszikus számítógépeket.

A kvantumszámítógépek valódi ereje

Annak a feltérképezéséhez, hogy mire lesz érdemes kvantumszámítógépeket használni, először is meg kell érteni, hogy hogyan viszonyulnak a kvantum gépek a jelenlegi klasszikus számítógépeinkhez. A könnyebb összehasonlítás érdekében gondoljunk úgy a klasszikus számítógépekre, mint nagyméretű (elektronikailag megvalósított) logikai áramkörökre, amelyek egy-két bitre ható NEM, ÉS, illetve VAGY kapuból állnak. Ezek a logikai áramkörök közvetlenül lefordíthatóak egy kvantumkapu-hálózatra, vagy röviden kvantumáramkörre. Arra kell csak figyelni, hogy a kvantummechanika *reverzibilis*, ezért bizonyos részsámítások eredményét nem szabad úgy „eldobni” vagy „elfelejteni”, mint ahogy egy klasszikus áramkör esetében, hanem végig meg kell tartani a számítások során. Ez azonban nem jelent lényeges megkötést, azaz a klasszikus számítógépekre lényegében tekinthetünk úgy, mint „lebutított” kvantumszámítógépekre, mivel elméletben a kvantumszámítógépeknek minden feladat terén legalább olyan jól kell teljesíteniük, mint a klasszikus számítógépeknek.

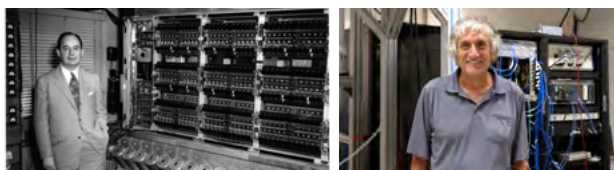
A kvantumszámítógépek gyorsabbak?

Csak azokat az egy-két bites logikai műveleteket tekintve, amelyeket egy klasszikus számítógép is el tud végezni, jelenleg nagy lemaradást láthatunk. Míg a klasszikus számítógépek milliárdnyi logikai műveletet tudnak elvégezni egy másodperc alatt, addig a szupravezetőáramkör-alapú kvantumszámítógépek jelenleg néhány millió kétqubitese műveletet képesek elvégezni, a csapdázott ionok esetében pedig csak nagyságrendileg ezer műveletre számíthatunk másodpercenként, míg a semleges atomok teljesítménye az előző kettő közé esik. Ha pedig a hibátűrő számítások logikai szintű működését tekintjük és logikai qubitenként ezer fizikai qubittel számolunk

úgy, hogy minden fizikai qubitre átlagosan legalább 20 kétqubitese fizikai kvantumkapu hat, akkor alsó becslésként még egy 10^4 -szeres redundanciával kell számolnunk. Ha az erőforrások elemzésében az elemi műveletek számát és idejét összeszorozzuk, akkor azt kapjuk, hogy a szupravezető áramkörök műveletei legalább 10^7 -szer költségesebbek, azaz effektíve „lassabbak”, míg a csapdázott ionos rendszerek műveletei 10^{10} -szer költségesebbek! Noha ezekben a paraméterekben is történt némi javulás az elmúlt évtizedben, alapjában véve azzal kell számolnunk, hogy belátható időn belül a kvantumszámítógépek műveletei sokkal lassabbak maradnak.

A kvantumszámítógépek hőskora?

Ha ránézünk a ma elérhető kvantumszámítógépekre akkor sok hasonlóságot fedezhetünk fel a klasszikus számítógépek múlt század közepi hőskorával. Az 1940–50-es évek fordulóján a számítógépek szobányi méretűek voltak és működésük tranzisztorok helyett méretes elektromoscsöveken alapult. Ha valaki Neumann János mellé állt volna, és azt mondta volna, hogy bő fél évszázad múlva egy ennél sokkal jobb gép ott fog lapulni egy átlagos ember farzsebében, minden bizonnyal bolondnak nézték volna. A mai napig tartó miniatürizációt a tranzisztorok technológiai forradalma tette lehetővé az ötvenes évek végétől kezdve.



1. ábra. Balra: Neumann János a vezetésével tervezett és épített IAS számítógéppel a háttérben (1952) [5]. Jobbra: John M. Martinis a 2025-ös fizikai Nobel-díjas kvantumszámítógép-vezérlő elektronikával a háttérben a svédországi Chalmers Egyetemen (2021) [6]

A tranzisztorokból épített integrált áramkörök megjelenése egy olyan rendkívüli esemény volt a számítástechnikában, amely lehetővé tette a Moore-törvény által leírt, hosszú évtizedeken át tartó exponenciális fejlődést. Előfordulhat, hogy a kvantum-számítástechnikában is bekövetkezik egy ilyen szinguláris esemény, amely egészen új pályára állítja majd a kvantumszámítógépek fejlődését, de egyelőre ennek nincs különösebb előjele, és ilyen egyszerű fejlődési ugrásokat nem is nagyon lehet megjósolni, főleg a jövőre vonatkozólag.

A Moore-törvény csak kvantumosan tartható fenn?

Moore megfigyelése szerint az integrált áramkörökben található tranzisztorok száma két évente duplázódik. Ennek a miniatürizációból fakadó exponenciális fejlődésnek a kora napjainkban közelít a végéhez, mivel a mikroelektronikai tranzisztorok mérete egy-két nagyságrendnyire megközelítette a szilíciumatomok méretét. Ebben és az ennél kisebb mérettartományban valóban felerősödnek a kvantumos effektusok, de ezek nem

kontrollált módon jelennek meg, ezért a miniatürizáció önmagában nem vezet univerzális kvantumszámítógépekhez. Ráadásul a kvantumszámítógépek különböző komponensei is atomokból épülnek fel, ezért a kvantumszámítógépek megjelenése nem ad közvetlenül lehetőséget a miniatürizáció további folytatására, tehát a Moore-törvény fenntartásáról nincsen szó.

Akkor miért építsünk kvantumszámítógépeket?

A kvantumszámítógépek igazi előnye, hogy újfajta műveleteket tesznek lehetővé, amelyek bizonyos problémák megoldására sokkal hatékonyabban használhatóak. Egy kicsit hasonló a helyzet a 32 bites és a 64 bites processzorarchitektúrák közötti váltáshoz, ahol az órajel nem feltétlenül lett gyorsabb, tehát a szó szoros értelmében nem lettek gyorsabbak az új generációs processzorok. Mindazonáltal egy 64 bites processzor elemi utasításkészlete gazdagabb, pl. képes nagy pontosságú 64 bites számokat egy lépésben összeadni, amelyre a 32 bites processzornak több lépésre volt szüksége, így effektíve mégis sokkal hatékonyabban tud dolgozni ilyen műveletekkel. Természetesen a klasszikus számítógépek és a kvantumszámítógépek közötti váltás ennél sokkal fundamentálisabb technológiai ugrás. Ennek megértéséhez viszont kicsit bele kell tekintenünk a kvantumos működési elvekbe.

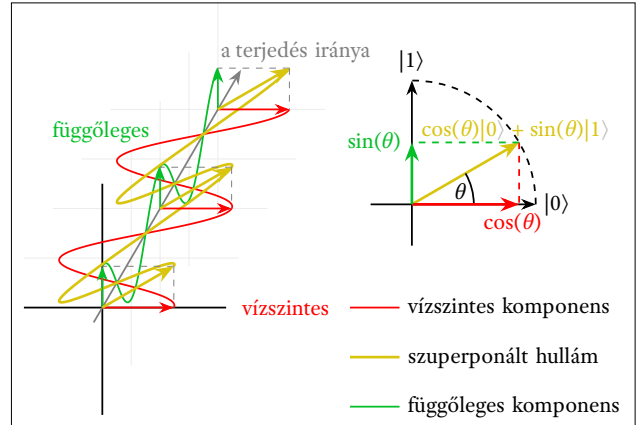
A kvantumszámítások működése

Mostantól az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a kvantumszámítógép hibája elhanyagolható, tehát *logikai* szinten vizsgáljuk csak a működését.

A kvantumszámítógépek qubitekkel dolgoznak, amelyek hasonlóan a klasszikus bitekhez felvehetik a 0 és 1 értékeket. Bármely klasszikus rendszerrel meg tudunk valósítani egy bitet, amelynek van két jellegzetes megkülönböztethető állapota, például egy felfelé vagy lefelé álló kapcsoló, 5 V-os vagy 0 V-os feszültségszint egy áramkört elemében, vagy akár a fekete-fehér négyzetek egy QR kódban.

A qubitek tulajdonságai és együttműködése

Hasonlóképpen, bármely kvantumrendszer meg tud valósítani egy qubitet, amelynek van két jól megkülönböztethető állapota, amelyeket absztraktul $|0\rangle$ -val és $|1\rangle$ -gyel jelölünk, ahol a $|\cdot\rangle$ Dirac-jelölés jelzi a kvantummechanikai kontextust. Például egy foton vízszintes és függőleges síkban polarizált állapotát megfeleltethetjük a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ qubitállapotoknak. Ezek az állapotok egyértelműen megkülönböztethetőek egy polárszűrő segítségével. Viszont akárcsak egy fénynyaláb esetében, egy foton polarizációjának síkja tetszőleges lehet, például állhat θ szögben. Egy θ szögben polarizált hullám függőleges tengelyű amplitúdója $\sin(\theta)$ -szorosa a teljes amplitúdónak, míg a vízszintes tengelyű amplitúdója $\cos(\theta)$ -szorosa, ezért a θ szögben polarizált foton a $\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ qubitállapotnak felel meg, amely a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ qubitállapotok *szuperpozíciója*.



2. ábra. Transzverzális hullámok szuperpozíciójának szemléltetése. A θ szögben polarizált hullám felbontható függőleges és vízszintes komponensekre, amelyek amplitúdói trigonometrikus függvényekkel írhatók le

Ismeretes, hogy egy polárszűrő a fénynek csak az adott irányú komponensét engedi keresztül, a fény intenzitása pedig az amplitúdó négyzetével arányos. Egy foton, ami egy fényrészecske, már tovább nem bontható, ezért az valamekkora valószínűséggel fog csak keresztüljutni, egyébként elnyelődik vagy visszatükröződik. Ha pl. egy függőleges tengelyű polárszűrőt használunk, amely a vízszintes polarizációjú fényt tökéletes tükörként visszaveri, akkor az a foton csak $\sin^2(\theta)$ valószínűséggel engedi keresztül és $\cos^2(\theta)$ valószínűséggel visszapattan róla. Ha a foton mindkét irányban egy-egy kamerával detektáljuk, akkor valójában egy kvantummechanikai mérést hajtunk végre, és a fent leírt valószínűségekkel detektáljuk a fényt valamelyik irányban. Viszont mivel a foton egy fényrészecske, a kvantummechanika törvényeinek megfelelően minden alkalommal pontosan az egyik irányban fogjuk érzékelni a foton, továbbá az áthaladó foton már függőleges polarizációjú lesz, míg a visszapattanó minden esetben vízszintes.

Az egyfoton-qubitek viselkedése könnyen megérthető, ha (lézer-) fénynyalábokként gondolunk rájuk. Az igazán különleges – klasszikus tapasztalatainktól idegen – dolog akkor történik, amikor több (fotonikus) qubit együttes állapotát vizsgáljuk. Ha van n qubitünk, akkor ezek külön-külön lehetnek akár $|0\rangle$ vagy $|1\rangle$ állapotban. Például, ha három párhuzamosan terjedő fotonból az első és utolsó függőlegesen polarizált, a középső pedig vízszintesen, akkor jelölhetjük ezt az állapotot $|101\rangle$ -gyel, hasonlóképpen az összes függőleges és vízszintes kombinációt leírhatjuk egy 3-hosszú bitsorozattal $|b_1 b_2 b_3\rangle$, ahol $b_i \in \{0,1\}$. A kvantummechanika törvényei szerint viszont ezek a qubitek tetszőlegesen *összefonódhatnak*, vagyis bármely

$$\sum_{b_1 b_2 b_3 \in \{0,1\}^3} \alpha_{b_1 b_2 b_3} |b_1 b_2 b_3\rangle$$

szuperpozíció megengedett, azzal a megkötéssel, hogy az $\alpha_{b_1 b_2 b_3}$ amplitúdók abszolútértékének négyzetösszege 1. A vízszintes és függőleges polarizációs irányok mérésekor (hasonlóan az egy qubites esethez) $|\alpha_{b_1 b_2 b_3}|^2$ valószínűséggel detektáljuk a $b_1 b_2 b_3$ polarizációkonfigu-

rációt, és a mérés után a fotonok a mért irányokban lesznek polarizáltak. Tehát a mérés, akár csak a fenti egy-fotonos esetben, visszafordíthatatlanul megváltoztatja a qubitek állapotát.

Műveletek qubiteken

A kvantumszámítógépek működése logikai szinten rendszerint a következő séma szerint megy. Először minden qubitet beállítunk egy fix, pl. $|0\rangle$ kezdőállapotba, utána különböző egy- és kétqubites kvantumkapukkal módosítjuk a qubitek állapotát, végül megmérjük a qubiteket.

A kvantumfizikai műveletek *lineárisak*, ennek megfelelően a kvantumkapuk is azok. Vegyük például a logikai tagadást mint egy bites műveletet; NEM: $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$. Az ennek megfelelő X kvantumkapu ugyanígy működik; $X: |0\rangle \mapsto |1\rangle, |1\rangle \mapsto |0\rangle$. A linearitásból pedig az következik, hogy ez a kvantumkapu szuperponált állapotokon a következőképpen működik: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \mapsto \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$.

Általánosságban elmondható, hogy elég ismerni egy kvantumkapu hatását a bemeneti qubitek összes nulla-egy értékekből álló bitsorozatnak megfelelő *bázisállapotán*, a linearitás miatt ez már egyértelműen meghatározza a hatást egy tetszőleges szuperponált állapotra.

Egy másik természetes követelmény, hogy kvantumkapuk csak úgy hathatnak, hogy a qubitek kvantumállapota egy új lehetséges kvantumállapotra változzon. Mivel kikötöttük, hogy a kvantumállapotok amplitúdóinak négyzetösszege 1, ha a kvantumállapotokra úgy gondolunk, mint az amplitúdókból álló vektorra, akkor ez azt jelenti, hogy a kvantumkapuk által leírt lineáris műveletek megőrzik az euklideszi hosszát. Az ilyen műveleteket *unitér operátoroknak* hívják, amelyek a hosszörzés miatt mindig invertálhatóak (visszafordíthatóak) egy másik unitér operátor által. Ez az oka annak, hogy a mérést leszámítva a kvantumszámítógép műveletei *reverzibilisek*.

Míg klasszikusan az egyetlen nem triviális egy bites művelet a logikai tagadás, addig kvantumosan még sok más izgalmas egyqubites kapu létezik. Például az Hadamard-kapu, amely a következőképpen hat

$$H: \begin{cases} |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ |1\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{cases} \quad (1)$$

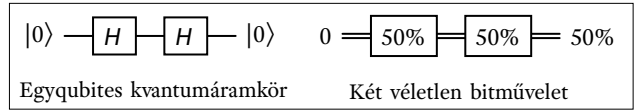
Ezen felül vannak még pl. θ szögű forgatásnak megfelelő egyqubites kapuk, amelyek a következőképpen hatnak:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto \cos(\theta)|0\rangle - \sin(\theta)|1\rangle, \\ |1\rangle &\mapsto \sin(\theta)|0\rangle + \cos(\theta)|1\rangle. \end{aligned}$$

Egy kvantumszámítógépet *univerzálisnak* hívunk, ha tetszőleges unitér operátor megvalósítható rajta. Ehhez szükség van legalább egy kétqubites műveletre is, mint amilyen például a CNOT (vezérelt negálás), amely a második (qu)bit értékét negálja, ha az első (qu)bit értéke 1:

$$\text{CNOT: } \begin{cases} |00\rangle \mapsto |00\rangle, & |01\rangle \mapsto |01\rangle, \\ |10\rangle \mapsto |11\rangle, & |11\rangle \mapsto |10\rangle. \end{cases}$$

Kvantumáramkörök

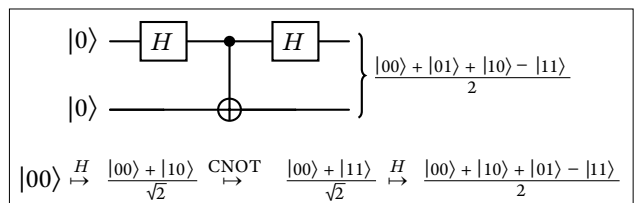


3. ábra. Kvantuminterferencia és klasszikus véletlenség

A kvantumkapukból álló hálózatot, ami leírja a kvantumszámítógép műveleteit, kvantumáramkörnek hívják. Például a 3. ábra bal oldalán egy két kvantumkapuból álló kvantumáramkör látható. Ez az áramkör azt szemlélteti, hogy az Hadamard-kapu önmaga inverze, két lépés után visszaérünk a kezdeti $|0\rangle$ állapotba. Az első Hadamard-kapu után az állapot $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$, amely szuperponált állapot a második Hadamard-kapu hatására *interferenciát* eredményez, és így a kezdeti $|0\rangle$ állapotba jutunk. Ez abból fakad, hogy az (1) egyenletben lévő azonos előjelű amplitúdók *konstruktívan erősítik* egymást, míg az ellentétes előjelűek *destruktívan kioltják* egymást.

Ha azonban az első Hadamard-kapu után egy mérést végzünk, akkor fele-fele eséllyel kapunk $|0\rangle$ vagy $|1\rangle$ állapotot. Ezután a második Hadamard-kaput is végrehajtva a két lehetséges végállapot $(1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm |1\rangle)$ lesz, amelyeket megmérve ismét fele-fele eséllyel kapnánk $|0\rangle$ vagy $|1\rangle$ eredményt. Tehát ha mindkét Hadamard-kapu után közvetlenül végeznénk egy mérést, akkor egy klasszikus véletlent használó áramkört kapnánk, amely fele-fele eséllyel vagy megtartja vagy negálja a bit értékét, lásd a 3. ábra jobb oldalát.

Ugyanez a jelenség figyelhető meg, ha a két Hadamard-kapu között nem egy mérést végzünk, hanem „átírjuk” a felső qubit állapotát egy másik qubitbe egy CNOT kapu segítségével. Az áramkör után a qubitjeink mérése itt is egyenletes eloszlású véletlen eredményre vezetne:



A 3. ábra és a fenti áramkör teljesen analóg a híres *kétrés-kísérlethez*, ahol a két résen áthaladó elektron (vagy akár foton) önmagával interferál az ernyőn. Ha azonban megmérjük, hol haladt keresztül az elektron, az interferencia eltűnik. Hasonlóképpen itt az interferencia révén kialakuló $|0\rangle$ végállapot annak az eredménye, hogy az áramkör közepén a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ állapot szuperpozíciója van jelen. Ezzel szemben ha középen egy mérést végzünk, akkor a mérési eredménynek megfelelően a $|0\rangle$ vagy $|1\rangle$ állapotba kerül a qubit. A felső qubit CNOT-os „átírása” egészen hasonló eredményre vezet, és valójában tekinthető egyfajta közbenső mérésnek is, hiszen az alsó qubit eltárolja, hogy milyen állapotban volt a felső qubit a két Hadamard-kapu között, ami a végén egy méréssel akár ki is olvasható.

Itt érdemes megjegyezni, hogy ilyen és ehhez hasonló középiskolás szintű matematikai leírással számos izgalmas kvantuminformaticai érdekesség megérthető, lásd a *Fizikai Szemle* jelenlegi számában [7], illetve a világ első, ebben a témában írt középiskolás szakköri jegyzetét, amely már magyar fordításban is elérhető [8].

Párhuzamos számítások szinte ingyen?

A kvantumszámítógépek lehetőséget adnak egy újfajta *kvantum párhuzamosságra* a számítások során. Ez abból fakad, hogy ha n qubitet veszünk a $|0\rangle$ állapotban, és mindegyikre alkalmazzuk az Hadamard-kaput, akkor az n qubites *uniform szuperpozíciót* kapjuk, amelyben az összes $|b_1 b_2 \dots b_n\rangle$ bázisállapot amplitúdója $1/\sqrt{2^n}$. Tegyük fel, hogy van egy bonyolult $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^k$ bináris függvényünk, amely egy logikai áramkörrel adott! Ha az n qubites uniform szuperpozíción felül veszünk k darab csupa $|0\rangle$ állapotú qubitet, és az együttes állapotra alkalmazzuk a logikai áramkörnek megfelelő U_f kvantumáramkört, akkor a következő kvantumállapotot kapjuk:

$$|0^n, 0^k\rangle \xrightarrow{H^{\otimes n}} \sum_{s \in \{0,1\}^n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} |s, 0^k\rangle \xrightarrow{U_f} \sum_{s \in \{0,1\}^n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} |s, f(s)\rangle. \quad (2)$$

(Az n párhuzamosan ható H kaput $H^{\otimes n}$ -nel jelöljük.)

Ahogy a (2) egyenletből is látszik, a kvantumáramkör egyszeri használatával egy olyan kvantumállapotot állíthatunk elő, amely valamilyen értelemben tartalmaz információt a függvény összes lehetséges kiértékeléséről. Viszont nem tudjuk kiolvasni mind a 2^n futás eredményét, hiszen ha megmérjük a kvantumállapotot, akkor csak egy egyenletes eloszlású véletlen n -hosszú bitsorozatot fogunk kapni a hozzá tartozó függvényértékkel. Egy hatékony kvantumalgoritmus ezért ilyenkor még további lépéseket tesz, hogy az interferencia révén mégis ki tudjon valami olyan hasznos információt nyerni a sok függvényértékből, amelyet klasszikusan költséges volna kiszámítani.

Hatékony kvantumalgoritmusok

Egy kvantumalgoritmus akkor tud a klasszikus számítógépeknél hatékonyabban működni, ha jól kiaknázza a probléma struktúráját és komplex interferenciák révén jut el gyorsan a megoldásra.

Faktorizáció és perióduskeresés

Talán a leghíresebb példa Shor kvantumalgoritmusára egész számok faktorizálására, azaz prímtényezőkre bontására. Az egyik leghíresebb titkosítási eljárás, az RSA (Rivest–Shamir–Adleman) azon a feltevésen alapszik, hogy ha veszünk két több száz jegyű véletlen prímszámot, p -t és q -t, akkor a $p \cdot q$ szorzatból gyakorlatilag lehetetlen kiszámítani a p és q prímekeket, ezért azokat használhatjuk egyfajta privát kulcsként.

Shor algoritmusának egy egyszerű változatával azonban könnyen kiszámítható a két prímtényező. Ehhez

vegyünk egyenletes eloszlással egy véletlen $a \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ számot, és vizsgáljuk azt az $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ függvényt, amelyet $f(j) \equiv a^j \pmod{m}$ alapján definiálunk. Az f függvény klasszikusan hatékonyan kiszámítható az ismételt négyzetre emelés módszerével. Továbbá ez a függvény periodikus $f(j) = f(j+h)$, és jó eséllyel a periódushossz maximális lesz: $h = (p-1)(q-1)$. Ha $h = (p-1)(q-1)$ ismert, akkor $m = p \cdot q$ -val együtt kapunk két független egyenletet a p és q ismeretlenekre, és készen vagyunk.

Elegendő tehát, ha a periódushossz kiszámítására találunk egy kvantumalgoritmust. Tekintsük most a (2) egyenletben lévő n -hosszú bitsorozatokat úgy, mint binárisan leírt egész számokat 0 és $2^n - 1$ között, azaz

$$\sum_{s \in \{0,1\}^n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} |s, f(s)\rangle = \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sqrt{2^n}} |j, f(j)\rangle.$$

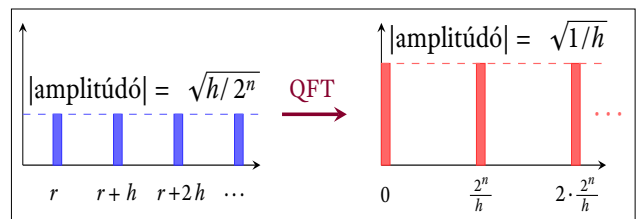
Ha az utolsó k qubitet megmérve a mérési eredmény $f(r)$, akkor az első n qubit az ezzel konzisztens (qu)bitsorozatok szuperpozíciójára redukálódik. Mivel $f(j)$ értéke csak j -nek h -val vett $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ osztási maradéktól függ, a mérés után kapott állapot felírható úgy, mint

$$\sum_{i=0}^{\ell_r} \frac{1}{\sqrt{\ell_r}} |r+i \cdot h, f(r)\rangle,$$

ahol $\ell_r = \lfloor \frac{2^n - r}{h} \rfloor$. Érezhető, hogy ez a kvantumállapot elegendő információt kell hordozzon a h periódushosszról. Viszont ha az állapotot csak egyszerűen megmérnénk, akkor mindössze egy véletlen g számot kapnánk, amelyre $f(g) = f(r)$ teljesül. Ehhez pedig elég lett volna csak egy véletlen g számot venni és aztán kiszámítani $f(g)$ értékét.

Az ötlet az, hogy be kell vetni a jelfeldolgozásban széles körben használt Fourier-transzformációt, mégpedig annak diszkrét verzióját, amely történetesen egy 2^n -dimenziós unitér operátor. Ezen n qubites kvantum-Fourier-transzformáció (QFT) ráadásul közelítőleg $n \log(n)$ egy- és kétqubites kvantumkapuval implementálható. Ha ekkora dimenziós vektorokat akarnánk Fourier-transzformálni egy klasszikus számítógépen, az exponenciálisan sok számítási lépést igényelne!

Ha olyan szerencsénk van, hogy h osztja 2^n -et (4. ábra), akkor ez a Fourier-transzformáció a h periódusú szuperpozícióból egy $2^n/h$ periódusú szuperpozíciót hoz létre, még hozzá r eltolás nélkül! Ha ezután mérünk, akkor már egy $c \cdot (2^n/h)$ alakú számot kapunk egy egyenle-



4. ábra. A kvantum-Fourier-transzformáció után az amplitúdók abszolút értéke és a periódushossz invertálódik, viszont a kezdeti r eltolás eltűnik!

tes eloszlású véletlen $c \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ számra. A kapott számot elosztva 2^n -nel megkapjuk a c/h törtet, amelynek a nevezője egyszerűsítés után h lesz, feltéve hogy c és h relatív príme (amire jó esély van). Ha h nem osztja 2^n -et, de n kellően nagy (pl. $2^n \geq h^2$), akkor egy hasonló, lánc-törteken alapuló eljárással megállapítható h értéke.

A kvantumszámítás azért tud ilyen hatékony lenni itt, mert van egy nagyon erős algebrai struktúra, amely lehetőséget ad erős interferencia létrehozására. Több más hasonló absztrakt probléma tekintetében is hatalmas kvantumos gyorsulást tesz lehetővé az algebrai struktúra, viszont ilyen problémák leginkább csak titkosítási eljárások feltörése kapcsán merülnek fel a gyakorlatban.

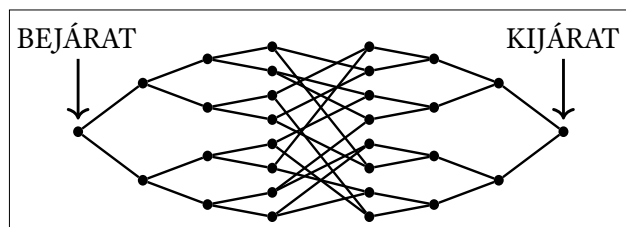
Keresés anélkül, hogy minden elemre rákérdeznénk

Természetes kérdés, hogy lehet-e az erős struktúra hiányában is érdemben gyorsítani kvantumosan, amelyre Grover algoritmus ad pozitív választ. Ha van egy S halmazon értelmezett f függvényünk, amelyről mindössze annyit tudunk, hogy egy adott y értéket csak egyszer vesz fel, akkor klasszikusan várhatóan majdnem az összes $f(s)$ értéket ki kell számítanunk, hogy megtaláljuk azt az $x \in S$ -beli elemet, amelyre $f(x) = y$. Kvantumosan azonban elég csak nagyjából $\sqrt{|S|}$ alkalommal használni az f -et kiszámító (kvantum-) áramkört.

Ez egy sokkal szélesebb körben használható kvantumos gyorsítás, mint pl. Shor faktorizáló algoritmus, viszont az elérhető gyorsítás exponenciális helyett csupán kvadratikusan. Gyakorlati alkalmazásokban azonban nehéz ezt a csekély előnyt aprópénzre váltani, mivel a kvantumszámítógépek jelenleg sok nagyságrenddel lassabbak és költségesebbek, mint klasszikus versenytársaik. Az általános nézet szerint ezért a belátható, egy-két évtizedes távlaton belül olyan alkalmazásokat kell keresnünk, ahol a kvadratikusan nagyobb kvantumos előny érhető el.

Kvantumos bolyongások

A véletlen bolyongások kvantumos megfelelőit régóta vizsgálják, mivel ezek sok esetben kvadratikusan gyorsabban terjednek, ezáltal hatékonyabb keresést tesznek lehetővé Grover algoritmusával rokon módon. Azonban ritka esetben ennél jóval nagyobb, exponenciális gyorsulásra is lehetőséget adnak ezek a bolyongások, például levelek mentén kétszeresen, véletlenszerűen összekötve



5. ábra. Két bináris fa, levelek mentén összekötve

tött n -mélységű bináris fák esetében, mint az 5. ábrán látható.

Ennek a gráfnak az a speciális tulajdonsága, hogy a be- és kijáratot leszámítva minden csúcshoz három él tartozik. Ezért, ha nincs ilyen szépen térben elrendezve a gráf, akkor a bejáratból indulva a gráfot lokálisan felderítve nagyon nehéz megtalálni a kijáratot, mert a levelek véletlenszerű összeköttetésein átjutva nem lehet tudni melyik él visz a be-, és melyik a kijárat felé. Viszont a kvantumbolyongás nem igényli az irányok ismeretét: az interferencia miatt a gráf úgy viselkedik, mintha egy egyszerű vonal lenne, így a kijárat gyorsan megtalálható.

Viszont ez a struktúra nem nagyon jelenik meg természetes problémákban. Ami talán még nagyobb gond, hogy hiába találja meg a kijáratot a kvantumos bolyongás, úgy tűnik, nem tud megtalálni egy utat a be- és kijárat között. Ha ugyanis az utat elkezdi megjegyezni a bolyongás, az interferencia a kétrés-kísérlethez hasonlóan megszűnik.

Sok másik kvantumalgoritmus is hasonló nehézségekkel küzd: erős strukturális feltételekhez kötött, és csak nagyon limitált információt tud hatékonyan kinyerni.

Számítások magas dimenziós vektorokkal

A kvantumszámítógépek műveletei exponenciálisan nagy dimenziós vektorokkal és azokon vett unitér operátorokkal írhatóak le. Ezekbe az unitér operátorokba pedig beágyazhatóak más magas dimenziós lineáris operátorok is, amelyek számos tudományos számítás során hasznosak lehetnek, pl. sokváltozós lineáris egyenletrendszerek vagy differenciálegyenletek numerikus megoldásában. Noha a magas dimenziós vektorokat hüen reprezentálják a kvantumszámítógép belső állapotai, ezeket csak nehezen, sok-sok mérés és ismételt próbálkozás révén lehet egy klasszikusan kezelhető vektorral lefordítani.

Ahhoz, hogy ki tudjuk aknázni ezt az exponenciális állapotteret, olyan problémákat kell keresni, ahol a kívánt végeredmény megkapható a vizsgált vektorok néhány egyszerű, alacsony dimenziós vetületével. A kvantumszimulációt leszámítva, ahol tipikusan csak néhány fizikai mennyiség érdekes, nagyon nehéz ilyen problémákat találni. Ez annyiban talán nem meglepő, hogy Richard Feynman éppen a kvantumos szimulációk lehetővé tétele céljából javasolta a kvantumszámítógépek kifejlesztését.

Hogyan tovább?

A kvantumos szimuláció már egy évtizeden belül is kecsegtet olyan eredményekkel, amelyek klasszikus számítógépekkel elérhetetlennek tűnnek, és anyagtudományi, majd kvantumkémiai áttörésekre is elvezethetnek. Bizonyos heurisztikus optimalizálási algoritmusok is ígéretesnek tűnnek, de ezen kívül nem látszik más jól körvonalazott, lőtávolságban lévő gyakorlati alkalmazás. Ez a Google kvantumalgoritmusokra specializált kutatócsoportját is aggasztja [9], ezért figyelemfelhívásul

az XPRIZE Alapítványon keresztül létrehoztak egy 5 millió dollár összdíjazású versenyfelhívást, amelynek keretében a pályázóknak a kvantumszámítógépek minél hamarabb elérhető alkalmazásait kell kidolgozniuk. 2025 decemberében e cikk szerzőjének csapata („Gibbs Samplers”) is bekerült a verseny hét döntős csapata közé, szintén egy kvantumszimulációs eljárás továbbfejlesztésével, amely akár optimalizációs feladatokra is alkalmazható lehet [10].

Összegzésként elmondható, hogy több specifikus számítási problémában elengedhetetlen lesz a kvantumszámítógépek használata. Bár a megbízható kvantumszámítógépek megépítése egy óriási technológiai áttörés lesz, mégsem várható, hogy akkora hatással legyen a hétköznapi életre, mint a klasszikus számítógépek forradalma tette. Ugyanakkor bizakodásra ad okot, hogy a klasszikus számítógépek ekkora térnyerését sem lehetett előre jóslni azok hőskorában, és valószínűleg sok fontos alkalmazás a kvantumszámítógépek megjelenésével karöltve alakul majd ki.

Irodalom

1. Cirac J. I., Zoller P. (1995): Quantum computations with cold trapped ions. *Physical Review Letters*, 74, 4091.
2. Zimborás Z. (2022): Kvantumszámítógépek – mítosz és valóság. MTA Tudományünnep+, 2022. november 8. (lásd: YouTube, 2022)
3. Zimborás Z., Koczor B., Holmes Z., Borrelli E.-M., Gilyén A., Huang H.-Y. et al. (2025): Myths around quantum computation before full fault tolerance: What no-go theorems rule out and what they don't. *arXiv*: 2501.05694.
4. Dalzell A. M., McArdle S., Berta M., Bienias P., Chen C.-F., Gilyén A., et al. (2025): Quantum algorithms: A survey of applications and end-to-end complexities. Cambridge University Press.
5. Richards A. felvétele. Köszönet a Princetoni Institute for Advanced Study-nak a közlés engedélyezésért.
6. Köszönet a Chalmers Egyetemnek a közlés engedélyezésért.
7. Tóth Kristóf (2026): A kvantummechanikai valószínűségekről középiskolában. *Fizikai Szemle*, 2026/1, 27–33.
8. Ozols M., Walter M. (2018): Kvantumküldetés. <https://gilyen.hu/kvantumkuldetes.html>
9. Babbush R., King R., Boixo S., Huggins W., Khattar T., Low G. H., et al. (2025): The Grand Challenge of Quantum Applications. *arXiv*: 2511.09124.
10. Az XPRIZE Quantum Applications döntősei (2025): <https://telex.hu/techtud/2025/12/11/xprize-quantum-applications-verseny-magyar-csapat-donto-gibbs-samplers-algoritmus-quantumfizika>

A FÉM-SZERVES VÁZSZERKEZETEK TUDOMÁNYA: A 2025-ÖS KÉMIAI NOBEL-DÍJ HÁTTERE

Kováts Éva

HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet, Kísérleti Szilárdtestfizika Osztály, Budapest
E-mail: kovats.eva@wigner.hun-ren.hu

2025-ben a Svéd Királyi Tudományos Akadémia a kémiai Nobel-díjat Susumu Kitagawanak (Kiotói Egyetem), Richard Robsonnak (Melbourne-i Egyetem) és Omar M. Yaghinak (Berkeley-i Kaliforniai Egyetem) ítélte oda „a fém-szerves vázszerkezetek (metal-organic frameworks, MOF) kifejlesztéséért” [1]. A díjazottak olyan forradalmian új, porózus molekuláris szerkezetek kifejlesztéséért kapták a kitüntetést, amelyek kristályszerkezetükben nagy felületű üregrendszerekkel rendelkeznek, ami számos alkalmazási területen nyújt kiemelkedő lehetőséget.

Ezen anyagok alapjaiban változtatták meg, miként gondolkodunk az új anyagok kifejlesztéséről: nem csupán egyedi vegyületeket tervezünk, hanem olyan molekuláris architektúrákat, amelyek funkciójukat tekintve sokrétűek. Nemcsak a vázszerkezet funkciói tervezhetőek, hanem az üregrendszer tulajdonságai is, alkalmazástól függően – legyen szó szén-dioxid megkötéséről,

víz kinyeréséről sivatagi környezetben, szennyeződések szűréséről, gázok tárolásáról vagy katalitikus reakciók elősegítéséről.

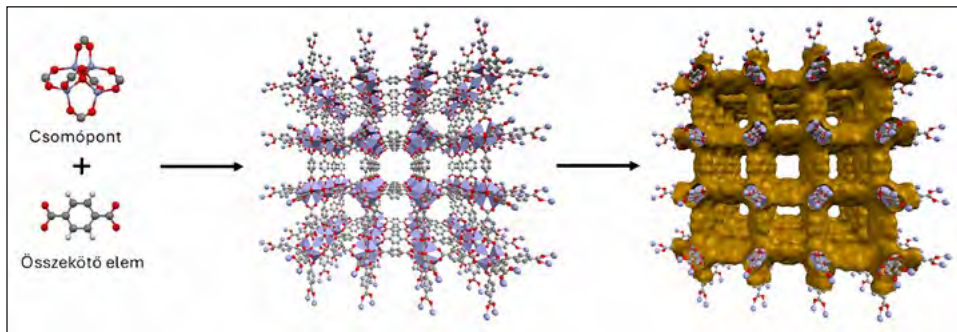
A díj kitüntetettjei – Robson kezdeti munkája, Kitagawa gázmegkötésre és rugalmasságra vonatkozó fejlesztései, valamint Yaghi stabil és tervezhető MOF-jainak megalkotása – együtt nyitottak meg egy eddig alig ismert, de rendkívül nagy potenciállal bíró tudományterületet.

Mik ezek az anyagok, és miért forradalmiak?

A fém-szerves vázszerkezetek speciális hibrid anyagoknak tekinthetőek. Kristályszerkezetük leírható csomópontok és az azokat összekapcsoló összekötő elemek, ún. linkerek hálózataként (*1. ábra*). A csomópontokban fémionok vagy fémlaszterek helyezkednek el, amelyek koordinációs centrumokként viselkednek. Ezek a csomópontok merev, szerves molekulák (ligandumok) segítségével kapcsolódnak össze erős koordinációs kötések révén. A ligandumok mindegyike több, koordinációra képes funkció csoportot tartalmaz, ami lehetővé teszi térbeli hálózatok kialakítását, továbbá stabilitást is biztosítanak a szerkezetnek. A kialakuló kristályszerkezetekben a csomópontok és összekötők együtt egy háromdimenziós, periodikus hálózatot alkotnak. Ez a felépítés azért különleges, mert nem egy tömör, sűrű kristályrács



Kováts Éva a HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont tudományos főmunkatársa és ugyanitt a Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet Kísérleti Szilárdtestfizika Osztályának vezetője 2019 óta. Vegyészként fő kutatási területe kristályos fullerénszármazékok, nanocső-alapú hibrid rendszerek és új típusú fém-szerves vázszerkezetek előállítása és szerkezetvizsgálata.



1. ábra. Példa a fém-szerves vázszerkezetek felépítésére. Balról jobbra: a két fő építőelem, a kialakuló vázszerkezet, a vázban található üregrendszer

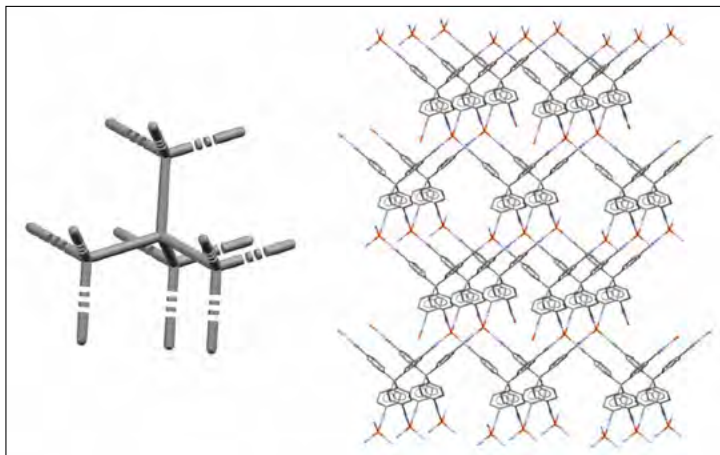
alakul ki, hanem olyan térháló, amely szabályos, összefüggő üregrendszert is tartalmaz. Az előállított kristályok üregei gyakran oldószerekkel vagy ionokkal telítettek, azonban a gyakorlati alkalmazások szempontjából meghatározó, hogy a MOF-ok az üregek kiürítése után is stabilak maradjanak.

A MOF-ok legnagyobb előnye, hogy ezeket az „üreget”, pórusokat, valamint azok kémiai tulajdonságait tudatosan tervezve lehet szabályozni: a fémcsoópont, a ligandum és az úgynevezett kötési geometria kiválasztásával a pórus mérete, alakja, valamint a belső felület kémiai jellege precízen szabályozható. Így létrehozhatók olyan anyagok, amelyek például szelektíven megkötnek egy adott gázt, vízpárát, vagy éppen toxikus vegyületet, ezáltal új dimenziót nyitva az anyagok funkcionális alkalmazásában.

Összességében a MOF-ok nem csupán egyszerű vegyületek, hanem modulárisan felépíthető molekuláris építészeti stratégiát képviselnek, ahol a pórusok, a belső felület és a kémiai funkcionalitás a tervezési céloknak megfelelően alakítható.

A díjazott tudósok hozzájárulása

Az anyagcsalád története egy igen kreatív ötlettel kezdődött. Richard Robson modelleket készített fagolyókból és rudakból azzal a céllal, hogy a kristályszerkezetek szem-



2. ábra. Balra a gyémánt szerkezete, jobbra a Robson által szintetizált térhálós koordinációs polimer

léttetését megkönnyítse az első éves egyetemisták kémiaoktatásában. Robson ráébredt arra, hogy az atomokat összekötő kötések helyének szabályos elhelyezése egyfajta kódolást jelent: ha az ideális kötési geometriát követjük, önszerveződő molekuláris szerkezetet hozhatunk létre. Elképzelése az volt, hogy a modellekben

a golyókat molekulákkal helyettesítve új szerkezeteket lehetne létrehozni.

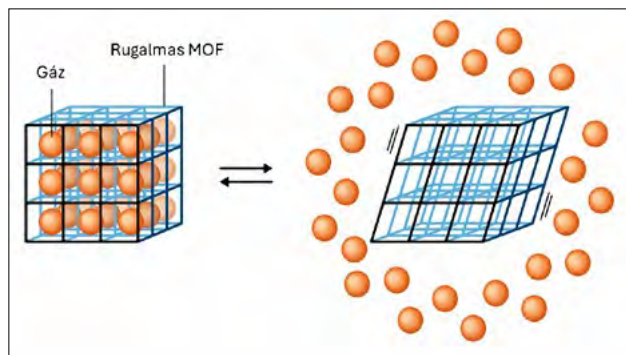
Az 1980-as évek végén Robson és munkatársai ezt az elméletet a gyakorlatban is tesztelték [2]: 1989-ben rézionok (konkrétan pozitív töltésű rézionok) és egy tetraédres szimmetriájú szerves összekötő molekula kombinálásával kísérleteztek (2. ábra). A céljuk a gyémánt szerkezetéhez hasonló szimmetriájú szerkezet előállítás volt. Az eredmény egy nem tömör, hanem nanométeres belső üregekkel rendelkező térhálós szerkezet lett. Abban az időben még senki sem gondolta, hogy a hasonló anyagok stabilak, sőt, kristályosak lehetnek. Ez az első légiés, pórusos térhálós anyag előfutára volt a későbbi MOF-oknak.

Robson már ekkor felismerte, hogy az új típusú molekuláris váz forradalmi potenciált hordoz, mivel olyan anyagokat eredményezhet, amelyek esetében a belső tér és az üregek funkcionalitása előtérbe kerül a sűrűség vagy a tömörség rovására. Az első szerkezetek instabilak voltak, nem voltak alkalmasak azonnali gyakorlati felhasználásra, mivel hamar összeomlottak, amikor az üregeket megpróbálták kiüríteni. Robson munkája mégis megalapozta a hasonló szerkezetek előállításának elvét.

Ez a kezdeti, merész ötlet, valamint annak első kísérleti megvalósítása lehetővé tette, hogy a következő generáció kutatói – mint Susumu Kitagawa és Omar M. Yaghi – továbbvigyék a koncepciót, stabilizálják a szerkezeteket, finomítsák az anyagokat, és bizonyítsák, hogy a koncepció nem csupán elméleti, hanem a gyakorlatban is alkalmazható.

Susumu Kitagawa az 1990-es évek elején kezdett el foglalkozni különböző koordinációs polimerek előállításával és hasznosításával. Munkája során felismerte: nem pusztán szilárd, tömör kristályokat lehet előállítani ezekből a vegyületekből, hanem olyan, pórusokkal rendelkező szerkezeteket is, amelyek belső, nanométeres üregei képesek gázmolekulák befogadására és kibocsátására.

1997-ben kutatócsoportjával olyan porózus koordinációs polimert hozott létre, amely reverzibilisen adszorbeálta és deszorbeálta a gázokat anélkül, hogy a kristályszerkezet összeomlott



3. ábra. A rugalmas MOF szerkezetek átalakulása gázabszorpció hatására (Forrás: Nobel-bizottság)

volna [3]. Ez volt az első sikeres demonstráció arra, hogy MOF-ok nem csak elméleti koncepciók, hanem működő, stabil szerkezetek lehetnek.

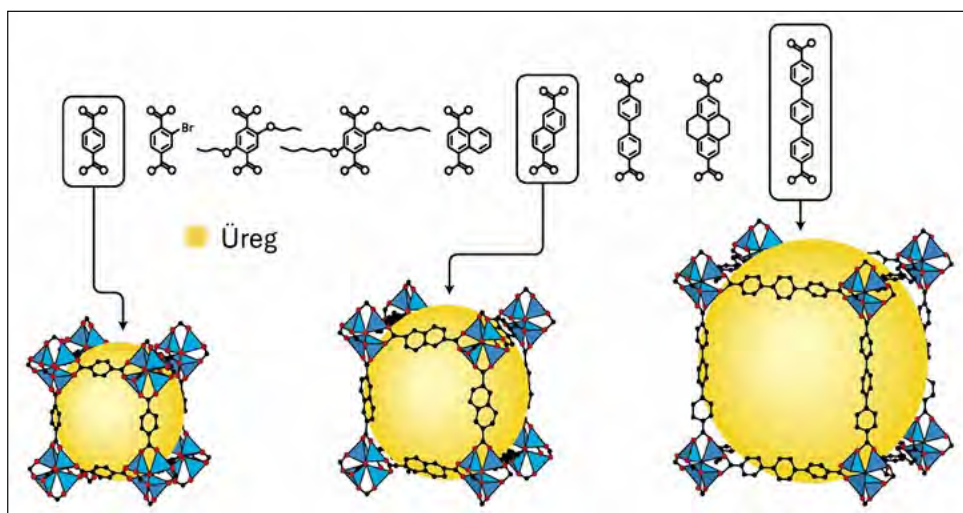
Kitagawa rámutatott, hogy az új koordinációs polimerek jelentősen különböznek a hagyományos porózus anyagoktól, mivel a MOF-ok pórusmérete és tulajdonságai szabadon hangolhatók a fémionok és a szerves ligandumok kombinációjával. Kristályos szerkezetüknek köszönhetően egyenletes méretű üregeket tartalmaznak, amelyek saját tömegükhöz képest nagyságrendekkel több molekula befogadására képesek, mint az aktivált szén, és kevesebb energiát igényelnek különböző anyagok szétválasztásához. A pórusvariációk száma százszorososa a zeolitokénak, ami ezektől a hagyományos porózus anyagoktól is megkülönbözteti őket. Kitagawa volt az első, aki kimondta, hogy a fém-szerves vázszerkezetek új családot alkotnak a porózus anyagokon belül, funkcionális sokszínűségük és testreszabhatóságuk révén rendkívül változatos szerkezeteket eredményezhetnek.

Továbbá, Kitagawa elsőként vetette fel és valósította meg, hogy a MOF-ok lehetnek rugalmasak, azaz nem merev, törekeny kristályok, hanem „puha”, dinamikusan reagáló hálózatok [4]. Olyan új anyagokat tervezett, amelyek funkcionálisan reagálnak külső ingerekre. Egyes esetekben az adszorbeált gázok, vendégmolekulák hatására változhat a kristályok szimmetriája, így térfogata is (3. ábra). Más szerkezeteknél külső ingerek, pl. kémiai, hő- vagy nyomásingerek hatására átalakul a koordinációs polimerek szerkezete, így a bennük lévő üregek mérete vagy alakja is módosul, ezzel változnak az abszorpció tulajdonságai is. Ez a „koordinációs tér kémia” új paradigmát jelentett a porózus anyagok esetében.

Kitagawával egy időben Omar Yaghi is aktívan foglalkozott koordinációs vegyületekkel és szerzetekémiai kutatásokkal. Felismerte, hogy bár a korábbi próbálkozások ígéretesek voltak, sok esetben az előállított térhálók instabilak voltak, ami korlátozta a gyakorlati alkalmazásukat. Yaghi célja az volt, hogy olyan anyagokat alkosson, amelyek nemcsak elméleti érdeklődésre számíthatnak, hanem stabil, reprodukálható, jól definiált kristályszerkezetű, porózus anyagok formájában is léteznek. Ez a stabilitás kulcsfontosságú volt a gyakorlati alkalmazások szempontjából.

Yaghi csoportja a stabilitás problémáját a karboxilát típusú MOF-ok kifejlesztésével oldotta meg, amelyek fémionok vagy fém-oxo klaszterek és polikarboxilát ligandumok koordinációjával jönnek létre. A karboxilát funkció csoportok beépítésével erős, többszörös és irányított koordinációs kötések alakulnak ki, aminek következtében szilárd, tartós, kristályos hálózatok jönnek létre. Ennek eredményeként vált lehetővé olyan MOF-ok előállítása, amelyek magas termikus (akár $> 400\text{ }^\circ\text{C}$) és kiváló kémiai stabilitást mutatnak vízben, savas vagy bázikus közegben is, miközben szerkezeti integritásuk megőrződik az üregek kiürítése vagy gázadszorpció és deszorpció során.

A karboxilát típusú MOF-ok egyik legelső és legfontosabb példája a nagy szimmetriájú, egyszerű szerkezetű MOF-5, amelyet Yaghi és munkatársai írtak le 1999-ben [5]. Szerkezetét bázikus Zn_4O típusú csomópontok és 1,4-benzoldikarbonsav ligandumok kapcsolódása hozza létre, ami egy kockarács-topológiára épülő, magas kristályosságú, rendkívül porózus anyagot eredményez (1. ábra). Meglepő módon pár gramm anyag belső felülete akkora, mint egy focipálya, lehetővé téve hatalmas mennyiségű gáz vagy molekula tárolását minimális tömeg mellett. A MOF-5 kulcsszerepe abban áll, hogy elsőként demonstrálta: moduláris önszerveződés révén jól definiált, nagyméretű és stabil belső üregekkel rendelkező szuperporózus kristá-



4. ábra. Példa a MOF-5 szerkezetén alapuló sorozatra. A sárga gömbök jelölik a különböző méretű üregeket (Forrás: Nobel-bizottság)

lyos anyagok hozhatók létre, megalapozva a modern MOF-kémia fejlődését.

Ezen a moduláris önszerveződésen alapszik az ún. retikuláris kémia (reticular chemistry). Yaghi és csoportja kidolgozott egy módszert [6], aminek segítségével előre tervezett topológiájú, kívánt pórusgeometriájú és funkciójú vázszerkezetek hozhatók létre. Ez egy olyan anyagtervezési megközelítés, amelyben a vázszerkezetet teljes egészében a nulláról építjük fel. A csomópontokat és a szerves összekötőket, mintha molekuláris építőköcek lennének, előre meghatározott módon kapcsoljuk össze, így hozva létre periodikus, kristályos hálózatokat. A moduláris építőelemeket geometriai objektumokként kezeljük: a kapcsolódási módjaik és szögeik alapján megjósolható a kialakuló háromdimenziós hálózat topológiája. Ez a megközelítés lehetővé teszi azonos topológiájú anyagcsaládok, ún. izoretikuláris sorozatok kifejlesztését, amin belül az azonos konnektivitású fémcsoportok és ligandumok szabadon variálhatóak, a kialakuló szerkezet szimmetriája, stabilitása azonos, méretei és kémiai tulajdonságai viszont merőben eltérhetnek egymástól. Yaghi nevéhez köthető az első szuperporózus, mégis stabil karboxilát MOF-családok (pl. IRMOF-ok) kifejlesztése, amelyek radikálisan túlszárnyalták az addig ismert porózus anyagokat fajlagos felületben (akár $> 6000 \text{ m}^2/\text{g}$), és demonstrálták a szerkezeti finomhangolhatóságot is (4. ábra).

Az új anyagok stabilitása, a precíz, moduláris szerkezettervezés megnyitotta az utat a technológiai alkalmazások felé, lehetővé téve, hogy a MOF-kutatás ne ragadjon le egy-két egzotikus, nehezen reprodukálható laboratóriumi anyagnál, hanem széles körben alkalmazható anyag-típusként definiálódjon.

Lehetséges alkalmazási területek

A kémiai Nobel-díjjal elismert kutatók munkája olyan technológiai lehetőségeket teremtett, amelyek a mai

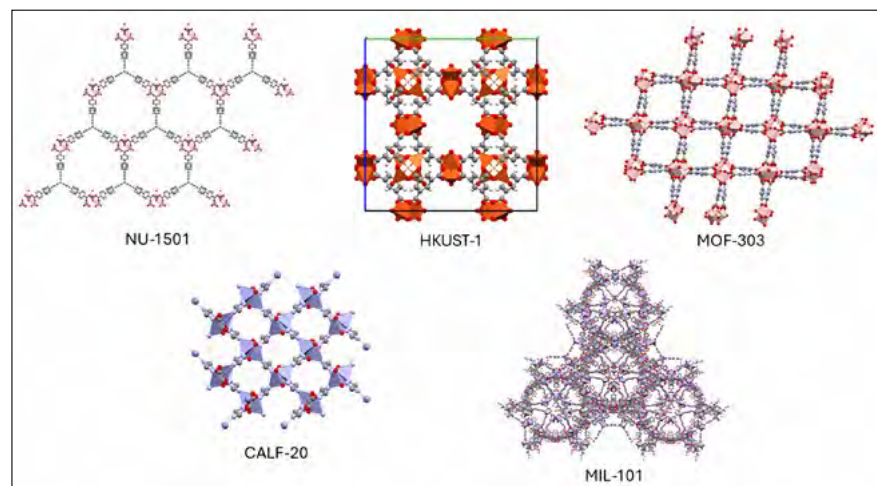
globális kihívások, például az energiatárolás, a széndioxid megkötése, a környezetvédelem, valamint a gázok és egyéb anyagok szelektív szétválasztása és kezelése, illetve a heterogén, fenntartható katalízis szempontjából is kiemelkedően relevánsak. Mivel a MOF-ok tervezhetők és a felhasználási igényekhez testre szabhatók, ma már lehetséges olyan anyagok kifejlesztése, amelyek célzottan oldják meg a konkrét kihívásokat. Néhány gyakorlati példa is jól demonstrálja e lehetőségeket (5. ábra).

A NU-1501 egy rendkívül nagy porozitású, ún. ultraporózus MOF-család [7], amelyet már a retikuláris kémia elvei szerint terveztek: tripticénapú szerves ligandumokat és hárommagvú fémklaszter-egységeket kombinálva jön létre a kristályos hálózat. A NU-1501 alumíniumvariánsa például $\sim 7310 \text{ m}^2/\text{g}$ fajlagos BET-felülettel rendelkezik, amely a jelenleg ismert legnagyobb értékek közé tartozik. Emellett a volumetrikus sűrűsége is kiemelkedő, tehát nagy térfogatú gáz elnyelésére képes. Alkalmazása olyan technológiákban lehet ígéretes, ahol gázhalmazállapotú energiahordozót (hidrogént, földgázt vagy metánt) kell kompakt módon tárolni, például járművek üzemanyag-tárolásánál, vagy hordozható energiatároló rendszerekben. Alkalmazásának lényege, hogy a MOF mint szivacs adszorbeálja a gázt, majd nyomás- vagy hőmérséklet-változás hatására kiszorítja azt, így ciklikusan újra használható.

A HKUST-1 (Cu-BTC) az egyik legismertebb és legszélesebb körben vizsgált fém-organikus vázszerkezet [8], amely a széndioxid mellett metán tárolására is alkalmas. A szerkezet alapját a rézionokra épülő, úgynevezett lapátkerék alakú csomópontok és az azokat térhálósító benzotrikarbonsav-ligandumok adják, amelyek nagy fajlagos felületű, mikroporózus hálózatot hoznak létre. A pórusok mérete és eloszlása előnyösen illeszkedik a metán molekulaméretéhez, így a CH_4 hatékonyan adszorbeálódhat a belső falakon. A metánmolekulák rendezett módon kötődnek, ami lehetővé teszi, hogy egy

adott térfogatban normál nyomáson több metán legyen tárolható, mint egy azonos térfogatú nagynyomású tartályban. Ennek köszönhetően az erre a MOF-ra épülő rendszerek biztonságosabbak, könnyebbek és energiahatékonyabbak, hozzájárulva a metánalapú energiahordozók szélesebb körű alkalmazásához.

Az atmoszférikus vízkinyerés napjainkban egyre nagyobb figyelmet kap, különösen a vízhiányos térségek fenntartható vízellátásának biztosítása érdekében. A sivatagi levegő extrémén száraz, ezért a víz kinyeréséhez olyan anyagokra van szükség, amelyek nagyon alacsony relatív



5. ábra. Néhány példa a MOF-ok gyakorlati alkalmazására. NU-1501: nagy kapacitású H_2 -tárolás; HKUST-1: CH_4 -tárolás üzemanyagcellákban; MOF-303: vízabszorpció levegőből; CALF-20: a CO_2 kiszűrése füstgázból; MIL-101: H_2 - és CO_2 -tárolás, szennyvíztisztítás

páratartalom mellett is képesek vizet megkötni, majd kontrollált körülmények között felszabadítani azt. Bizonyos MOF-ok szerkezete lehetővé teszi, hogy a kristályokban lévő üregek vízmolekulákkal töltődjenek fel, majd azok hő vagy napsugárzás hatására felszabaduljanak. A legismertebb ilyen rendszerek már 5%-os relatív páratartalom mellett is hatékonyan működnek. A hideg éjszakák során a kristályszerkezet vízzel telítődik, amely az üregekből kinyerhető a napfény hatására történő felmelegítéskor. Ezen alapul például a MOF-303 alapú modellkészülékek működése is [9]. Az adszorbens szerkezetét tekintve Al^{3+} ionok koordinálnak 1,2,4-triazol típusú heteroaromás ligandumokat, így egy rendkívül stabil, hidrophil belső felületű porúsrendszer alakul ki, amiben a vízmolekulák hidrogénkötések sorozatával kötődnek meg. Ezzel a módszerrel egy 200 gramm MOF-303 anyagot tartalmazó vízgyűjtő rendszer akár már napi ~ 5 liter ultratiszta víz kinyerésére is képes a levegőből.

A szén-dioxid megkötésének problémája két fő részre osztható: az egyik a CO_2 közvetlen eltávolítása a levegőből, ahol a koncentráció mindössze ~ 0,04%, míg a másik a pontforrásokból, pl. ipari kéményekből történő megkötés, ahol a CO_2 -koncentráció jelentősebb, így a megkötése technikailag egyszerűbben kivitelezhető. Az utóbbi problémára nyújthat megoldást egy cink-triazolát-alapú fém-szerves vázszerkezet, a CALF-20, ami a CO_2 elnyelésének egyik legígéretesebb adszorbense [10]. Kristályos, porózus szerkezete lehetővé teszi, hogy pórusaiban szelektíven megkösse a CO_2 -t, miközben ellenáll a víz kedvezőtlen hatásainak, ami kulcsfontosságú, mivel az ipari füstgázok egyik fő alkotóeleme a vízgőz. A CALF-20 kimagaslóan jól teljesít valós üzemi körülmények között: a CO_2 -t előnyben részesíti 40% relatív páratartalom mellett is, és megtartja adszorpciós képességét akár 150 °C-on, azaz tipikus füstgázhőmérsékleten is. E tulajdonságok miatt ígéretes megoldást kínál a cementiparban és más nagy kibocsátású ipari ágazatokban keletkező üvegházhatású gázok kibocsátásának mérséklésére.

A MIL-101 típusú fém-szerves vázszerkezet a tereftálsav és vas, valamint krómionok koordinációs kölcsönhatásával kialakuló erősen porózus, kiváló stabilitású anyag [11]. Kristályrácsa kétféle nagy méretű üregt tartalmaz, aminek köszönhetően kiemelkedően magas fajlagos felülettel rendelkezik. Üregei széles pórusnyílásokon keresztül könnyen hozzáférhetők, így a vendégmolekulák diffúziója kifejezetten gyors. Ezen felül a szerkezet kémiai és hőstabilitása is jelentős: nedvesség jelenlétében is megőrzi stabilitását, és 300 °C feletti hőmérsékleten sem omlik össze, ami a legtöbb MOF-ra nem jellemző. Ezeknek a szerkezeti előnyöknek köszönhetően a MIL-101-nek sokrétű alkalmazási lehetőségei vannak. Az egyik legaktívabban kutatott területe a gázadszorpció és -tárolás, különösen a CO_2 , CH_4 és H_2 megkötése, ahol nagy pórustérfogata és funkcionálható belső felülete magas adszorpciós kapacitást eredményez.

További fontos alkalmazási területe a szennyezőanyagok eltávolítása vizes közegből, ahol a nagy belső felület és az üregek felületének jellege kiemelkedő megkötési hatékonyságot biztosít nehézfémionok, festékek vagy egyéb szerves szennyezők esetében. Tulajdonságainak köszönhetően a MIL-101 az ipari alkalmazások szempontjából az egyik legígéretesebb MOF.

A fém-szerves vázszerkezetek forradalmasították a modern anyagkémia és szerkezettervezés szemléletét. Modulárisan tervezhető kristályszerkezetük révén a pórusméret, a belső felület és a kémiai funkcionalitás célzottan alakítható, ami lehetővé teszi a gáztárolástól és szén-dioxidmegkötéstől kezdve a vízkinyerésen át a katalitikus folyamatokig terjedő alkalmazásokat. A Robson, Kitagawa és Yaghi munkássága által megalapozott MOF-kutatás új paradigmát teremtett a stabil, porózus és funkcionálisan sokszínű anyagok tervezésében, amely számos ipari és környezeti kihívás megoldásában kínál ígéretes lehetőséget. A jövőben a MOF-ok további fejlesztése új alkalmazási területeket nyithat meg, hozzájárulva a fenntartható anyagtechnológia fejlődéséhez.

Irodalom

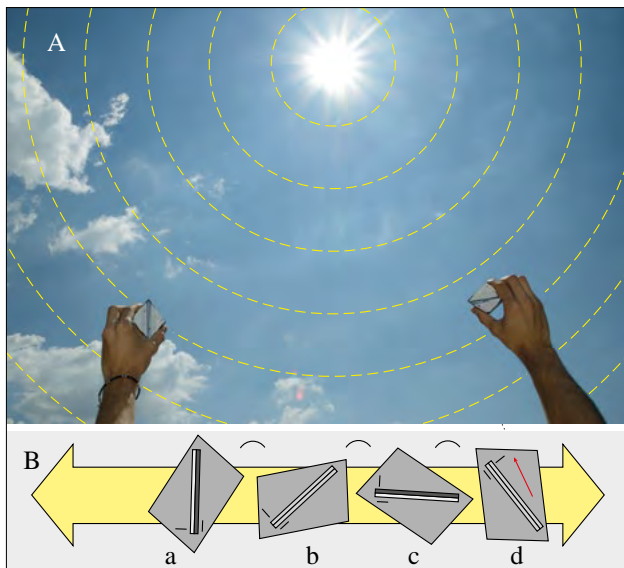
- <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/2025/summary/>
- Hoskins B. F., Robson R. (1989): Infinite polymeric frameworks consisting of three dimensionally linked rod-like segments. *J. Am. Chem. Soc.*, 111, 5962–5964.
- Kondo M., Yoshitomi T., Matsuzaka H., Kitagawa S., Seki K. (1997): Three-Dimensional Framework with Channeling Cavities for Small Molecules: $\{[M_2(4,4'-bpy)_3(NO_2)_4] \cdot xH_2O\}_n$ (M = Co, Ni, Zn). *Angew. Chem. Int. Ed. In English*, 36, 1725–1727.
- Zheng Y., Sato H., Wu, P., Jeon H.J., Matsuda R., Kitagawa S. (2017): Flexible interlocked porous frameworks allow quantitative photoisomerization in a crystalline solid. *Nat. Commun.*, 8, 100.
- Li H., Eddaoudi M., O’Keeffe M., Yaghi O. M. (1999): Design and synthesis of an exceptionally stable and highly porous metal-organic framework. *Nature*, 402, 276–279.
- Yaghi O., O’Keeffe M., Ockwig N. Chae H. K., Eddaoudi M., Kim J. (2003): Reticular synthesis and the design of new materials. *Nature*, 423, 705–714.
- Chen Z., Li P., Anderson R., Wang X., Zhang X., Robison L., Redfern L. R., Moribe S., Islamoglu T., Gómez-Gualdrón D. A., Yildirim T., Stoddart J. F., Farha O. K. (2020): Balancing volumetric and gravimetric uptake in highly porous materials for clean energy. *Science*, 368, 297–303.
- Chui S. S. Y., Lo S. M. F., Charmant J. P. H., Orpen A. G., Williams I. D. (1999): A chemically functionalizable nanoporous material $[Cu_3(TMA)_2(H_2O)_3]_n$. *Science*, 283, 1148–1150.
- Zheng Z., Nguyen H. L., Hanikel N., Li K. K., Zhou Z., Ma T., Yaghi O. M. (2023): High-yield, green and scalable methods for producing MOF-303 for water harvesting from desert air. *Nat. Protoc.*, 18, 136–156.
- Lin J. B., Nguyen T. T. T., Vaidhyanathan R., Burner J., Taylor J. M., Durekova H., Akhtar F., Mah R. K., Ghaffari-Nik O., Marx S., Fylstra N., Iremonger S. S., Dawson K. W., Sarkar P., Hovington P., Rajendran A., Woo T. K., Shimizu G. K. H. (2021): A scalable metal-organic framework as a durable physisorbent for carbon dioxide capture. *Science*, 374, 1464–1469.
- Llewellyn P. L., Bourrelly S., Serre C., Vimont A., Daturi M., Hamon L., De Weireld G., Chang J. S., Hong D. Y., Hwang Y. K., Jhung S. H., Férey G. (2008): High uptakes of CO_2 and CH_4 in mesoporous metal-organic frameworks MIL-100 and MIL-101. *Langmuir*, 24, 7245–7250.

A VIKINGEK ÉGPOLARIZÁCIÓS NAVIGÁCIÓJA, AVAGY MILYEN ESÉLYEL ÉRHETTÉK EL GRÖNLANDOT, ÉS FEDEZHETTÉK FÖL AMERIKÁT?

Horváth Gábor^{1,*}, Száz Dénes¹, Takács Péter¹, Farkas Alexandra¹, Blahó Miklós¹, Bernáth Balázs¹, Barta András¹, Egri Ádám²
¹ELTE Biológiai Fizika Tanszék, Budapest; ²HUN-REN Ökológiai Kutatóközpont, Budapest
 *E-mail: gh@arago.elte.hu

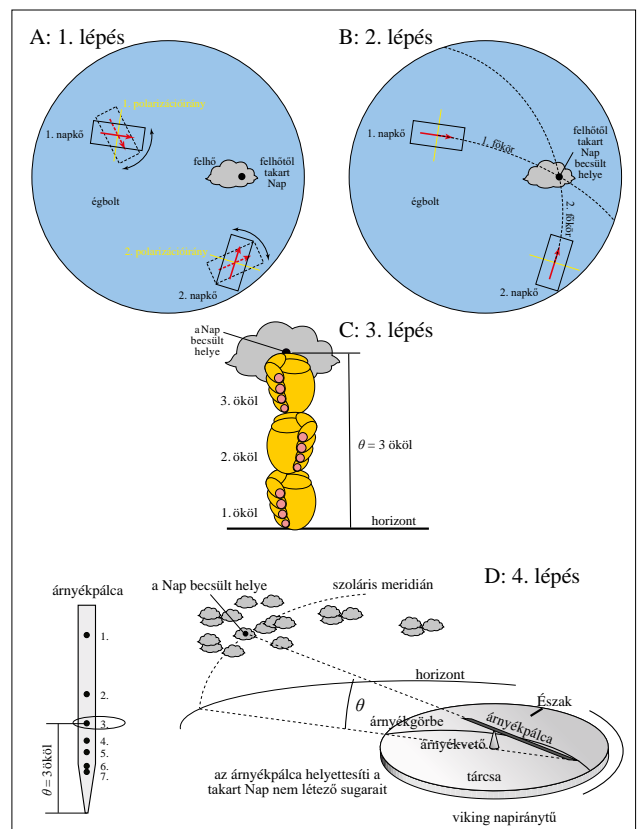
A viking napiránytű

Az i. sz. 900 és 1400 között az Észak-Atlanti-óceánt is uraló vikingeknek nem volt mágneses iránytűjük. Régészeti leletekből ismert, hogy tengeri útjaikon egy speciális napiránytűt használtak, ami egy olyan vízszintes tárcsa, melynek közepén egy függőleges árnyékvető rudacska volt [1, 2]. Napsütéses időben a tárcsára rárajzolták azt a görbét, melyet a rudacska árnyékának vége leírt, miközben a Nap az égen haladt. Az így kapott hiperbolikus árnyékgörbe tükörszimmetria-tengelye mindig a földrajzi észak felé mutatott. Amikor tájékozódni akartak, akkor a tárcsát addig forgatták, míg nem a rudacska árnyékának csúcsa az árnyékgörbére esett, s ekkor a külön karcolással jelölt szimmetriatengely északra nézett. Kísérletek bizonyították, hogy a Norvégia és Dél-Grönland között a $60^{\circ} 21' 55''$ északi szélességen húzódó leghosszabb viking hajóúton e napiránytű kiválóan működött, ha sütött a Nap.



1. ábra. A viking kalcit napkövek kalibrációja, amikor az égen látható a Nap (A). A sárga kettősfejű nyíl és a sárga pálcikák a helyi polarizáció-irányt mutatják. A lineárisan poláros ég egy felhőtlen pontját a napkövön át nézve (A) a napkövet addig forgatták (B), amíg az átlátszatlan fedőlappja résében a kettőtörés miatt látható két párhuzamos vonal (rész-kép) azonos intenzitásúvá nem vált. Mivel mindig két ilyen helyzet adódott (b és d), csak az egyiket választották (például d), amikor is a napkő fedőlappjára vésték egy nyilat (piros), aminek feje a Nap felé mutatott. E kalibrációt mindkét napkövel elvégezték (A). A B alábra fekete pálcikái a két réskép fényének polarizációirányát szemléltetik [4]

De mi történt akkor, mikor a Napot felhő, köd takarta, vagy a horizont alatt volt? Pszichofizikai kísérleteink szerint [3] ekkor csupán szabad szemmel általában lehetetlen volt a navigációhoz szükséges pontossággal megbecsülni a felhők mögötti vagy a horizont alatti Nap helyét.



2. ábra. Az égpolarizációs viking navigáció négy lépése. (A) Az 1. lépésben a viking navigátor a részlegesen poláros ég két pontját napkövön át nézve két napkő szem előtti forgatásával meghatározta a Nap felé mutató két irányt, amelyeket a napkövekre karcolt piros nyilak jeleznek. (B) A 2. lépésben megbecsülte a két piros nyilon átmenő és azokkal párhuzamos két égi főkör metszéspontját, ami a felhőtől takart Nap szemmel becsült helye. (C) A 3. lépésben megmérte a Nap becsült helyének ökölben és ujjban számolt horizont fölötti θ magasságát (most $\theta = 3$ ököl + 0 ujj). (D) A 4. lépésben az árnyékpálca θ -nak megfelelő (most 3.) lyukát a napiránytű vízszintes tárcsájára merőleges árnyékvető rudacska csúcsára húzva, az árnyékpálca hossz tengelyét a Nap becsült helye felé irányította, majd a tárcsát az árnyékvető függőleges tengelye körül addig forgatta, amíg a tárcsába karcolt tükörszimmetrikus hiperbolikus árnyékgörbe nem érintette az árnyékpálca tárcsán támaszkodó végét. Ekkor az árnyékgörbének a tárcsába karcolt nyíllal jelzett tükörszimmetria-tengelye a földrajzi észak felé mutatott [5–8]

Thorkild Ramskou dán régész 1967-es, széles körben elterjedt teóriája szerint ilyenkor a viking hajósok lineáris polárszűrőkhöz hasonlóan működő napkőkristályokkal határozták meg a nem látható Nap helyét (1. ábra) [4], majd a napiránytűjüket használva tájékozódtak.

A föltételezések szerint, az északi irány meghatározása négy lépésben történt ezen égámpolarizációs viking navigációval (2. ábra): 1) a viking navigátor először két napkővel meghatározta a nem látható Nap felé mutató irányt az ég megfelelően poláros két pontjában (2A. ábra) [5], 2) e két iránnyal párhuzamos, a napköveken átmenő égi főkör metszéspontjaként megbecsülte a nem látható Nap helyét (2B. ábra) [6], 3) az ökleivel és ujjaival megmérte a nem látható Nap horizont fölötti magasságát (2C. ábra) [7], 4) végül egy, a napazimut felé irányított árnyékpálcával helyettesítve a hiányzó napsugár irányát, a vízszintes tárcsát a Nap felé mutató árnyékpálca alatt addig forgatta, amíg a pálca tárcsát érintő alsó vége nem érintette a hiperbolikus árnyékgörbét, s ekkor leolvasta az északi irányt (2D. ábra) [8].

Laboratóriumi és planetáriumi pszichofizikai kísérletekben meghatároztuk e négy lépés hibafüggvényeit bizonyos változók függvényében [5–8], valamint képalakító polarimetriával mértük 1296 különböző időjárási helyzetben a teljes égbolt polarizációfokának és -irányának mintázatait [9–13]. A mindezt bemeneti adatokként használó számítógépes modellezésekkel meg tudtuk határozni, hogy adott időjárási körülmények (napállás és felhőzettség) között mekkora hibával lehet égámpolarizációs viking navigációval meghatározni a tengeri navigációhoz szükséges északi irányt a $60^{\circ} 21' 55''$ északi szélességen [14].

Milyen eséllyel érhatték el a vikingek Grönlandot, és fedezhették föl Amerikát?

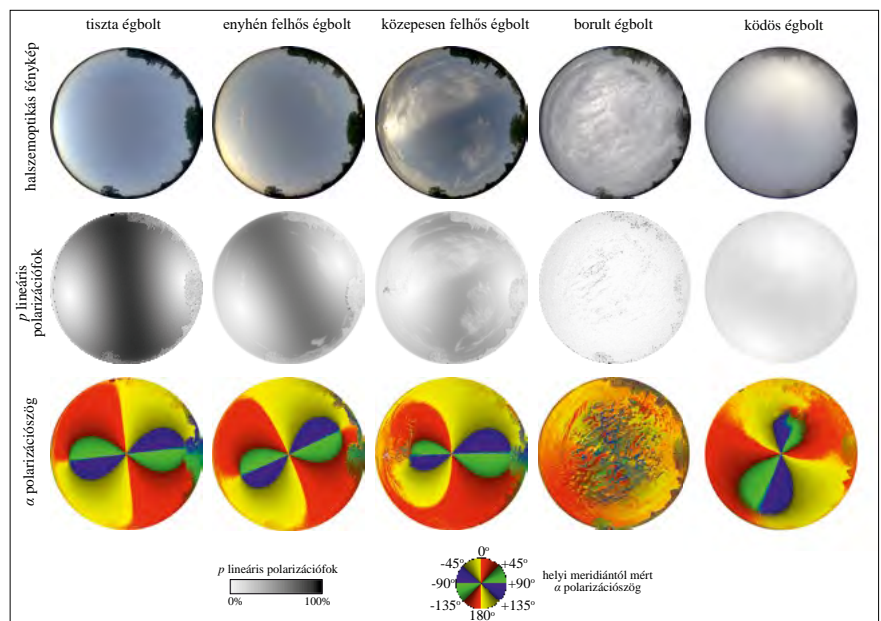
A légkörben szóródó napfény polarizációiránya majdnem mindig merőleges a Napon, a figyelt égponton és a megfigyelőn átmenő szórási síkra, miáltal az égfény rezgéssíkja merőleges az ég figyelt pontján és a Napon átmenő főkörre. Az égfény polarizációirányát a vikingek lineáris polárszűrőkhöz hasonlóan működő napkőkristályokkal (kalcit, kordierit, turmalin) határozhatták meg.

Kutatásunk első részében az égámpolarizációs viking navigáció légköroptikai előfeltételeit derítettük ki a legkülönbözőbb meteorológiai viszonyok között [9–13]. Kiderült, hogy a felhős vagy ködös

ég polarizációirány-mintázata (eltekintve a felhős vagy ködös égtérületek arányának növekedésével és a polarizációfok csökkenésével növekvő zajosságtól) gyakorlatilag megegyezik a tiszta égével, vagyis a Nap azimutirányával együttforgó mintázat tükröszimmetria-tengelye mindig a Napon megy át és a 3. ábra alsó sorában látható zöld-kék nyolcas alakzatok rövidebb (kisebb) része mindig a Nap felé mutat, miáltal elvileg szinte minden meteorológiai helyzetben alkalmas lehetne égámpolarizációs viking navigációra [9–13].

Ha ugyanis az ég két tetszőleges pontjában a vikingek a napkőkristályokkal meghatározták az égfény polarizációirányát (2A. ábra) és meghúzták az e két irányra merőleges két éggömbi főkört (2B. ábra), akkor azok a Nap helyén metsztek egymást. Márpedig az égámpolarizációs viking navigáció alapja a Nap helyének ismerete, mert napsütésben a viking napiránytűvel meghatározható a földrajzi északi irány. Az égámpolarimetriai mérések szerint azonban hiába független az égfény polarizációirány-mintázata a meteorológiai viszonyoktól, a szűk keresztmetszetet az égbolt túl alacsony p polarizációfoka jelentette. Ha p kisebb volt egy p^* küszöbértéknél, akkor a viking navigátor az eget nézve hiába forgatta szeme előtt a napkőkristályt, a poláros égfény szinuszos intenzitásváltozását nem észlelte, így nem volt képes a napkövet a rajta keresztül látott égfényesség valamelyik szélsőértékének megfelelő irányába forgatni, mely helyzetben a napkörre karcolt nyilacska mindig a Nap felé mutatott (1. ábra).

Ekkor kezdődött kutatásunk második része, amiben az égámpolarizációs viking navigáció (ÉVN) négy lépésének sok tesztalanyra átlagolt hibafüggvényeit mértük laboratóriumi és planetáriumi pszichofizikai kísérletek-



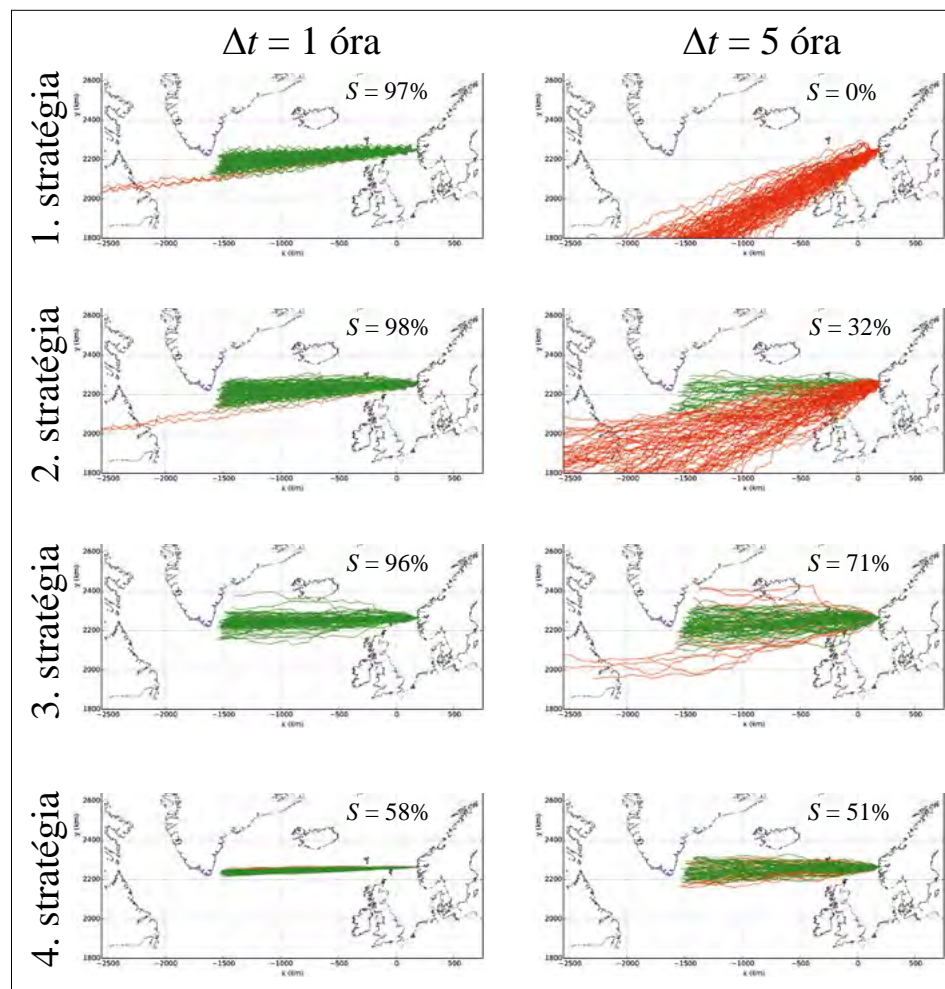
3. ábra. A tiszta ég, valamint az enyhén és közepesen felhős és teljesen borult, továbbá a ködös égbolt halszemoptikával készült fényképei és 180° látószögű képalakító polarimetriával a spektrum kék (450 nm) tartományában mért p lineáris polarizációfokának, valamint a helyi meridiántól az óramutató járásával azonos irányban mért α polarizációs szögének mintázatait [9–13]

ben [5–8]. A mért égipolarizációs adatbázist és a három napkőtípusra mért négy hibafüggvényt számítógépe táplálva, az ÉVN négy lépésében adódó hibák eredőjét meghatározva egy hibaterjedési szimulációs programmal számos különböző éghelyzetre kiszámoltuk, hogy a viking napiránytűvel milyen átlagos hibával és szórással mérhető az északi irány, ha a Nap helyét minden esetben valamely napkőkristállyal mérik. Ezzel arra a szintre jutott a kutatásunk, hogy már ismertté váltak a Norvégia–Grönland útvonal mentén előfordulható tetszőleges felhőfedettségek és napmagasságok mellett az északi irány ÉVN alapján történő meghatározásának hibái há-

rom napkőtípusra és az atlanti-óceáni viking hajózás két fontos dátumára, a tavaszi napéjegyenlőségre (március 20–21.) és a nyári napfordulóra (június 20–21.) [14].

Mindezeket követte egy olyan számítógépes modellezés, amivel az égviszonyoktól, napkőtől és dátumtól függő navigációs irányhibák felhasználásával 36 ezer viking hajóutat szimuláltunk a $60^{\circ} 21' 55''$ északi szélességi kör mentén lévő norvégiai Bergentől a dél-grönlandi Hvarf célállomásig, miközben a navigátornak állandóan a földrajzi nyugati irányt kellett meghatároznia és tartania [14]. Megmutattuk, hogy az ÉVN S hajózási sikere meglepően nagy volt (92–100%) az égfény polarizációirányának meghatározására használt napkőkristálytól és a hajózás dátumától szinte függetlenül, ha a navigátor $\Delta t = 1, 2$ vagy 3 órás navigációs periodicitással határozta meg a tartandó menetirányt, és a hajózás sikeressége csak ennél nagyobb Δt esetén csökkent annyira (1–6%), hogy a vikingek nem érték el Dél-Grönlandot, hanem messze délre elkerülték azt az Atlanti-óceánon, ahova belevesztek, vagy szerencsés esetben ennek köszönhetően fedezhettek fel Amerikát (Kanada észak-keleti részét), jóval Kolumbusz előtt. Ha keleten gyakran határozták meg az északi irányt, akkor a hibák kompenzálták egymást, ugyanis délelőtt a hibák többnyire észak felé térítették el a hajót, délután pedig dél felé [14].

Ezután megvizsgáltuk az ÉVN S hajózási sikerének érzékenységét a releváns hajózási, meteorológiai és navigációs paraméterekre [15]. Arra jutottunk, hogy az ÉVN hajózási sikere érzékeny az éjjeli továbbhajózásra, a navigációs periodicitásra és a hajózási dátumra, míg robusztus (szinte érzéketlen) a napkőtípussal, a felhőzettség változékonyságával és az erősen, közepesen vagy gyengén felhős ég dominanciájával szemben [15].



4. ábra. Norvégia és Dél-Grönland között számítógéppel modellezett viking hajóutak nyári napfordulókra (június 21.) négy különböző navigációs stratégia esetén. 1. Mindig az égipolarizációs viking navigáció (ÉVN) alapján. 2. Napsütésben szoláris viking navigáció (SzVN), felhős időben pedig ÉVN. 3. (SzVN megállás nélkül): napsütésben SzVN, amikor pedig a Napot felhők takarták, akkor folytatták a hajózást a SzVN segítségével meghatározott legutolsó haladási irányban. 4. (SzVN megállással): napsütésben SzVN, amíg pedig a Napot felhők takarták, addig megállt a hajó. Amikor éjjel nem haladt a hajó, nappal a navigátor kalcit napkövet használt $\Delta t = 1$ és 5 óra navigációs periodicitással, $m = 0$ felhődominancia, $\sigma = 2$ felhőváltozékonyság és a tengeralaglak hatását szimuláló 4-es Brown-paraméter mellett. A sikeres (Grönlandot elérő) vagy sikertelen (Grönlandot el nem érő) utak zöldek, illetve pirosak. Minden egyes térkép 1000 hajóutat szemléltet adott Δt és navigációs stratégia esetén, aminek S (%) hajózási sikere a jobb felső sarokban látható. A térképek kék vonala a láthatósági határvonal, ahonnan Grönland délkeleti hegyei már láthatók a viking hajóról. Egy hajóút szimulációja akkor fejeződött be, ha a navigátor megpillantotta Grönland délkeleti partvonalát a pillanatnyi látástávolság mellett, amit a ρ felhőzettség aktuális értéke határozott meg. Ha egy hajóút átment Izlandon vagy Észak-Skócián, akkor azt feltételeztük, hogy a vikingek folytatták útjukat Grönland felé. S kisebb (51%, 58%) értékeinél a zöld hajóutak zöme fedeti a pirosakat, ezért tűnik a sikerráta látszólagosan nagyobbak [16]

Figyelemre méltó, hogy e navigációs módszer pontosságára (sikerére) alig van hatással a felhőzöttség dominanciája és változékonysága.

Legutóbb számítógépes modellezéssel tanulmányoztuk a szoláris (napos) viking navigáció (SzVN) és a kombinált navigáció (SzVN-ÉVN) S hajózási sikerét (4. ábra) [16]. A legvalószínűbb kombinált módszer napsütésben csak a közvetlen napfényt használja (SzVN), míg mikor a Napot felhők takarják, akkor az ÉVN-t. Meghatároztuk az SzVN, az ÉVN és a kombinált SzVN-ÉVN S hajózási sikerét három navigátortípusra (akik a tartandó nyugati hajózási irányt nagy, közepes vagy kis navigációs periodicitással határozták meg), tavaszi napéjegyenlőségkor és nyári napfordulókor, éjjeli továbbhajózással és anélkül, a következő négy navigációs stratégia mellett: 1. (ÉVN: csak égpolárizáció): mindig csak az égpolárizáció alapján. 2. (SzVN vagy ÉVN): napsütésben SzVN, felhős időben ÉVN. 3. (SzVN megállás nélkül): napsütésben SzVN, amikor pedig a Napot felhők takarták, akkor folytatták a hajózást az SzVN segítségével meghatározott legutolsó haladási irányban. 4. (SzVN megállással): napsütésben SzVN, amíg pedig a Napot felhők takarták, addig megállt a hajó.

Azt találtuk, hogy a navigációs periodicitástól függően az S hajózási siker maximalizálása érdekében különböző navigációs stratégiát kell választani. A legnagyobb navigációs siker záloga az égpolárizáció sűrű navigációs periódus melletti használata [16]. Ekkor volt a legnagyobb esély arra, hogy a Norvégia és Grönland közti háromhetes hajóutat túléljék a vikingek.

Végül hangsúlyozzuk, hogy a 15 évig tartó kutatásunk eredményeivel nem azt bizonyítottuk, hogy a vikingek valóban az égpolárizációs módszert használták a navigálásukhoz, csupán arra mutattunk rá, hogy ha igen, akkor milyen eredményesen vagy eredménytelenül tájékozódhattak az időjárástól és egyéb környezeti tényezőktől függően.

A cikkünkben szemlézett kutatási téma eredményeit és azok szintézisét részletesen ismerteti a 174 oldalas [17] könyvfejezet.

Köszönetnyilvánítás

Kutatásunkat az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok „Égbolt-polarimetria a felhők felismerésére és a polarimetrikus viking navigációnak kedvező meteorológiai viszonyok vizsgálatára” című, OTKA K-105054 számú, 2012–2016 (48 hónap) futamidejű pályázata támogatta.

Irodalom

1. Bernáth B., Blahó M., Egri Á., Barta A., Horváth G. (2013): An alternative interpretation of the Viking sundial artefact: An instrument to determine latitude and local noon. *Proceedings of the Royal Society A* 469, 20130021.
2. Bernáth B., Farkas A., Száz D., Blahó M., Egri Á., Barta A., Ákesson S., Horváth G. (2014): How could the Viking sun compass be used with sunstones before and after sunset? Twilight board as a

new interpretation of the Unartoq artefact fragment. *Proceedings of the Royal Society A* 470, 20130787.

3. Barta A., Horváth G., Meyer-Rochow V. B. (2005): Psychophysical study of the visual sun location in pictures of cloudy and twilight skies inspired by Viking navigation. *Journal of the Optical Society of America A* 22, 1023–1034.
4. Bernáth B., Blahó M., Egri Á., Barta A., Kriska G., Horváth G. (2013): Orientation with a Viking sun-compass, a shadow-stick, and two calcite sunstones under various weather conditions. *Applied Optics* 52, 6185–6194.
5. Száz D., Farkas A., Blahó M., Barta A., Egri Á., Kretzer B., Hegedüs T., Jäger Z., Horváth G. (2016): Adjustment errors of sunstones in the first step of sky-polarimetric Viking navigation: Studies with dichroic cordierite/tourmaline and birefringent calcite crystals. *Royal Society Open Science* 3, 150406.
6. Farkas A., Száz D., Egri Á., Blahó M., Barta A., Nehéz D., Bernáth B., Horváth G. (2014): Accuracy of sun localization in the second step of sky-polarimetric Viking navigation for north determination: a planetarium experiment. *Journal of the Optical Society of America A* 31, 1645–1656.
7. Száz D., Farkas A., Barta A., Kretzer B., Egri Á., Horváth G. (2016): North error estimation based on solar elevation errors in the third step of sky-polarimetric Viking navigation. *Proceedings of the Royal Society A* 472, 20160171.
8. Száz D., Farkas A., Barta A., Kretzer B., Blahó M., Egri Á., Szabó G., Horváth G. (2017): Accuracy of the hypothetical sky-polarimetric Viking navigation versus sky conditions: revealing solar elevations and cloudinesses favourable for this navigation method. *Proceedings of the Royal Society A* 473, 20170358.
9. Suhai B., Horváth G. (2004): How well does the Rayleigh model describe the E-vector distribution of skylight in clear and cloudy conditions? A full-sky polarimetric study. *Journal of the Optical Society of America A* 21, 1669–1676.
10. Hegedüs R., Åkesson S., Wehner R., Horváth G. (2007): Could Vikings have navigated under foggy and cloudy conditions by skylight polarization? On the atmospheric optical prerequisites of polarimetric Viking navigation under foggy and cloudy skies. *Proceedings of the Royal Society A* 463, 1081–1095.
11. Horváth G., Barta A., Pomozi I., Suhai B., Hegedüs R., Åkesson S., Meyer-Rochow B., Wehner R. (2011): On the trail of Vikings with polarized skylight: Experimental study of the atmospheric optical prerequisites allowing polarimetric navigation by Viking seafarers. *Philosophical Transactions of the Royal Society B* 366, 772–782.
12. Barta A., Farkas A., Száz D., Egri Á., Barta P., Kovács J., Csák B., Jankovics I., Szabó G., Horváth G. (2014): Polarization transition between sunlit and moonlit skies with possible implications for animal orientation and Viking navigation: anomalous celestial twilight polarization at partial moon. *Applied Optics* 53, 5193–5204.
13. Horváth G., Takács P., Kretzer B., Szilasi S., Száz D., Farkas A., Barta A. (2017): Celestial polarization patterns sufficient for Viking navigation with the naked eye: Detectability of Haidinger's brushes on the sky versus meteorological conditions. *Royal Society Open Science* 4, 160688.
14. Száz D., Horváth G. (2018): Success of sky-polarimetric Viking navigation: Revealing the chance Viking sailors could reach Greenland from Norway. *Royal Society Open Science* 5, 172187.
15. Takács P., Száz D., Pereszlényi Á., Horváth G. (2022): Sensitivity and robustness of sky-polarimetric Viking navigation: Sailing success is most sensitive to night sailing, navigation periodicity and sailing date, but robust against weather conditions. *Public Library of Science One* 17, e0262762.
16. Takács P., Száz D., Pereszlényi Á., Horváth G. (2023): Speedy bearings to slacked steering: Mapping the navigation patterns and motions of Viking voyages. *Public Library of Science One* 18, e0293816.
17. Horváth G. (2024): Chapter 26: Sky-polarimetric Viking navigation: An extended update. pp. 563–737. In: Horváth G. (ed.) (2024): *Polarization Vision and Environmental Polarized Light*. Springer Nature Switzerland AG: Cham, Switzerland.

A KVANTUMMECHANIKAI VALÓSZÍNŰSÉGEKRŐL KÖZÉPISKOLÁBAN

Tóth Kristóf^{1,2}¹Czuczor Gergely Bencés Gimnázium, Győr²Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizikai és Csillagászati Intézet, Budapest

E-mail: tothk0711@gmail.com

Bevezetés

A kvantummechanika egy valószínűségi elmélet, az egyedi mérések biztos eredményét általában nem adja meg, csupán a lehetséges kimeneteket és azok valószínűségeit [1, 2]. Azonban ez a valószínűségi leírás [3, 4] merőben más, mint amellyel az emberiség a 20. századig találkozott. Ezt Einstein így fogalmazta meg: „A kvantummechanika kifejezetten impozáns. De egy belső hangocska nekem azt súgja, hogy még nem az igazi. A teória sokat elárul, de igazán nem visz minket közelebb az »Öreg« titkaihoz. Mindenesetre, meggyőződésem, hogy Ő nem kockajátékos.” [5]. Einstein arra utalt, hogy szerinte a természet rendje nem fér össze a kvantummechanikai véletlen viselkedéssel. Kifejezi, hogy a kvantummechanika felfedezése előtt ismert természeti törvények nem tartalmaztak a belső dinamikából adódó valószínűségeket, a valószínűségek használatát az információhiány és a véges pontosság kényszerítette ki. Éppen ezért természetes elvárás volt, hogy egy isteni kinyilatkoztatással felérő természeti törvény nem tartalmazhat valószínűségeket. A célom az, hogy a kvantummechanikai valószínűségi törvény elkerülhetetlenségét és annak a természet rendjével, az „Öreggel” való összeférhetőségét bemutathassam átlagos 10–11. osztályos diákoknak. Mindezt minimális matematikával, egyszerű fotonpolarizációs gondolat kísérletekkel mutatom be.

A hétköznapi életben előforduló valószínűség

Mielőtt a kvantummechanikai valószínűségekre rátérünk, érdemes elgondolkodni olyan hétköznapi helyzeteken, amelyekben valószínűségeket használunk. Mivel a véletlen viselkedést mutató jelenségek marginális ré-

szt képezik a fizikatananyagnak, a matematikaórán elhangzottakra támaszkodnunk. Egyszerű példa egy összekevert csomag franciakártya. A legfelső lap színének valószínűségét vizsgáljuk, ami vagy piros vagy fekete. Természetesen a diákok tudják, hogy egyenlően $1/2 - 1/2$ a két szín esélye. Miután ezt megbeszéltük, a tanár látványosan megnézi a legfelső lapot úgy, hogy a diákok nem látják annak színét, s a tanár megkérdezi, mekkora a lap piros színének valószínűsége.

A tanár kérdésére a diákok összezavarodhatnak. Egyesek azt fogják felelni, hogy most már biztosan tudják, hogy mi a felső lap színe, ezért nincs szükség valószínűségekre, mások amellet fognak érvelni, hogy mivel ők nem látták a lapot, ismét tippelniük kell. Rövid párbeszéd után a következtetés levonható, a tanár bizonyosan tudja a felső lap színét, a diákok azonban továbbra is $1/2$ -es eséllyel tippelhetnek. Ezt sokan ellentmondással fogadják, ugyanis ugyanazon jelenség egyszerre véletlenszerű is és nem is. Ekkor jutunk el oda, hogy a tanár feltegye a következő kérdést: *miért használtunk a feladat során valószínűségeket?*

Nyilvánvaló, hogy a kártyapakli legfelső lapjának színe a húzás előtt is bizonyosan vagy piros vagy fekete volt, azonban ez az információ az osztály számára rejtve volt, mert a pakli meg volt keverve. Ezért egy diák csak annyit mondhatott, hogy mivel a lapok egyenlő arányban voltak feketék és pirosak, $1/2$ volt az esélye a legfelső lap piros színének. Azért használtunk valószínűségeket, mert nem ismertük a lapok sorrendjét. Ezt követően a tanár feltehet egy újabb kérdést: *na és az „Öreg” tudta a húzás előtt a legfelső lap színét?*

A kérdés persze filozófiai, azonban az „Öregről” alkotott képünk alapján a diákok válaszolhatnak erre a kérdésre. Az „Öregnek” tudnia kell a legfelső lap színét, sőt a lapok sorrendjét is, hiszen az eredendően létezik attól függetlenül, hogy azt mi nem ismerjük. Ha pedig a tanár megleheti a legfelső lapot, akkor azt az „Öregnek” is tudnia kell, hiszen amire egy ember képes, arra az „Öreg” is.

A valószínűség természetének jobb megértése érdekében pénzérmével is kísérleteket végzünk. A legtöbb diák szerint az elejtett pénzérme mindig $1/2 - 1/2$ eséllyel esik a fej és írás oldalára. Ennek megbeszélése után a tanár furfangosan leejt egy pénzérmét úgy, hogy felülete párhuzamos a talajjal, melyre egy puha párnát helyezett, így a pénzérme nem tud elpattanni. A pénzérme az esés



Tóth Kristóf a Czuczor Gergely Bencés Gimnázium matematika- és fizikatanára, illetve az ELTE Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai és Csillagászati Intézetének mestertanára. Doktori fokozatát az ELTE TTK Fizika Doktori Iskolájának Fizika Tanítása Programja keretében szerezte 2025-ben. Hét éve foglalkozik kvantumfizika oktatásával, és ezen a területen folytat nemzetközi együttműködések.

során megőrzi kezdeti „fej” vagy „írás” helyzetét, az eredményt előzetesen ezáltal a teremben egyedülként a tanár tudja. Természetesen a diákok ekkor új kísérletet követelnek a párna használata nélkül. A következő kísérletnél ezért a tanár elveszi a párnát, és elkezd ismételt ejtéseket végezni a felszínhez nagyon közel úgy, hogy a pénzérme felülete továbbra is párhuzamos a talajjal. Először ugyanaz tapasztalható, mint a párnás esetben, ugyanis olyan kicsi az esési magasság, hogy a pénzérme nem képes elpattanni. Majd apránként növelve a pénzérme esési magasságát, továbbra is vízszintes felülettel, egy adott magasság után a pénzérme akkorát tud pattanni, hogy emiatt az ellenkező oldalára fordul. Ekkor a kezdeti „fej” állásból következtethetünk a pénzérme „írásra” esésére, továbbra sincs szükség valószínűség használatára. A magasság további emelésekor azonban megfigyelhető, hogy kezünk remegése és sok más apró bizonytalanság miatt egyre kiszámíthatatlanabbá válik a végkimenetel, mert a pattanás miatti elfordulás kontrollálhatatlanná válik. Hiába próbáljuk tökéletesen ugyanúgy elejteni a pénzérmét, a kimenetel más és más lesz, mert remeg a kezünk. Egy idő után képtelenség megjósolni a pénzérme ejtésének kimenetelét. Elérkeztünk tehát ahhoz a ponthoz, amikor csakis valószínűségekre hagyatkozhatunk: a pénzérme az esetek közel felében fej, közel felében írás oldalát mutatja. Levonható a következtetés, hogy csak néhány különleges esetben volt elkerülhető a valószínűségi jóslat, egy pénzérme egyszeri dobásának kimenetele általában előrejelezhetetlen. Ekkor ismét feltehetünk pár kérdést: *Miért volt mégis bizonyos esetekben elkerülhető a valószínűségi leírás használata? Az esési magasságot növelve miért vész el a biztos jóslás képessége?*

Diákjaink az utóbbi kérdésre azt válaszolhatják, hogy ahogyan emeljük az esési magasságot, a mozgás egyre követhetlenebbé válik, ezért kell valószínűségeket használnunk. A pénzérme szimmetriája kikényszeríti, hogy sok dobás esetén az esetek közel felében fejet dobunk. Einsteint felidézve azonban mondhatjuk azt is, hogy a Természet tudja, hogy a pénzérme milyen oldalt fogja mutatni, a végtelenül pontos „Öregnek” nincs szüksége valószínűségi leíráshoz, mert az Ő keze nem remeg, és már minden dobási stílust eleve ismer. *Az ember kockajátékos, de az „Öreg” nem.* Az einsteini mondat azért is szemléletes, mert érezzük, hogy az „Öreg” azért nem lehet kockajátékos, mert ezzel az emberi végesség (remegő kéz) szintjére alacsonyítanánk.

A statisztikus előrejelezhetőség

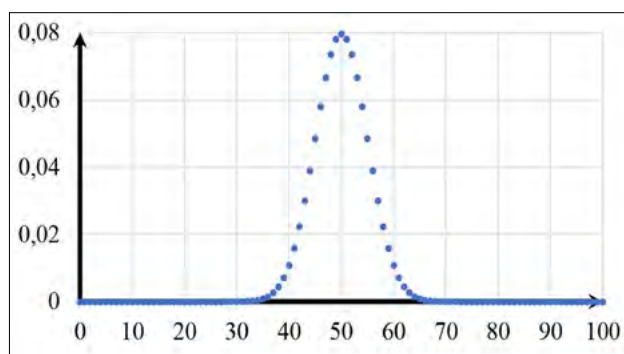
Fontos figyelembe venni a diákok valószínűséggel szemben táplált ösztönös előítéletét. A diákok gyakran negatív érzélemmel tekintenek a valószínűségekre, előítéletük szerint akkor használjuk azokat, amikor valamire nem vagyunk képesek. A valószínűségi leírás az emberek számára szokatlan, életidegen, a hétköznapi szóhasználatban a biztos előrejelezhetőségnek a hiányát fejezi ki. A diákok ezért gyakran téves következtetésre jutnak, mert azt érzik, hogy *ha valamit nem tudunk biztosan, akkor*

nem tudunk semmit sem. Fontos azonban megmutatni, hogy a statisztikai előrejelzés minőségileg magasabb szintű, mint a nem tudás.

A valószínűségi leírással kapcsolatban egy fontos törvény, hogy nagyszámú ismételt mérés együttes viselkedése nagy pontossággal adható meg [6]. A nagyszámú ismételt mérés a pénzérme példáján kétféleképpen valósítható meg: vagy egyszerre dobunk fel nagyszámú és teljesen *azonos* pénzérmét (a pénzérmék nem hatnak kölcsön), vagy egy *egyedüli* pénzérmét dobunk egymás után nagyon sokszor. Ekkor bár az egyedüli dobások kimenetelei bizonytalanok, a dobások együtt kollektív viselkedést mutatnak: a sok dobás során a pénzérmék közel fele fej, közel fele írás lesz.

Fel kell azonban készülnünk, hogy lesznek elégedetlenek a tanteremben. Hiszen miért ne következhetne be, hogy sok dobás esetén mindegyik eredménye fej lesz, melynek valószínűsége kicsi, de nem nulla? A diákok ki tudják számolni, hogy annak az esélye, hogy 100 pénzérméből mindegyik fej lesz: $1/2^{100} = 1/(2^{10})^{10} \approx 1/1000^{10} = 10^{-30}$, amiből láthatjuk, hogy egy ilyen dobássorozat olyan kicsi valószínűségű, hogy gyakorlatilag sohasem fog bekövetkezni, akármeddig próbálkozunk is.

Az 1. ábra azt mutatja, hogy 100 eldobott pénzérméből mekkora a valószínűsége (függőleges tengely) annak, hogy adott számú fejet dobunk (vízszintes tengely). A legvalószínűbb az 50 fej, továbbá szinte biztosan állítható az is, hogy legalább 40 és legfeljebb 60 fejet dobunk, mert a többi dobássorozat olyan kicsi valószínűségű, hogy bekövetkezése reménytelen. Amit a példából láthattunk, az általánosan is megmutatható: A fejek száma várhatóan $N/2$, az ettől való eltérés viszont várhatóan $\sqrt{N}/2$, tehát, szemléletesen, az 1. ábrán látható görbe egyre keskenyebbé válik, ahogy növeljük a dobások számát. Általános esetben ezt a *nagy számok törvénye* mondja ki. Ez a 100 pénzérme esetén a várható 50-től való körülbelül 5 pénzérményi bizonytalanság.

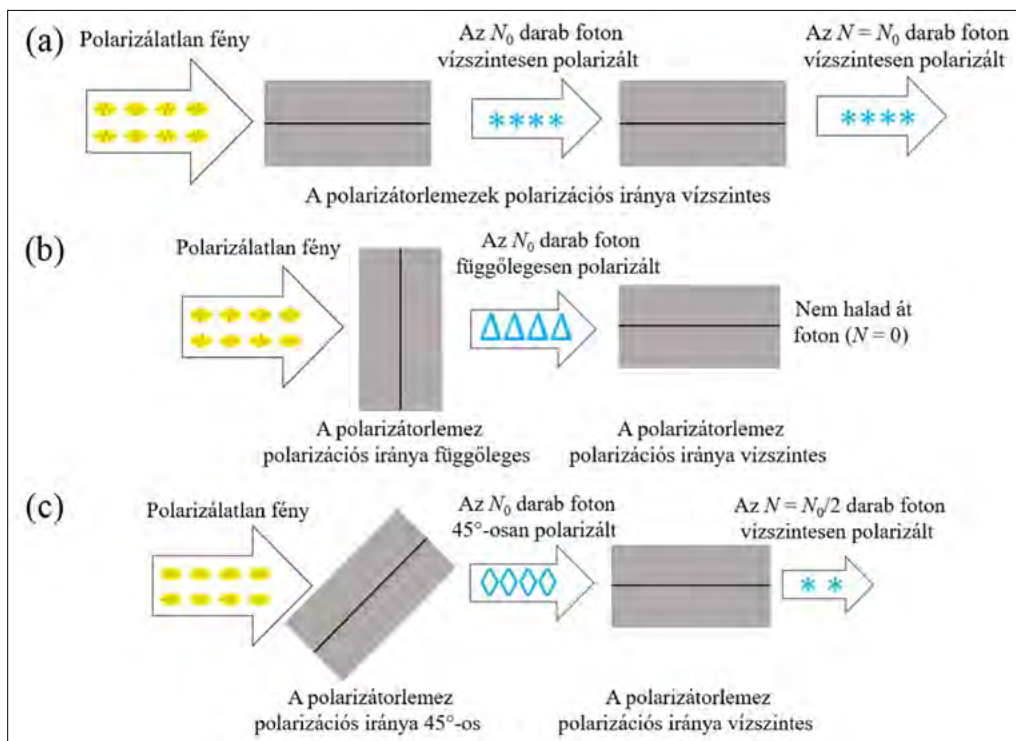


1. ábra. 100 feldobott pénzérme esetén a kapott fejek számának valószínűségi eloszlása. Az x fej dobásának valószínűsége 100 érméből $\binom{100}{x} \cdot 0,5^{100}$. Az ábra Excelben készült, az ábrázolt görbe ismerős, speciális binomiális eloszlást mutat, amiről már csak az érdeklődőbb, felkészültebb diákoknak beszélhetünk

Eredményünk a világ egyik legmélyebb törvénye: *a véletlen folyamatok esetén is van, ami előrejelezhető*, a nagyszámú ismételt mérés esetén az egyes kimenetek száma nagy bizonyossággal megjósolható. Minél több

Eset	Kísérlet	Sematikus rajz
a)		<p>Polarizálatlan fény</p> <p>Az I_0 intenzitású fény vízszintesen polarizált</p> <p>A vízszintes polarizátorlemezén áthaladó fény intenzitása $I = I_0$ marad, polarizációja nem változik</p>
b)		<p>Polarizálatlan fény</p> <p>Az I_0 intenzitású fény függőlegesen polarizált</p> <p>A függőlegesen polarizált fény nem halad át ($I = 0$) vízszintes polarizátorlemezén</p>
c)		<p>Polarizálatlan fény</p> <p>Az I_0 intenzitású fény 45°-osan polarizált</p> <p>A vízszintes polarizátorlemezén áthaladó fény intenzitása a felére csökken ($I = I_0/2$), polarizációja vízszintesre változik</p>

2. ábra. Polarizátorlemezekkel elvégzett kísérletek és az azokhoz kapcsolódó sematikus ábrák. A kísérletek során a polarizátorlemezeket egy asztalra helyeztük, így a (másodlagos) fényforrás, az asztal és a polarizátorlemez felülnézetből láthatóak. Ezért a sematikus ábrán a 45°-os irányú polarizátorlemez tükörzve látjuk a kísérleti ábrához képest. Az ideális polarizátorlemezre eső fénynyalábot polarizáljuk, amelynek intenzitása I_0 lesz. Ha ez áthalad egy másik a) vízszintes; b) függőleges vagy c) 45°-os polarizátorlemezén, akkor a fénynyaláb polarizációja és fényintenzitása is általában megváltozik. A mérések alapján, ha a polarizáció 45°-ot fordul el, akkor a fényintenzitás a felére csökken. A fénynyaláb intenzitását a nyíl élénksége, a polarizációját a benne található szakasz iránya jelzi



3. ábra. A különböző polarizációs kísérletek eredménye fotonképben. A nagy számban érkező fotonok polarizációjára különböző szimbólumokat vezetünk be. Ezt a jelölést a polarizációs tananyagot először bemutató [7] anyaghoz híven emeltünk át. A vízszintesen polarizált fotonokat *gal, a függőlegesen polarizált fotonokat Δ -gel, a 45°-osan polarizált fotonokat \diamond -szal jelöltük

pénzermét használunk, annál biztosabbak lehetünk, hogy hány fejet fogunk dobni. Ez egy törvény, objektív eredmény, mely pozitív felhangot ad a valószínűségi leírásnak. A valószínűség minőségileg magasabb szintű, mint az egyedüli események sorozata, ezzel eloszthatjuk diákjainkban a valószínűségi megközelítésekkel kapcsolatos aggályokat. Éppen ezért az einsteini gondolat a következőképpen szól: *az ember csak az egyedüli dobások szintjén kockajátékos, az „Öreg” azonban még ott sem.* Vajon a kvantummechanikában mi a helyzet?

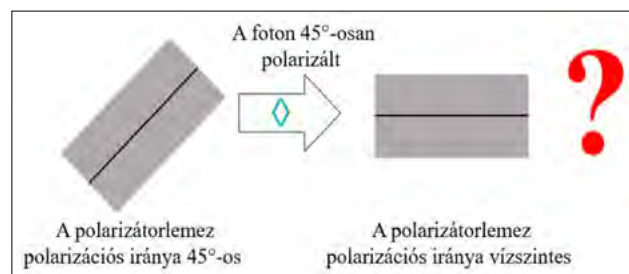
Valószínűség a kvantummechanikában

Az alábbiakban a pénzermék dobásához hasonló, középiskolások számára is jól érthető, később kvantummechanikai vonatkozásúvá tehető példát láthatunk [7–9]. A klasszikus fizikai kísérleti tapasztalatok alapján, ha egy polarizált fénynyaláb egy polarizátorlemezre esik, akkor annak polarizációja általában megváltozik, miközben fényintenzitása csökken. A fényintenzitás-csökkenést leíró szabályt nevezzük Malus-törvénynek, melyre vonatkozó számszerű méréseket a 2. ábra mutat be. Ezeket egy mobiltelefonnal és polarizátorlemezekkel könnyedén ellenőrizhetjük.

A jelenség leírásához viszont hozzá kell vennünk azt a Planck és Einstein nevéhez köthető felfedezést, hogy a fény elemi, *oszthatatlan* adagokból (kvantumokból), ún. fotonokból áll, melyek egymástól *megkülönböztethetetlenek*. Ekkor (egyszínű fény esetén) a fényintenzitás arányos a fotonok számával, tehát a 2. ábrában összefoglalt kísérleti tapasztalatokat megfogalmazhatjuk N fotonszámra is, ezt mutatja be a 3. ábra különböző szimbólumok használatával.

Ezt követően izgalmas kérdés, vajon mi történik akkor, ha a fényforrás helyett *egyfoton-forrást* használunk, amely képes arra, hogy egyszerre csak egyetlen foton bocsásson ki. Ekkor nagyon alacsony a fényintenzitás, ezért a 3. ábrának megfelelően a következőket mondhatjuk:

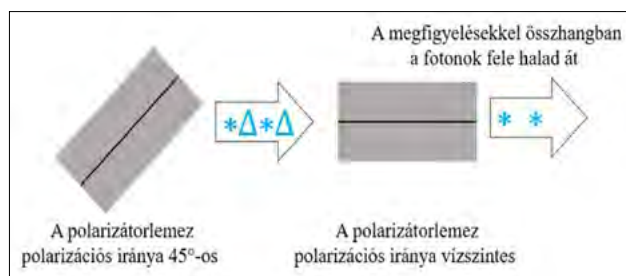
- A foton biztosan áthalad a polarizátorlemezen.
- A foton biztosan elnyelődik a polarizátorlemezen.
- A foton fele halad át és fele nyelődik el. Ez ellentmond a fotonok oszthatatlanságának. Hogyan lehetne feloldani ezt az ellentmondást (4. ábra)?



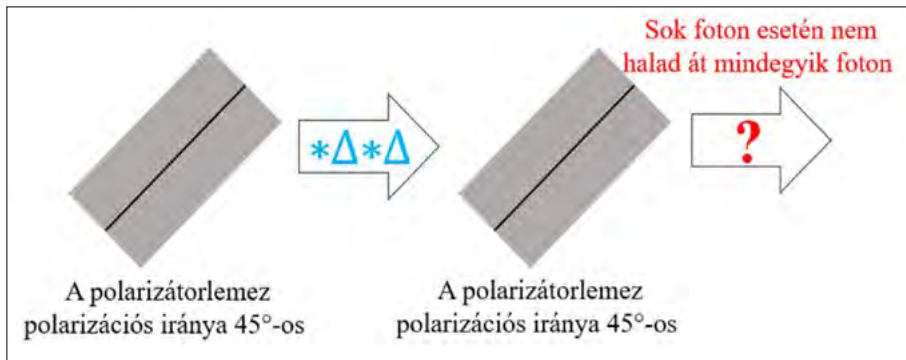
4. ábra. A Malus-törvény érvényességi körét bemutató gondolatkísérlet. Egyfoton-forrás esetén, amikor csak egyetlen foton bocsátunk egy polarizátorlemezre, a Malus-törvény nem lehet helyes, ugyanis sérülne a fotonok oszthatatlansága

Úgy látszik, a klasszikus, óriási számú fotonra vonatkozóan felfedezett Malus-törvény egyetlen foton esetén csődöt mond, elértünk a törvény érvényességi határához (4. ábra). Ekkor Bohr szellemében, a *korrespondencia-elvnek* megfelelően érdemes eljárni, azaz úgy kell a jelenséget újraértelmezni, hogy az nagyon nagy fotonszámra visszaadja a Malus-törvényt. Az osztályban való párbeszéd során el lehet vezetni a diákokat arra, hogy egyikük szájából elhangozzon a helyes megfejtés: a Malus-törvény a fotonok áthaladásának *valószínűségét* adja meg. Mivel a fotonok megkülönböztethetetlenek, az ismétlődő, egyedüli fotonok mérése megegyezik az együttesen érkező nagyszámú foton méréseivel. Azaz a 4. ábrának megfelelően egy vízszintes polarizációs irányú polarizátorlemezre bocsátott, rá 45°-osan polarizált foton 1/2-es valószínűséggel halad át. Ez a nagy számok törvényének értelmében, sok fotonra biztosan visszaadja a Malus-törvényt, mely szerint a fotonok fele halad át. Ezt egy számítógépes szimulációval is ellenőrizhetjük [10, 11], ahol a detektált fotonok száma természetesen összhangban áll a fentiekkel. Kiemeljük, hogy egy 10 W-os fényforrásból másodpercenként nagyságrendileg $N = 10^{19}$ foton lép ki [12]. Ekkor legfeljebb körülbelül $\sqrt{N} = 10^9$ fotonnyi eltéréseket tapasztalhatunk. Ez mérhetetlenül kicsi, $\sqrt{N}/N = 0,00000001\%$ -os relatív ingadozás.

Azt láthatjuk, hogy a nagy számok törvénye a biztosítóka a korrespondencia-elvnek: a valószínűségi módon leírható fotonok viselkedése egyértelműen előrejelezhető. *A nem valószínűségi leírás (nagy fényintenzitás) mellett mindenképpen megjelenik a valószínűség (az egyedüli fotonok esete).* Felmerül a kérdés, hogy mi az oka annak, hogy valószínűségeket kell használunk a fotonok leírására. Ennek vizsgálata érdekében két hipotézist állítunk fel. Ezek a hipotézisek a diákok lehetséges tévképzeteit is tükrözik, így ezek megbeszélése segíti a diákok megértését. Fontos, hogy ebben a két hétköznapi szemléletünkbe illeszkedő hipotézisben a fotonokat egymástól megkülönböztetjük, és egyedi tulajdonságokkal ruházzuk fel. Az egymástól megkülönböztetett, különálló fotonokra egyedi fotonként hivatkozunk.



5. ábra. A statisztikus keveredés hipotézise. A statisztikus keveredés hipotézise alapján az egyedi fotonok sorsa már a polarizátorlemezeztől esés előtt eleve elrendelt, ezért azok már eleve vízszintesen vagy függőlegesen polarizáltak voltak, azonban nekünk – a hipotézis szerint – nincs módunk arra, hogy kiderítsük, egy adott foton előzetesen milyen polarizációjú volt



6. ábra. A statisztikus keveredés hipotézisét cáfoló gondolatkísérlet sematikus ábrája. Tudjuk, hogy a 45°-osan polarizált fény teljes hányada áthalad egy neki megfelelő 45°-os irányú polarizátorlemezen. Ha a 45°-osan polarizált fény csak vízszintesen és függőlegesen polarizált egyedi fotonokból állhatna, akkor mind a vízszintesen, mind a függőlegesen polarizált fotonoknak csak a fele haladna át, amely ellentmond a kísérleti tapasztalatainknak

A kártyapakli-hipotézis: a statisztikus keveredés

A statisztikus keveredés hipotézise a jól megkevert kártyapaklival analóg. A kártyapakli legfelső lapja kétféle színű lehet, vagy piros vagy fekete, azonban nekünk erről nincs tudomásunk. A megkevert pakli elméletét az egyedi, immár *megkülönböztetett* fotonokra is átültethetjük. Alkossunk hipotézist a 4. ábrán látható polarizációs mérés leírására! Tegyük fel ebben a hipotézisben, hogy az egyedi fotonok csak kétféleképpen lehetnek polarizáltak, vízszintesen és függőlegesen. Ez felel meg a piros és a fekete kártyalaplaknak, és ez meghatározza, hogy a vízszintes (vagy függőleges) polarizátorlemezen a foton biztosan áthalad-e, vagy pedig biztosan elnyelődik. Viszont mi nem tudjuk, hogy az egyedi fotonok melyik polarizációval rendelkeznek.

Tegyük fel, hogy 45°-osan polarizált fotonok esnek egy vízszintes irányú polarizátorlemezre, az 5. ábránál megfelelően. A fenti hipotézis szerint a 45°-osan polarizált fényt nem alkotják 45°-osan polarizált egyedi fotonok, mert feltevésünk szerint az egyedi fotonok csak függőlegesen vagy vízszintesen lehetnek polarizáltak. Ekkor a 45°-osan polarizált fény vízszintesen és függőlegesen polarizált egyedi fotonok egyenlő arányú keveréke. A korábban bevezetett szimbólumokkal ezt az alábbi jelöléssel fejezzük ki: $\diamond\diamond\diamond = *\Delta*\Delta$. (Más polarizáció esetén csak a szükséges arányt kell megadni.) Az 5. ábra szerint ez a hipotézis az óriási fotonszámú megfigyelésekkel összhangban van.

A statisztikus keveredés hipotézisét azonban egy egyszerűen gondolatkísérlettel cáfolhatjuk. Ezt a fotonnyalábot bocsátjuk egy neki megfelelő 45°-os irányban álló polarizátorlemezre. Ekkor a Malus-törvény értelmében a fénynek teljes hányadában át kellene haladnia, azonban a függőlegesen (és vízszintesen) polarizált egyedi fotonoknak csak a fele haladna át. Így ellentmondásra jutottunk, nem állhat elő a 45°-osan polarizált fény a vízszintes és függőleges egyedi fotonok statisztikus keveréként (6. ábra).

A 45°-osan polarizált fotonnyaláb léte meglepő és a kvantummechanikában ezek kapcsán tárható fel a valószínűségi leírás szükségessége. A pénzérme vagy a kártyalap nem lehet „45°-osan polarizált”.

A második hipotézis: előírt polarizációs lehetőségek

Az előző, téves hipotézis során a fotonok kimenetele elrendelt volt, a valószínűségi leírást is-

merethiányunk okozta volna. Egy adott (vízszintes irányú) polarizátorlemezre vonatkozó biztos áthaladás és biztos elnyelődés tulajdonságát ruháztuk rá a 45°-osan polarizált fotonokra, fele-fele arányban. Ebben az új hipotézisben ezt úgy módosítjuk, hogy együttesen több polarizátorlemezen való biztos áthaladás tulajdonságát is hozzárendeljük az egyedi fotonokhoz. Minden egyes kibocsátott 45°-osan polarizált fotonnak két tulajdonsága van együttesen. Mindenképpen rendelkeznek a 45°-os irányú polarizátorlemezen való biztos áthaladás tulajdonságával, sőt, ezenfelül az egyedi fotonok egyik fele rendelkezik a vízszintes polarizátorlemezen való biztos áthaladás, másik fele a biztos elnyelődés tulajdonságával is. Így az előző hipotézis cáfolata elkerülhető, mert maga a cáfoló kísérlet immár a valósággal megegyező eredményt ad: a 45°-osan polarizált fotonok teljes hányadukban áthaladnak a 45°-os irányú polarizátorlemezen. S mivel mi nem ismerjük, melyik foton milyen tulajdonságú, ez lenne az oka valószínűségi leírás szükségességének.

Ez a hipotézis is könnyedén cáfolható. Ha a vízszintes és a 45°-os irányú polarizátorlemez egymás után helyezük, akkor a kísérletek alapján azok sorrendjétől függően változik a végeredmény, ellenben a hipotézis szerint a fotonoknak várhatóan a fele haladna át mindkét esetben a két polarizátorlemez által alkotott rendszeren. A kísérletek azt mutatják, ha a fényforrást először a 45°-os irányú, majd a vízszintes irányú polarizátorlemez követi, akkor várhatóan a fotonok fele halad át a rendszeren. Ha előbb van a vízszintes irányú polarizátorlemez, akkor azonban várhatóan csak a fotonok negyedrésze halad át. Ezzel cáfoltuk a második hipotézist is.

A fenti két hipotézis cáfolásával kimutattuk, hogy a klasszikus szemlélet ellentmondásra vezet a kvantummechanikában.¹ Azt a következtetést vonhatjuk tehát

¹ A vizsgált két hipotézisben megkülönböztettük a fotonokat és tulajdonságokkal láttuk el őket. Ez az ún. rejtett paraméterek problémakörének két példája. Megjegyezzük, hogy ezek a példák nem alkalmasak a rejtett paraméterek létezésének cáfolatára. Kicsit bonyolultabb rejtett paraméteres ötlet (például, ahol a rejtett paraméter az egymást követő polarizátorok sorrendjétől is függően kódolná az áthaladást és elnyelődést) nem lenne kizárható ilyen egyszerű szituációban.

le, hogy a fotonok véletlenszerű viselkedése és a fotonok egymástól *megkülönböztethetlensége* természeti törvény.

A kvantumos valószínűségek oka: a szuperpozíció elve

Az előzőek alapján kimondhatjuk: léteznek 45°-osan polarizált teljesen azonos fotonok, és a velük kapcsolatos vízszintes és függőleges polarizátorlemezekkel végrehajtott mérések teljesen véletlenszerű eredményt adnak, a mikrovilágban valószínűségi törvény van érvényben. A 45°-osan polarizált egyedüli fotonok magukban hordozzák az áthaladás és elnyelődés lehetőségét is. Azt mondjuk, hogy egy ilyen foton a túlélés és elhalás egyenlő arányú *szuperpozíciójában* van. Ez egy olyan állapota a fotonnak, amelyhez hasonló a kártya esetében nem létezik, a kártyapakli legfelső lapja eredendően vagy piros vagy fekete. Nincs olyan kártyalap, amely a fekete és a piros szín szuperpozíciójában lenne. A fotonok esetében *a valószínűségek oka a fotonok megkülönböztethetlensége és a szuperpozíció ténye*, és nem az információhiány.

Fontos kiemelni, hogy a valószínűség a kártyapakli példájában egyfajta hiányosságot, a tudás hiányát fejezte ki. A kártyapaklis példában a tanár tudta, mi a legfelső lap színe, azonban mivel ezt a diákokkal nem osztotta meg, nekik valószínűséget kellett használniuk. A kártyalapok esetében az „Öreg” nem volt kockajátékos, nem teremtett olyan törvényeket, amelyek a véletlen alapulnak, hiszen a valószínűség emberi végességünkből fakadt. Fontos, hogy a fotonok esetében megjelenő szuperpozíció nem valaminek a hiánya, hanem éppen ellenkezőleg, azt mutatja, hogy a világ sokkal színesebb, mint azt a klasszikus tapasztalatokból gondolhatnánk. Összehasonlítva a kártyalapokkal, habár a fotonok megkülönböztethetetlenek, mégis változatosabbak, mert az áthaladásnak és elnyelődésnek megfelelő polarizációs tulajdonságokon felül végtelen sok más polarizációs választás is van. Sőt, a fotonokon elvégzett mérések kimenetelei is változatosabbak, mint a kártyalapoknál: amíg a kártyalapok „mérése” azok eredeti színének feltérképezésére szolgál, a fotonok esetében a mérés aktív szerepet tölt be, mérhetek olyan polarizációt is, amivel a fotonok a mérés előtt nem is rendelkeztek (a kvantumos mérés hatása). A 45°-osan polarizált foton például vízszintesen polarizálttá válik bizonyos valószínűséggel. Ha a kvantummechanikában a szuperpozíció mögött megbúvó lehetőségekre figyelünk, akkor az atomi méretek jelenségei egy bővebb, színesebb világot hordoznak, melyhez képest a klasszikus fizika korlátozottnak tűnik. A fotonok szuperpozíciója felhasználható természeti törvényeken alapuló titkosításokra, mert a lehallgató fél „nyomot” hagy (a megfigyelés hatása), illetve a kvantumszámítógépek a szuperpozíció segítségével bizonyos algoritmusokat gyorsabban oldanak meg. A kvantummechanikában Einstein gondolatára ezért a következőt felelhetjük. Miért is ne lenne az „Öreg” kockajátékos? Miért teremtett volna az „Öreg” olyan korlátozott világot, melyben meg-

foszt minket a szuperpozíció csodálatos lehetőségétől? Azt kell tehát mondjuk: *az „Öreg” igenis szeret kvantumkockával játszani, sőt talán éppen ez a kedvenc játékszere.*

Konklúzió

A mai korban a statisztikus megközelítés megkerülhetlenné vált; mindeközben a laikusok életidegennek érzik azt. Éppen ezért szükséges a statisztikus szemlélet kialakításával foglalkozni a 21. század iskolájában. A kvantummechanika tanítása pedig segíti a diákok statisztikus gondolkodását is. Bemutattam, hogy a klasszikus, biztos jóslatot adó Malus-törvény mögött valószínűségek húzódtak meg. Azonban ez nem okoz ellentmondást, mert a valószínűségi leírás pontosan előrejelezhető kollektív viselkedésre vezet.

Ezt követően próbáltuk megérteni a kvantummechanikai valószínűség okát. Az einsteini stílusban megfogalmazott „az Öreg nem vet kockát” mondat a valószínűségek klasszikus természetén alapulva azt a belső emberi hitet mondja ki, hogy a valószínűség emberi végességünk következménye, így az „Öregnek” nincs szüksége valószínűségekre. Einstein a bevezetőben említett gondolata nemcsak egy tudománypezsdítő gondolat volt, hanem megfogalmazta a makroszkopikus létünkben következő, ösztönös előítéletünket is [14].

Ezt követően két hétköznapi szemléletünkbe illő hipotézis vizsgálatával mutattuk ki a belőlük következő ellentmondást és mutattunk rá a kvantummechanikai valószínűség okára, a szuperpozíció elvére. A kvantummechanikai egyedüli mérések bizonytalansága ugyanis abból következik, hogy lehetőség van szuperpozícióra. Átérezhettük, hogy a fotonok változatosabb viselkedést mutatnak, mint a pénzérmék vagy kártyalapok. Ismeretterjesztő szinten azt is bemutatathatjuk, hogy napjainkban a második kvantumos forradalom (a kvantuminformáció-elmélet megszületése) a szuperpozíciót felhasználva teremt az emberiség számára új lehetőségeket. A 2022-es Fizikai Nobel-díj [15] említése erős bizonyíték arra, hogy elfogadjuk a valódi, belső dinamikából adódó véletlenek létét.

Tanítási tapasztalataim

A cikkben felvázolt tanítási ötletek a kvantumfizika fotonpolarizációs megközelítésén alapuló, online letölthető disszertációmban megtalálható oktatási útba beépíthetők [16]. Amíg a hagyományos, iskolai oktatás során a kvantumfizikai valószínűségek csupán közlés szintjén jelennek meg, addig a fotonpolarizációs megközelítésben a diákok a valószínűségi leírást *felfedezik*, majd ezzel *előrejelzéseket tesznek*, végül elgondolkoznak *a valószínűségek okán*. A fotonpolarizációs anyagban a valószínűségi leírás a lehető legegyszerűbb, mert két, diszkrét kimenetelre vezet. Tapasztalataim alapján a teljesen átlagos diákok is képessé válnak alapvető statisztikai gondolatok megértésére és kiszámolására. Sok diákom-

tól azt a visszajelzést kaptam, hogy fizikaórán értették meg az alapvető statisztikai fogalmakat, mert konkrét példákon és számítógépes szimulációkon keresztül gyakoroltuk azokat.

A modern oktatási anyagok nem csupán az ismeretek átadására, hanem a diákok fejében lévő képzetekre is reflektálnak. A cikkben bemutatott két hipotézis nem öncélú, hanem tipikus tanulói gondolatokat és képzeteket cáfol meg. Ezek a tanulói képzetek sok esetben nem pontosan a cikkben leírtak szerint jelennek meg, hanem ezekre visszavezethető, naiv képzetekként. Ennek oka, hogy a diákokat Einsteinhez hasonlóan zavarja az elvi okokból való bizonytalan tulajdonságok léte, még ha ezt önmagukban nem tudatosították is. Gyakori az a gondolat, hogy csupán a kísérletező nem rendelkezik elég információval a fotonokról, a fotonok sorsa eleve elrendelt. Rövid párbeszéd után eljuthatunk oda, hogy a diákok a statisztikus keveredés hipotézisét maguktól megfogalmazzák mint belső, ösztönös képük megnyilvánulását. Azt tapasztaltam, hogy a cikkben bemutatott hipotézisek cáfolata erős hatást gyakorol világgépükre.

A diákok számára a kvantumfizika egyik legnehezebben megérthető vonása a klasszikus mozgás hiánya, amelyről e cikk nem ejtett szót, az érdeklődő Olvasó a disszertációmban találhat erre vonatkozó részleteket [16]. A klasszikus mozgás képe annyira megszokott, hogy attól a diákok nagyon nehezen válnak meg. Károlyházy Frigyes gondolata, miszerint „A tudományos gondolkodás végérvényesen kinőtte az idegrendszer ösztönös tudását. Már a kutyának is van valamilyen »képe« [...] a világról. Félreugrik a feléje hajított kő elől, jelezve, hogy »tisztában van Newton első axiómájával.«” [19] nagyon erősen megragadja a tanulók gyenge pontját, és a kvantumfizikai oktatás egyik legnehezebb küldetését. Ha azonban egy kettőstörő kalcitkristályos kísérletben (vagy bármilyen polarizációs interferométerben) a fotonok térbeli elhelyezkedése és polarizációja közötti összefüggést vizsgáljuk, akkor a biztos térbeli elhelyezkedéshez biztos polarizáció tartozik. Ha tehát a diákok ragaszkodnak a klasszikus mozgás képéhez, akkor azzal a bizonytalan polarizációs tulajdonságokat is ki kell zárniuk. Ez viszont visszavezethető valamelyik naiv rejtett paraméteres hipotézisre, amelyet a cikk bemutatott. A diákokban tehát létrejön egy kognitív disszonancia, amely elősegíti a fogalmi váltást.

Páneurópai, nagymintás, statisztikai módszereken alapuló oktatáskutatásaink azt mutatják, hogy a fotonpolarizációs megközelítés tűnik az egyik legerősebb oktatási anyagnak a fogalmi megértés szempontjából. Az így tanuló középiskolás diákok szignifikánsan felülmúlták a hagyományos módon tanulókat, sőt más kétállapotú kvantumrendszerek segítségével tanuló diákcsoportokat is [17, 18]. Véleményem szerint a fotonpolarizációs oktatási út kiemelkedő előnye arra vezethető vissza, hogy nem a klasszikus mozgás a központi, elsődleges elem, hanem a polarizáció. Így egy klasszikusan kevésbé rögzült és „terhelt” ismeretre építünk. Ebben a megközelítésben

a diákok jóval könnyebben fogadják el és értik meg a kvantumfizika vonásait.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőimnek Cynolter Gábornak és Tél Tamásnak a sok hasznos beszélgetésért. Hálás vagyok a bíráló kimagaslóan alapos munkájáért és javító gondolataiért. A cikk a Kulturális és Innovációs Minisztérium EKÖP-25 kódszámú egyetemi kutatói ösztöndíj programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Irodalom

1. Simonyi Károly (1978): A fizika kultúrtörténete, a kezdetektől a huszadik század végéig. Gondolat Kiadó, Budapest.
2. Nagy Károly (2001): Plancktól Heisenbergig. Werner Heisenberg születésnapjának 100. évfordulójára. *Fizikai Szemle*, 51/12 381–386.
3. Rényi Alfréd (1995): Levelek a valószínűségről. Typotex Kiadó. Budapest.
4. Tél Tamás (2012): Milyen tudomány a fizika? *Természet Világa*, 143, CLXXVII–CLXXXI.
5. Wikidézet: Albert Einstein. https://hu.wikiquote.org/wiki/Albert_Einstein [Utolsó letöltés: 2023.08.03.]
6. Eisenbud L. (2007): The conceptual foundations of quantum mechanics. AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, RI, USA.
7. Michelini M., Ragazzon R., Santi L., Stefanel A. (2000): Proposal for quantum physics in secondary school. *Physics Education*, 35(6), 406–410.
8. Tóth Kristóf (2021): A kvantum-határozatlanság a kvantummechanika fénypolarizációs modelljében. *Fizikai Szemle*, 71/10, 349–355.
9. Tóth Kristóf (2021): Modell kvantummechanika középiskolában. *Fizikai Szemle*, 71/6, 209–214.
10. JavaQuantumMechanics (JQM) https://www.fisica.uniud.it/URDF/secif/mec_q/java_en3/jqm.htm [Utolsó letöltés: 2023.08.03.]
11. QuantumFlyTrap <https://quantumflytrap.com/> [Utolsó letöltés: 2023.08.03.]
12. Fizika emelt szintű írásbeli érettségi vizsga. Harmadik rész, 4. feladat. (2012. május).
13. Michelini M., Stefanel A. (2004): Fisica Quantistica, una proposta per la didattica. [Kvantumfizika, tanítási javaslat]. Università di Udine, Litho Stampa, Udine.
14. Károlyházy Frigyes (1976): Igaz varázslat. Gondolat, Budapest.
15. Asbóth János (2022): A 2022. évi Nobel-díj: a kvantumösszeffüggés, a „kísérteties távolhatás” kísérleti igazolása. *Fizikai Szemle*, 72/11, 341–346.
16. Tóth Kristóf (2025): Kvantummechanika középiskolában: bevezetés a kvantumszámításokba. Doktori disszertáció. ELTE TTK, Fizika Doktori Iskola, Fizika Tanítása Program. Budapest. https://fiztan.phd.elte.hu/kozkinccs/doktorik/ertekezések/Toth_Kristof_Doktori_ertekezés.pdf [Utolsó letöltés 2025.12.01.]
17. Bitzenbauer P., Faletič S., Michelini M., Tóth K., Pospiech G. (2024): Design and evaluation of a questionnaire to assess learners' understanding of quantum measurement in different two-state contexts: The context matters. *Physical Review Physics Education Research*, 20(2), 020136.
18. Tóth K., Faletič S., Michelini M., Pospiech G., Betti A., Nicolini M., Parmiggiani M., Veith J., Bitzenbauer P. (2025): Investigating the effect of two-state approaches on students' understanding of quantum measurement: A quasiexperimental field study. *Physical Review Physics Education Research*, 21(2), 020142.
19. Károlyházy Frigyes (2007): Az öcskös felesége. *Fizikai Szemle*, 2007/11, 189.

A KAOTIKUS MOZGÁS TANÍTÁSA – AKÁR ÁLTALÁNOS ISKOLÁBAN

Jánosi Dániel^{1,2,®}, Jánosiné Kemenczei Edina^{1,3,#}

¹Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék, Budapest

²HUN-REN Földfizikai és Űrtudományi Kutatóintézet, Sopron

³Lónyay Utcai Református Gimnázium, Budapest

®E-mail: daniel.janosi@ttk.elte.hu; #E-mail: kemenczei.dina@gmail.com

Bevezetés

Az általános- és a középiskolai fizikatanítás korai szakaszát (a mechanika, dinamika tanítását) egyszerű, idealizált rendszerek leírása jellemzi – az olyan mindennapi effektusok, mint például a súrlódás elhanyagolásával. Gondoljunk csak arra, hogy milyen természetellenesen hat, ha egy, az űrben súrlódásmentesen mozgó tárgyat nézünk. Ennek a problémának a megoldása persze sokféle lehet, például kísérletek bemutatása vagy kiegészítő tananyagok átadása. Ebben a cikkben az utóbbira mutatunk példát. Bemutatjuk, hogy egy másfajta mozgás, a káosz fogalma már általános iskolai szinten bevezethető, és segít a tananyagot közelebb vinni a valósághoz. Emellett a káosz önmagában is érdekes és meglepő mozgás, főleg ha az azt produkáló rendszerek kifejezetten egyszerűek.

Kaotikusnak nevezük az olyan mozgásokat, amelyekre a következő három tulajdonság jellemző [1]:

- *Szabálytalan.* Ez a tulajdonság egyben azt is jelenti, hogy semmilyen periodicitás nincs a rendszerben (még közelítőleg sem), ami meglepő lehet például egy kaotikusan mozgó inga esetén, amelyből általában az ideális, periodikus eset kerül bele a tananyagba. Fontos azonban megjegyezni, hogy itt nem zajos, azaz random mozgásról van szó, ahol már a mozgást leíró egyenletekben is van véletlenszerű tag, mint például egy véletlenszerűen rázogatott rugó esetén. (Az ilyen mozgást stochasztikusnak nevezik, és gyakran keverik a káosszal.) Más szóval, a szabálytalan mozgás itt olyan egyszerű rendszerben valósul meg, melyben ismertek az erőtvények, a mozgás nem zajjal terhelt. A kaotikus mozgások hely-idő diagramjait csak számítógépes programok segítségével lehet kirajzolni, matematikai képlettel, zárt alakban nem leírhatók.
- *Érzékeny a kezdőfeltételek kis megváltozására.* Reguláris (azaz nem kaotikus, analitikusan megoldható) mozgások esetén ha két nagyon közel (akár térben, akár kezdősebességüket tekintve) induló mozgást vizsgálunk, akkor azt tapasztaljuk, hogy azok nagyon sokáig közel is maradnak egymáshoz. Például ha egy puskából kilőtt golyóval $0,01^\circ$ különbséggel célzunk oldalra az előző lövéshez képest, akkor a két lövedék nagyon hasonló pályát fog leírni, és a különbséget csak akkor látjuk, ha messzi célpontra lövünk (100 m távolságon az eltérés kb. 1,7 cm). Ezzel szemben, ha a lövedék mozgása kaotikus lenne, például ha puskagolyó helyett egy flippergolyó mozgását vizsgálnánk, ami a

játéktér elemei között véletlenszerűen pattog, akkor azt $0,01^\circ$ -kal eltérő irányban indítva nagyon hamar más pályát kezdene bejárni, mint az előző „lövés”. Egy kaotikus rendszerben a nagyon közeli kezdőfeltételekből indított pályák nagyon gyorsan (időegységként nagyjából a távolság duplázódásával) távolodnak egymástól.

- *Bonyolult geometriai szerkezettel rendelkezik a fázistérben.* Egy periodikus mozgás képe a fázistérben (azaz a hely- és sebességek koordináták terében) egy jól definiált zárt görbe, például kör vagy ellipszis. A kaotikus mozgás alakja azonban bonyolult, nehezen definiálható szerkezetű. Ez a szerkezet a megfelelő reprezentációban ún. fraktálmotívumot vesz fel. A fraktál egy matematikai objektum, és jellemzője az ön hasonlóság, azaz hogy minden méretskálán ugyanolyan struktúrájú struktúrájú. Ez azt jelenti, hogy a fázistér – bármilyen kis területén vizsgáljuk – a kaotikus mozgás esetén mindig hasonló szerkezetű lesz (bár megjegyezzük, hogy elméletben ehhez végtelen hosszú szimuláció kellene).

Ha az a célunk, hogy a káosz jelenségét minél fiatalabb korosztályban megismertessük, akkor a fenti tulajdonságok sorrendje egyben a megértésük nehézségére is utal. A szabálytalan mozgás a diákok által is könnyen látható egyszerű kaotikus rendszerek tényleges bemutatása révén. Ilyen népszerű kísérletek tipikusan a kaotikus ingamozgások, például a kettős, mágneses vagy periodikusan mozgó felfüggesztésű inga.

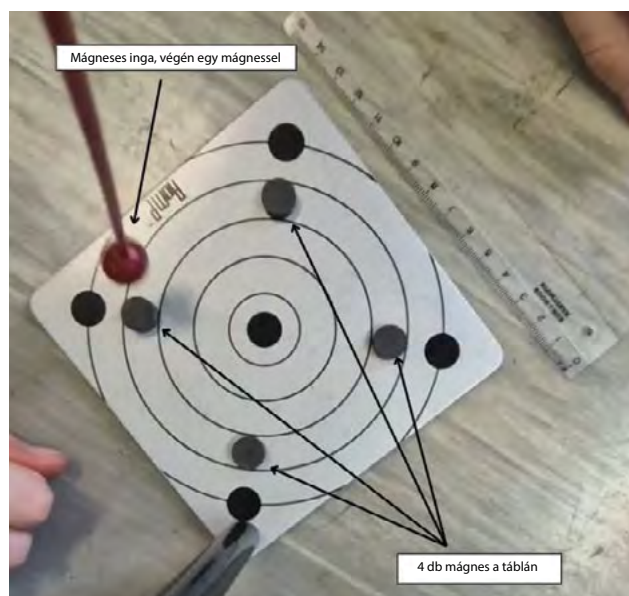
A kezdőfeltételekre való érzékenység ugyanezen kísérletek keretén belül demonstrálható. Erre általános példa, ha bejelöljük a rendszer kiindulási helyzetét, videóra vesszük a mozgást, majd másodszor is elindítjuk ugyanonnan, és szintén rögzítjük. Mivel a jelöléshez képest a kísérletező óhatatlanul kissé (szemmel nem láthatóan) máshonnan indítja a második mozgást, a két felvételen azt látjuk, hogy a mozgások egy ideig hasonlóak, később azonban teljesen különbözőek lesznek. Lejjebb egy példán keresztül demonstráljuk, hogy hasonló kísérlet általános iskolában is elvégezhető, így az első két tulajdonság bemutatható.

Az itt leírt demonstrációt egy általános tantervű, általános iskolai 8. osztályban végeztük el. A kaotikus mechanika közoktatásban való tanítására mind Magyarországon, mind külföldön csak néhány kísérlet létezik, lásd például [2, 3] (ezen kívül online ismertető anyagok

léteznek, pl. [4]). Ezek mind gimnáziumi osztályokban, vagy speciális tantervű, illetve fakultációs csoportokban, szakkörökön valósultak meg, a jelen cikk elsőként mutat be általános iskolai alkalmazást.

Kísérlet mágneses ingával

A kaotikus mozgás kísérleti demonstrálásához a mágneses ingát [1, 5] választottuk. Az elrendezés (1. ábra) alapja egy fém tábla, amelyre mágneseket helyezünk. Ezek fölött egy 18 cm hosszú rudat lógatunk, amelynek a végén szintén egy mágnes található, ami így kölcsönhatásba tud lépni a táblára helyezett mágnesekkel. Az inga felfüggesztése a tábla középpontja fölött található, az inga vége és a tábla távolsága nyugalmi helyzetben 2 cm, a mágnesek távolsága a tábla oldala mentén 7 cm. Az így készített inga a teljes síkban mozoghat, azaz a tábla síkjának bármely pontja fölé eljuthat.



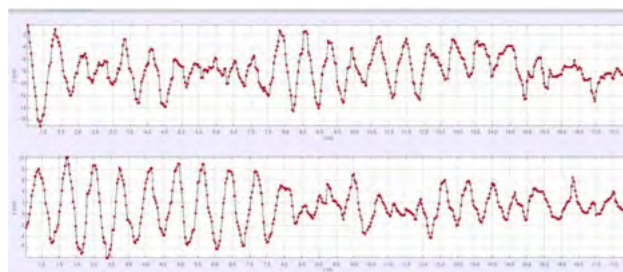
1. ábra. A kísérleti elrendezés felülnézetből

Az inga egyszerűsített mozgásegyenleteit a *Függelékben* adjuk meg. Ezek alapján elmondható, hogy egy olyan mozgásról van szó, amelyet zajos tagot nem tartalmazó egyenletek írnak le.¹ Mégis, a létrejövő mozgás szabálytalan: egy, a mágnesek közötti véletlenszerű oszcilláció, amint azt a 2. ábra is mutatja. Ezek kimért idősorok, melyekhez a mozgást felülnézetből felvéve a szabad hozzáférésű Tracker programmal [6] értékeltük ki a tanulók bevonásával.

A kísérlet kimenetelében fontos szerepe van a táblán lévő mágnesek polaritásának. Ha ezek azonos pólusúak a mozgó mágnessel, akkor állandóan taszítják azt, és a 2. ábrán megfigyelt bonyolult mozgás sokáig fennáll. Ha

¹ Ugyanez elmondható lenne a teljes egyenletről is, figyelembe véve a mágnesek közötti dipólkölcsönhatást, a tábla és az inga mágnesének kölcsönhatását, valamint az inga végének a lengés síkjától való elemelkedését. Véletlenszerű tagot sem az egyszerűsített, sem a teljes egyenlet nem tartalmaz.

azonban megfordítjuk a mágneseket, és a mozgó mágnessel ellentétes polaritást adunk nekik, akkor vonzani fogják azt. Ekkor az (F1) egyenlet (lásd: *Függelék*) szummás tagjainak együtthatói pozitívak. A bonyolult mozgás ebben az esetben is huzamosabb ideig fennáll (a 2. ábra is ezzel az elrendezéssel készült), tehát a rendszer kaotikus, azonban egy idő után a légellenállás lelassítja az ingát annyira, hogy az azt vonzó mágnesek hatása érvényesülni tudjon, majd végül megállapodjon valamelyik mágnes felett. Ekkor a mozgás természetesen már nem kaotikus, hanem a mágnes feletti oszcillációnak felel meg. Itt olyan ábrákat mutatunk, ahol a mozgás még nem érte el ezt az állapotot.



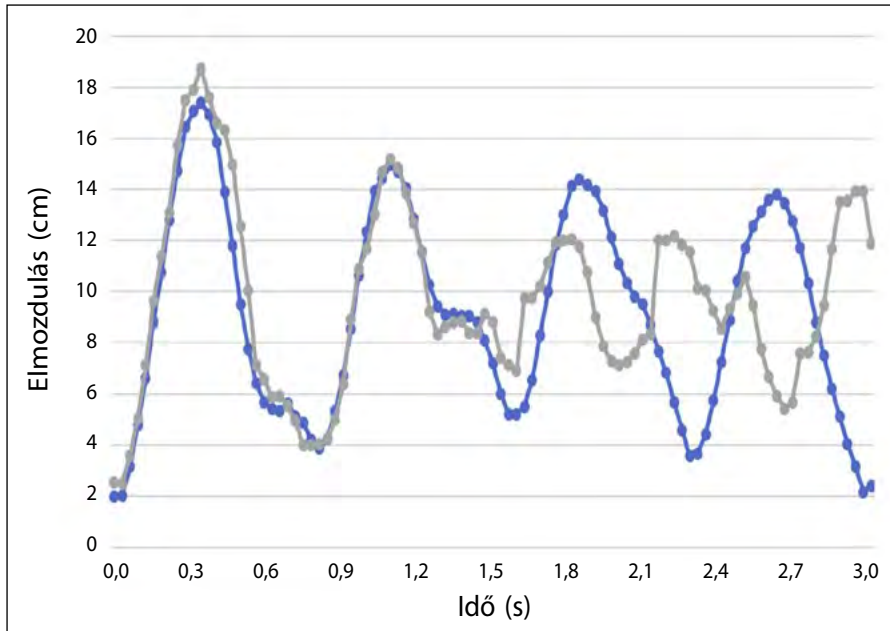
2. ábra. A mágneses inga mozgásának szabálytalan időszora az x és y koordinátákban. Az adatokat a tanulókkal együtt mértük ki a Tracker program használatával, az origót az ingát tartó oszlop aljába helyezve

A fenti jelenség neve tranzien káosz [7], vagyis olyan kaotikus mozgás, amely véges időn belül megszűnik. A tranzien kaotikus eset kiválóan alkalmas a kezdőfeltételekre való érzékenységi kvalitatív demonstrálására is: a tapasztalat szerint a kezdőfeltételeket csak egy kicsit is megváltoztatva előfordulhat, hogy az inga nem ugyanannál a mágnesnél állapodik meg.

A kezdőfeltételekre való érzékenység kimérése

A jelenség kísérleti kiméréséhez a tanulókkal ún. fákhlyadiagramot készítettünk, ami egy gyakran használt eszköz egy rendszer kaotikusságának demonstrálására. Szimuláció esetén több, kezdetben közeli kezdőfeltételből kiinduló pálya együttes futtatásáról és idősorainak ábrázolásáról van szó. Ekkor megfigyelhető, hogy eleinte a görbék még hasonló alakúak (gyakran szemmel megkülönböztethetetlenek), később azonban elválnak egymástól, teljesen más mozgásokat leírva. Ez alapján elmondható az is, hogy kaotikus mozgás csak addig jelezhető előre megbízhatóan, amíg ez a szétválás meg nem történik [1].

Érdekes megjegyezni, hogy az ún. valószínűségi időjárás-előrejelzés ugyanezen az elven működik, mert a Föld légkörének dinamikája alapvetően kaotikus (sőt turbulens, tehát térben is bonyolult) jellegű. Emiatt a bonyolult időjárási modellek kimenete egy adott mennyiség, például a felszíni hőmérséklet előrejelzésére egy ugyanilyen fákhlyadiagram. Ennek kiindulópontja ugyanis mindig a legfrissebb mérés, ami azonban mindig hi-



3. ábra. A tanulók által kimért fáklyadiagram, az ingát tartó oszlop aljától való távolságot ábrázolva. A mozgások közvetlenül az oszlop mellől indultak (tehát ideális esetben kezdetben $r = 0$ kezdősebesség nélkül. Leolvasható, hogy az előrejelzési idő nagyjából 2,1 másodperc

bával terhelt, és így ami legyen az bármilyen kicsi is, kaotikus rendszerben mindig véges előrejelzési időt eredményez. Folyamatosan frissülő, aktuális időjárási fáklyadiagramok megtekinthetők például a Magyar Meteorológiai Szolgálat (Hungaromet) oldalán [8] (itt az átlag körüli sáv jelzi a szimulációk terjedelmét), vagy a Wetterzentrale német weboldalon [9]. Ezek alapján látszik, hogy például a felszíni hőmérséklet esetén az előrejelzési idő nagyjából 3-4 nap.

Mivel a tanulókkal végzett kísérlethez nem áll rendelkezésünkre több mágneses inga, mi a szimulációs gyakorlatról eltérő módon készítettünk fáklyadiagramot: kijelölünk egy kezdőpontot, és a kísérletező (esetünkben a tanulók) ebből a pontból indítja a rendszert *többször egymás után*, majd a kísérletek eredményét *közös grafikonon* ábrázoljuk (hiszen a mozgások időben eltolásinvariánsak). Az inga esetén a kiindulópont közvetlenül a tartóoszlop bal oldalán volt. A Tracker program követi az inga mozgását, ami alapján ábrázolható a komponensek időfüggése minden kezdőfeltétel esetén, vagyis a fáklyadiagram.

Ennek a mérésnek az eredménye látható a 3. ábrán két mozgás idősorával. Itt az ábrázolt mennyiség $r = [x^2 + y^2]^{1/2}$, ahol a rendszer origóját az ingát tartó oszlop alján (az 1. ábrán a tábla legalsó pontjában) rögzítettük; x , y és r az ettől a ponttól mért komponensek és távolság. A kísérletben összesen három ingamozgást vizsgáltunk, azonban a harmadik idősor már a mozgás elejétől eltér az itt ábrázoltaktól. Összehasonlításképpen ezt a *Függelékben* közöljük.

Az ábra szépen mutatja, hogy a görbék eleinte hasonlóan viselkednek, az első két maximumuk nagyjából ugyanott van, 0,3 és 1,1 másodperc környékén. Ezután

azonban összekeverednek, ami jelzi a mozgások különbözőségének felerősödését. Nagyjából 2,1 másodpercnél a két görbe már teljesen máshol tartózkodó ingákat jelez. Ez alapján kijelenthető, hogy a mérés bizonyíték a mágneses inga kaotikus tulajdonságára, és megállapítható, hogy az előrejelzési idő nagyjából 2,1 másodperc.

A különbségek felerősödésének oka, hogy a kísérletező sosem tudja teljesen pontosan ugyanonnan indítani az ingát, így megvalósul a közeli (de nem egzaktul ugyanolyan) kezdőfeltételű mozgások vizsgálata. Általánosan a kezdőfeltételeket sosem ismerjük teljesen pontosan: a kísérletekben a kísérletező kezének remegése, a szimulációkban a numerikus pontosság, a természeti folyamatokban pe-

dig a kis skálájú fluktuációk okozhatnak kis eltérést, amelyek aztán kaotikus rendszerben felnövekednek. Ennek köszönhető a különböző végállapotok kialakulása is: a 3. ábrán szemléltetett mozgások végállapotai a szürke görbe esetén az 1. ábra elrendezésében a felső, míg a kék görbe esetén a jobb oldali mágnes.

Összegzés

A kaotikus mechanika több szempontból is ideális kiegészítő demonstrációs fizika tananyag lehet. Egyfelől a kaotikus mozgás elég szokatlan és meglepő ahhoz, hogy a tanulók figyelmét könnyen felkeltsse. Ugyanakkor viszont az itt bemutatott kísérlet megértéséhez elegendő lehet a harmonikus rezgőmozgás, de akár csak az egyenes vonalú egyenletes (vagy egyenletesen gyorsuló) mozgás elmozdulás-idő diagramjának, tehát az általános iskolai fizika tananyag lelegejének ismerete (a mágneses inga a *Függelékben* közölt (F1) egyenleteit ebben az esetben sem írtuk fel).

Ezenkívül a kaotikus mozgás könnyen demonstrálható egyszerű rendszerek segítségével, amire jó példa a mágneses inga. Az ilyen kísérletekbe a diákok egyszerűen bevonhatók, esetünkben az inga elengedése volt a feladatuk. Magasabb szinten – például fakultációs csoportban – jó lehetőség a kísérletező szoftverek kezelésére (a Tracker program használata például szerepel az aktuális, 2025-ös emelt szintű fizika érettségi szóbeli részére kiadott mérésekben [10]), valamint a mérési jegyzőkönyv készítésére való bevezetésre is.

Az a véletlenszerű mozgás, amely – a zajos esetek mellett – a kaotikus rendszerekben valósul meg, jóval többször tapasztalható a természetben, mint a fizikaórán

tanult, idealizált mozgások. Így mindenekelőtt a kaotikus mechanika tanításával a fizika legalapvetőbb jelenségeinek tanítását vihetjük közelebb a valósághoz.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük Tél Tamás témavezetői támogatását J. K. E. Tudományos Diákköri kutatásához, amely alapján ez a cikk készült, illetve hasznos javaslatait a cikk írása során. J. D. az NKFIH hivatal támogatásában részesült, a KDP-2023 C2262591, és TKP-2021 BME-NVA-02 kódszámú pályázatok keretében.

FÜGGELÉK

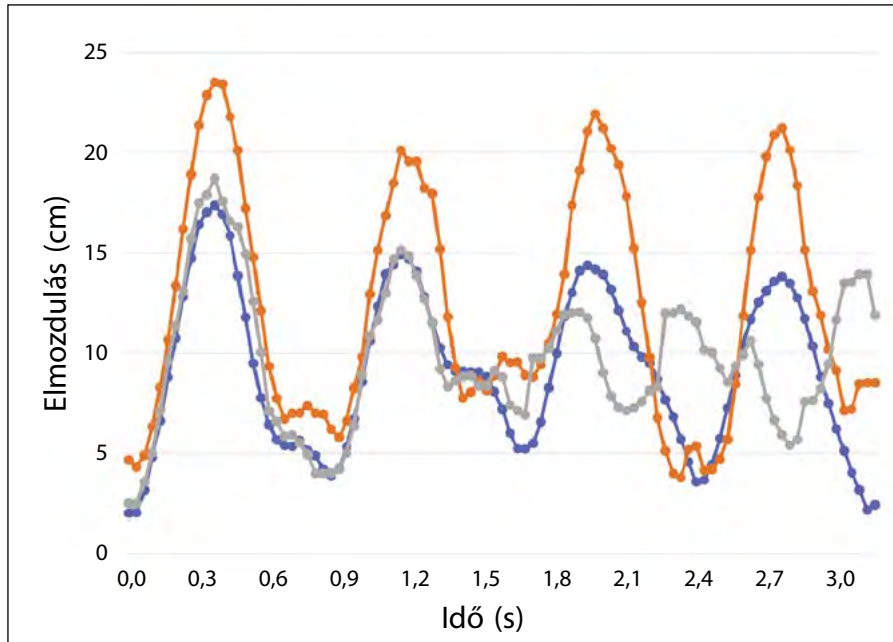
A. A mágneses inga mozgásegyenletei

A mozgás leírása egyszerűbb, ha az inga szögkitérését kicsinek tekintjük, azaz a rúd l hossza nagy az ingának a tábla síkjában történő kitéréséhez képest. Ekkor az inga végén lévő mágnes úgy tekinthető, hogy a tábla síkjában mozog. Ha l összemérhető a síkbeli kitéréssel, akkor figyelembe kell venni, hogy az inga vége a lengése során eltávolodik a táblától. Elhanyagoljuk továbbá az inga mágnesre és a fém tábla közötti kölcsönhatást.

Ezekkel az egyszerűsítésekkel az inga végén lévő mágnesre hat a gravitáció, a légellenállás, valamint a többi mágnessel való kölcsönhatás. Síkmozgás-közelítésben, továbbá [1, 5] nyomán a mágnesek között a távolsággal fordítottan arányos négyzetes erőtvénnyt feltételezve (amely a mágneses monopólusokkal való durva közelítésnek felel meg), a mozgás egységnyi tömegre felírható:

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega_0^2 x - 2\beta v_x \pm \sum_i \frac{x_i - x}{D_i(x, y)^3}, \\ a_y &= -\omega_0^2 y - 2\beta v_y \pm \sum_i \frac{y_i - y}{D_i(x, y)^3}, \end{aligned} \quad (\text{F1})$$

ahol x és y a lengő mágnesnek a tábla széleihez képest 45° -kal elforgatott koordinátái, a és v a gyorsulás- és sebességkomponensek, ω_0 az oszcilláció harmonikus komponensének frekvenciája (ami mágnesek hiányában az egyszerű ingamozgást írta le), β a légellenállásból adódó disszipációs konstans, (x_i, y_i) a táblán lévő mágnesek koordinátái, valamint $D_i(x, y) = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{1/2}$, ahol d a mágnesek síkja és az inga nyugalmi végpontja közötti távolság. Ahogyan az 1. ábrán látható, a kísérlethez négy



4. ábra. A három kísérlet idősora egy ábrán. A kék és szürke görbe megegyezik a 3. ábrán lévőkkel, a narancssárga görbe ezekhez képest nagyobb eltéréssel indul

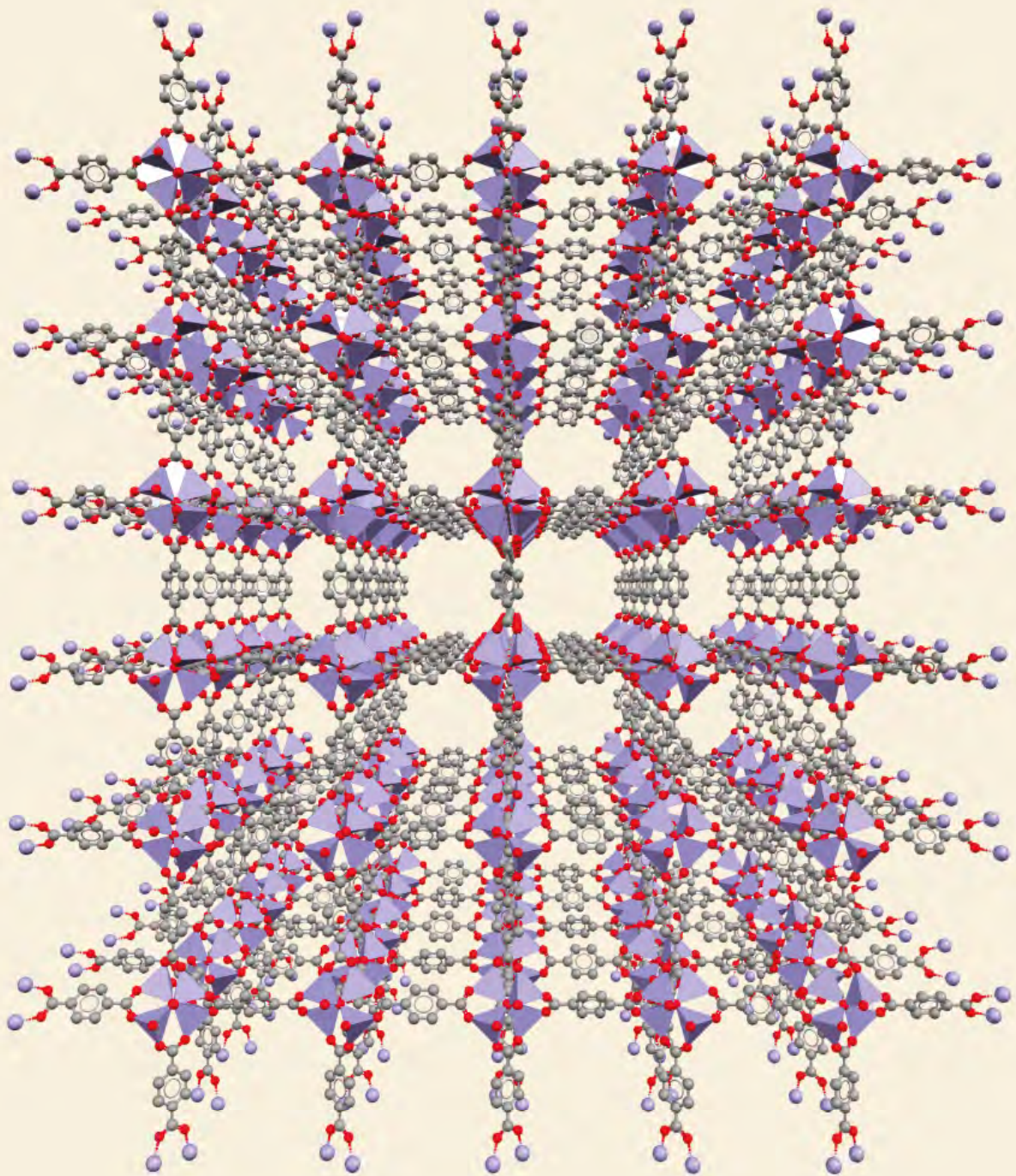
mágneset használtunk, így $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Az (F1) egyenlet dimenziótlan, az idő- és távolságegységet oly módon választottuk, hogy a mágneses erő (a szummát tartalmazó tag) együttthatója egységnyi legyen. Ennek a tagnak az előjele a „monopólusok” polaritásáról függ (feltéve, hogy mind a négy mágnes ugyanolyan polaritású).

B. A harmadik kísérlet idősora

A 4. ábrán narancssárgával mutatjuk a harmadik ingamozgás idősorát, mely a kezdőfeltételek nem megfelelő beállítása miatt láthatóan már a mozgás kezdetén jobban eltér a másik két görbétől, mint azok egymástól. Így nem is marad sokáig közel hozzájuk, az azonban látható, hogy hasonló mozgást ír le, hiszen a görbe alakja hasonló a másik kettőhöz, egészen addig, amíg már a kék és a szürke is jelentősen eltávolodik egymástól.

Irodalom

- Tél T., Gruiz M. (2002): Kaotikus dinamika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Szatmáry-Bajkó I. (2023): Szennyeződések terjedésének vizsgálata a középiskolában: Nemlineáris és kaotikus vonások felfedező tanulása. Doktori disszertáció, Eötvös Loránd Tudományegyetem.
- Nussbaumer A., Nussbaumer P. (2017): Basiswissen. *Physik-Compact*, 5, pp. 12. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH, Vienna.
- <http://theorphys.elte.hu/fiztan/chaosH/>
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. (2004): Chaos and fractals: New frontiers of science. Springer, Dordrecht.
- <https://physlets.org/tracker/>
- Lai Y.-C., Tél T. (2011): Transient chaos, Springer, New York.
- <https://www.met.hu/idojaras/elorejelzes/valoszinusegi/>
- https://www.wetterzentrale.de/en/show_diagrams.php?model=gfs&var=2&lid=ENS&h=0
- https://www.oktatas.hu/koznevelas/erettsegi/2025tavasz/vizsgaidoszak/2025tavasz_nyilvanos_anyagok_listaja#fizika



Az egyik legismertebb fém-szerves vázszerkezet, a MOF-5 nagy szimmetriájú kristályszerkezete összefüggő üregrendszer tartalmaz; az elemi cella térfogatának 76%-a üres tér, ami kiválóan alkalmassá teszi kis méretű molekulák tárolására. Lásd Kováts Éva cikkét a 18–22. oldalon