

fizikai szemle



2019/6

EÖTVÖS LORÁND MŰSZEREI AZ EMLÉKGYŰJTEMÉNYBEN – 3.

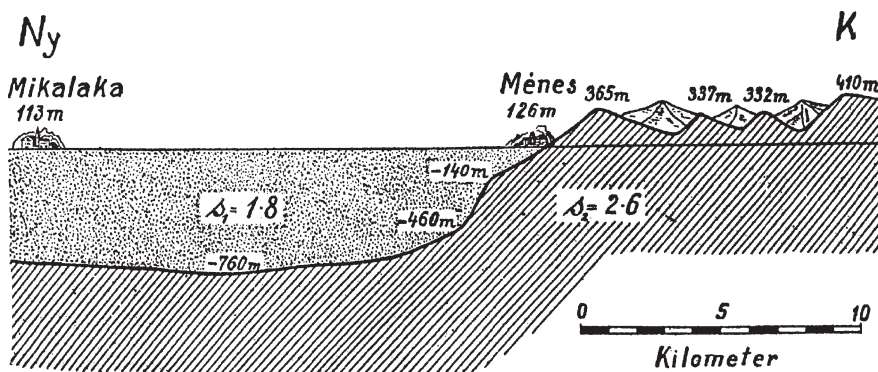
Kettős nagy eszköz (1902)

A rendszeres terepi mérések mellett Eötvös továbbfejlesztí mŰszereit. 1902-ben készül el a kettős nagy eszköz, amely két antiparallel lengőszerkezetet foglal magában. Így az egy állomáson végzett észlelések száma jelentősen csökkent. Az egyszerű eszköznél a görbületi érték és a gradiens meghatározásához 5 különböző azimutban végzett észlelésre volt szükség, a kettős ingánál 3 is elég volt. Az eredeti 5 ismeretlenhez a második inga meghatározandó egyensúlyi helyzete csatlakozott, viszont 3 azimutban mérve ingánként 3-3 egyenlet írható fel. A csillapodási időt is sikerült 100-ról 60 percre csökkenteni.

Eötvös, Pekár és Fekete e műszerrel végezte a súlyos és tehetetlen tömeg arányosságára vonatkozó újabb vizsgálatait. Kísérleteik a relativitáselmélet nagypontosságú alátámasztását adták. Ennek köszönhető, hogy a Washingtonban rendezett centenáriumi Einstein-kiállításra kölcsönkérték és központi helyen állították ki Eötvös műszerét.

A rendszeres terepi mérések 1902-ben a Fruska Gora hegy ségtől északra levő területeken kezdődtek, majd Arad környékén folytatódtak (lásd az első, gravitációs adatok alapján szerkesztett földtani szelvényt).

Eötvös – főleg Semsey Andor támogatásával végzett kutatásainak jelentőségét felismerve – méréseit 1907-től az állami költségvetés is finanszírozta. (Forrás: Szabó Zoltán: Az Eötvös-inga története. *Magyar Geofizika* 40/1 [1999] 26–38.) (Fotó: Kármán Tamás)



Eötvös Loránd Emlékgyűjtemény
Magyar Bányászati és Földtani Szolgálat
1145 Budapest, Columbus utca 17–23.
telefon: 06-1-2524999
e-mail: muzeum@mbfsz.hu
web: <https://mbfsz.gov.hu/kiallitasok/eotvos-lorand-emlekgyujtemeny>



AZ EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT ELNÖKSÉGÉNEK NYILATKOZATA

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, mint a fizikai és hozzá kapcsolódó tudományok területén működő kutatók, tanárok és a fizika alkalmazásával foglalkozók tudományos, szakmai egyesülete, és mint az 1891-ben Eötvös Loránd által alapított Matematikai és Physikai Társulat egyik szellemi jogutódja a mai napon tartott elnökségi ülésén az alábbi nyilatkozatot fogadta el.

A Társulat Elnöksége sajnálattal állapítja meg, hogy az akadémiai kutatóhálózat körül kialakult bizonytalanság árt a magyar tudományosságnak, és ezért az ügynek a tudományosság szempontjait és a társadalmi elvárásokat is figyelembe vevő mielőbbi lezárását kéri. A kutatóhálózat átszervezésére irányuló törvényalkotással kapcsolatban a Társulat Elnöksége kifejezi elvárását: egyrészt az intézethálózat irányítása olyan, hosszú távon kiszámítható rendszerben történjen, amelynek megfelelő, a kutatók szakmai önállóságát tiszteletben tartó modell az Európai Unió valamelyik államában már évek óta bizonyította működőképességét és hatékonyságát, másrészt az alapkutatás és az alkalmazott kutatás állami finanszírozása – GDP-arányosan véve – néhány éven belül tervezett módon érje el az Európai Unió átlagának megfelelő értéket.

Budapest, 2019. június 12.

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Elnöksége

AZ EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT ELNÖKSÉGÉNEK NYILATKOZATA AZ ELFT ÉS AZ MTA EGYÜTTMŰKÖDÉSÉRŐL

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Elnöksége a mai napon tartott ülésén kinyilvánította, hogy az *Eötvös Loránd* egyidejű akadémiai és társulati elnöksége alatt a Társulat és a Magyar Tudományos Akadémia, mint a magyar tudományosság egészét átfogó nemzeti intézmény között megkezdett együttműködést az akkori szellemben töretlenül folytatni kívánja.

Budapest, 2019. június 12.

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Elnöksége

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:
Lendvai János

Szerkesztőbizottság:
Bencze Gyula, **Bíró László Péter**,
Czitrovszky Aladár, **Füstöss László**,
Gyürky György, **Hebling János**,
Horváth Dezső, **Horváth Gábor**,
Iglói Ferenc, **Kiss Ádám**, **Koppa Pál**,
Ormos Pál, **Papp Katalin**, **Simon Ferenc**,
Simon Péter, **Sükösd Csaba**,
Szabados László, **Szabó Gábor**,
Takács Gábor, **Trócsányi Zoltán**,
Ujvári Sándor

Műszaki szerkesztő:
Kármán Tamás

A folyóirat e-mailcíme:
szerkesztok@fizikaiszemle.hu

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:
<http://www.fizikaiszemle.hu>



A címlapon:

Balogh Nóra, a Wigner Jenő Szakkollégium Kísérleti Körének tagja mutatja be a Tesla-tekercset a 2017. évi Kutatók éjszakáján a BME Sóhajok hídja előtt.

TARTALOM

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Elnökségének nyilatkozatai	181
<i>Kovács László: Eötvös Loránd előadási kísérleteinek gyöngyszemei</i> <i>Megismerhetjük Eötvös néhány kísérletét, amelyet nemcsak az egyetemi hallgatók, hanem a Matematikai és Fizikai Társulat tagjai és a Természettudományi Társulat előadó üléseinek látogatói is láthattak.</i>	183
<i>Bíró Tamás Sándor: A számtani és mértani közép karrierje a fizikában</i> <i>A cikk az entrópiával (információval) és a kvantummos elmosódással kapcsolatos egyenlőtlenségeket igen szemléletes módon tárgyalja a számtani és mértani közép közötti, régóta ismert egyenlőtlenség általánosításaként.</i>	189
<i>Timár-Fülep Csilla, Erdei Gábor, Kovács Illés, Kránitz Kinga:</i> <i>Új lehetőségek a látóélesség-vizsgálati tesztek pontosságának növelésére</i> <i>Javaslat olyan mérési módszer kidolgozására, amely a jelenlegi eljárásoknál nagyobb pontossággal és jobb reprodukálhatósággal rendelkezik.</i>	195
A FIZIKA TANÍTÁSA	
<i>Kovács Levente, Nagy Dániel, Szakály Marcell, Hömöstrei Mihály, Ispánovity Péter Dusán, Asbóth János, Tüzes Dániel, Jenei Péter: Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye 2018 – magyar szemmel – 1. rész</i> <i>Ízelítő a verseny előtt megbírdetett nyílt végű problémákból, amelyeket a diákok és felkészítőik közel egy éves kutatómunkával oldottak meg.</i>	201
<i>Träger Magdolna, Buday Csaba, Sánta Botond: A Wigner Jenő Szakkollégium Kísérleti Kör munkacsoportja bemutatja: a Tesla-tekercs</i> <i>Az eszköz megépítésének és a vele elvégezhető számos látványos jelenség bemutatása.</i>	208
<i>Stonawski Tamás: Mozgásszimulációk a légkörben – 2. rész</i> <i>Hogyan írunk érdekes szimulációkat középiskolában?</i> <i>Megismerhetjük az egyszerű szimulációk írásának technikáját, és betekintést nyerhetünk a továbbfejlesztés fogásaiba is.</i>	212
VÉLEMÉNYEK	
<i>Tóth Eszter: Tanári hitvallásom</i>	216
HÍREK – ESEMÉNYEK	
Magyar sikerek a 2019. évi ICYS-en	216
The Statements of the Presidency of Roland Eötvös Physical Society <i>L. Kovács: The gems of Loránd Eötvös's lecture experiments</i> <i>T. S. Bíró: The career of arithmetic and geometric means in physics</i> <i>Cs. Timár-Fülep, G. Erdei, I. Kovács, K. Kránitz: New ways to increase the accuracy of visual acuity tests</i>	
TEACHING PHYSICS	
<i>L. Kovács, D. Nagy, M. Szakály, M. Hömöstrei, P. D. Ispánovity, J. Asbóth, D. Tüzes, P. Jenei: International Young Physicists' Tournament 2018 from Hungarian perspective – Part 1</i> <i>M. Träger, Cs. Buday, B. Sánta: The Experimental Circle of the Eugene Wigner College presents: the Tesla coil</i> <i>T. Stonawski: Motion simulations in the atmospheres – Part 2</i> <i>How to write interesting simulations in high school?</i>	
OPINIONS	
<i>E. Tóth: My teacher's creed</i>	
EVENTS	
26 th International Conference of Young Scientists (ICYS)	



EÖTVÖS LORÁND ELŐADÁSI KÍSÉRLETEINEK GYÖNGYSZEMEI

Kovács László
Nemesrempehollós

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen 1965-ben fejeztem be tanulmányaimat. Friss matematika-fizika szakos középiskolai tanári diplomával a kezemben azonnal fizika-kémia tagozatos diákok osztályfőnöke lettem Nagykanizsán.

A *Fizikai Szemlében* olvastam, hogy tantárgyaim megszerettetése érdekében először a törvényeket megalkotó embereket kell megszerettetni. Az az ötletem támadt, hogy ne csupán az iskolának, hanem osztályunknak is legyen névadója. A választás *Eötvös Lorándra* esett. Fizikai eredményei egyértelműek, és a felületi feszültségre vonatkozó Eötvös-törvényben kémia is akad. Készült osztálycímer (1. ábra), tabló, kísérleti berendezés, elhangzottak előadások a klubdélutánok bevezetőjeként, kitűztünk országos kísérleti pályázatokat. Munkánk alapjául az 1930-ban, az MTA kiadásában megjelent *Báró Eötvös Loránd Emlékkönyv* szolgált.¹ Az *Emlékkönyv* második része az általa 1891-ben alapított *Mathematikai és Fizikai Társulat* tiszteletadása szeretett elnökük 70. születésnapjára, a *Báró Eötvös Loránd-füzet*. Az ebben olvasható, a tudós egyéniségéről írt meleg hangú *Mikola Sándor*-tanulmány mellett *Rybár István* *Előadásairól és eredeti előadási kísérleteiről* című értekezésére építettünk.

A továbbiakban Eötvös Loránd *Tanár Úr* néhány olyan kísérletét ismertettük, amelyet nemcsak az egyetemről hallgatók láthattak, hanem a Mathematikai és Fizikai Társulat tagjai és a *Természettudományi Társulat* előadó üléseinek látogatói is. A *Természettudományi Közlönyben* olvashatjuk, hogy az 1888. januártól húsvétig terjedő időben hetenként tartott, összesen 10 előadásra a közönség soraiban államtitkár, miniszteri tanácsos és számos más, a közéletben



1. ábra. A nagykanizsai Eötvös-osztály címere.

„előkelő helyet elfoglaló” személy is volt. Így vált Eötvös, a tudós-tanár, az egész ország tanárává.

A kísérletekkel átszótt előadások különösen fontosak: a látvány, az élő szó, a személyiség varázsa csak így tud hatni. Azonban a nagy távolságok és más okok miatt sokan nem tudnak a bemutatókon részt venni. Számukra – és az utókor számára is – nagyon jó, ha az előadások anyaga nyomtatásban is megjelenik. A közösségformáló szerep mellett ez a társulati folyóiratok rendeltetése.

Leírásainkban több esetben nem Rybár szövegére támaszkodtunk, hanem a társulati folyóiratokban megjelent ismertetéseket és Eötvös saját tanulmányait, az azokban fellelhető ábrákat használtuk.

Előadási kísérlet és laboratóriumi gyakorlat a tömegvonzás kimutatására

Coulomb elektromos és *Cavendish* gravitációs torziós ingái példát adtak arra, hogy igen kis erőhatások kimutatására a csavarási (torziós) ingát kell használni. Az *inga* elnevezés kicsit megtévesztő lehet, mert az ingaóra juthat az eszünkbe, ahol függőleges síkban történik az óramű csillogó szárának, és annak végén a lapos tárcsa lengése. A német és az angol, és néha a magyar szóhasználatban is alkalmazott *mérleg* elnevezés is félrevezethet, mert a mérlegkarok függőleges irányban mozognak. A torziós ingánál a felfüggesztő, tehát függőleges csavarodó szál alsó végén vízszintesen helyezkedik el egy rúd, és ez vízszintes síkban végez periodikus mozgást.

Eötvös az *érzékenység fokozása, a zavaró hatások csökkentése* területein multa felül elődeit. Ő közel másfél méter hosszú felfüggesztő szálat alkalmazott. A torziós szál alsó részéhez erősített vízszintes rúd végeire nagy, lapos, henger alakú ólomsúlyokat erősített. A szálat és a rudat csőbe, illetve lapos hengeres edénybe zárta. A vonzó tömegeket a torziós rúd alatt helyezte el, így azok kellően közel voltak az ingához, mégsem zavarták annak lengéseit.

1888. november 12-én *Vizsgálatok a gravitáció jelenségeinek köréből* címen előadást tartott az MTA-n, és ugyanebben az évben népszerűsítő előadásban is bemutatta eszközét.

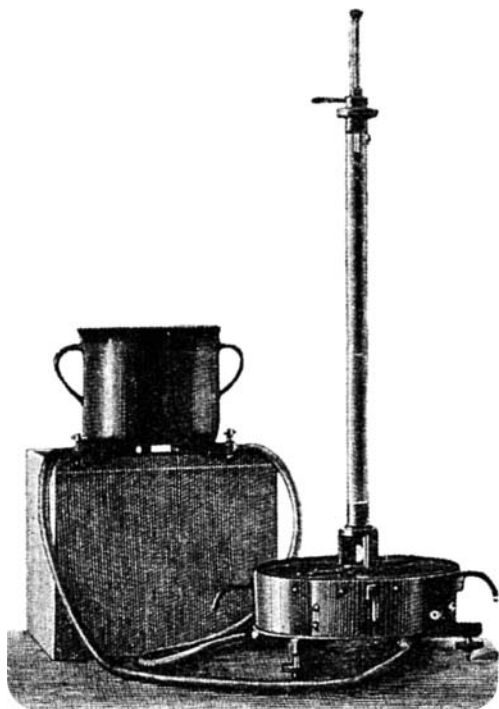
„A fémdobozában jól védett Coulomb-mérleg alatt négy részre osztott hengeres fém edény van, amelynek két-két szemben fekvő negyedét felváltva, alulról hígannyal lehetett megtölteni. Az eszköz már 3-4 perces lengésidőnél elég érzékeny volt és a fűtött és kivilágított előadóteremben megfelelő stabilitást mutatott.”

Az inga rezgésmentes elhelyezését a Fizikai Intézetben az előadóteremig felnyúló, az épülettől függet-

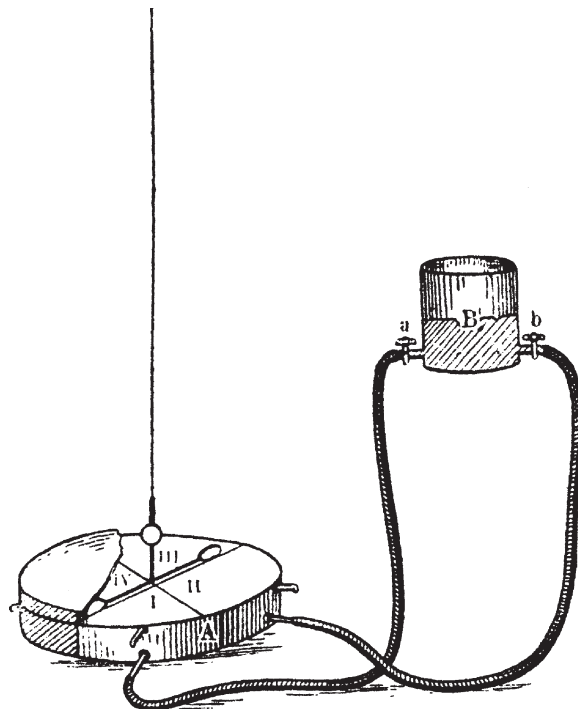
¹ Kicsit meglepődtem, hogy Eötvös báró volt, a róla elnevezett intézményben eltöltött öt év alatt ezt sohasem hallottam.



Kovács László az ELTE-n szerzett matematika-fizika szakos tanári diplomát 1965-ben. 18 évig a Landler Gimnáziumban tanított Nagykanizsán, majd 1983-ban munkatársaival fizika tanszéket alapított Szombathelyen az akkori Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskolán, ahol 25 évig dolgozott. 1988 óta a fizikai tudományok kandidátusa, 2000-ben Debrecenben habilitált. Számos szakmódszertani és fizikatörténeti, hazai és nemzetközi konferenciát szervezett, amelyeknek mindig előadója is volt.



2. ábra. A tömegvonzás kimutatására készített Coulomb-mérleg.



3. ábra. Rybár István ábrája Eötvös eszközéről.

len alpra helyezett, körülbelül 1 m^2 keresztmetszetű pizskei márványoszlop biztosította. Megmutatjuk a német nyelvű cikkben szereplő rajzot (2. ábra), a Rybár István írásában szereplő ábrát (3. ábra) és a ma is meglévő eszközről az Eötvös Loránd Emlékkiállításán készült fotót (4. ábra).

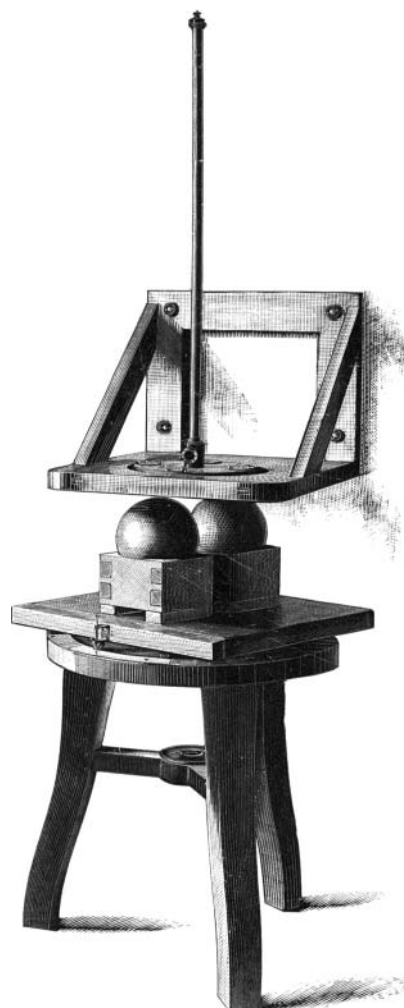
A negyedhengerekben levő higany vonzó hatását viszonylag hosszadalmas volt kiszámítani, ezért a hallgatók laboratóriumi méréseinél az inga alá vízszintes síkban elforgatható asztallapra gömb alakú, illetve paralelepipedon formájú, néha 50-100 kg tömegű, más esetekben pedig csupán 1 kg vagy még kisebb tömegű ólomdarabokat raktak. Az 1910-ig használatban levő labormérési összeállítás rajzát (5. ábra) is közölte Eötvös egy későbbi írásában.

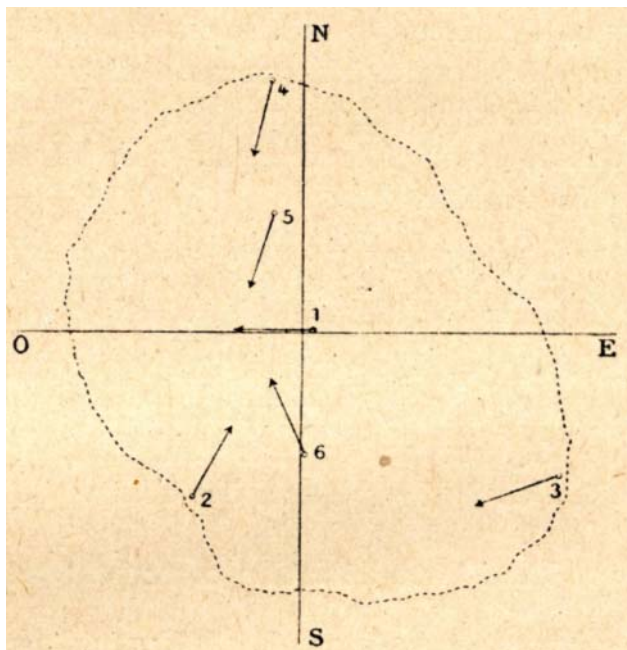
Legnagyobb vonzó erő akkor lépett fel az ólomtömbök és a torziós rúd végein elhelyezett tömegek

4. ábra. Az eredeti demonstrációs torziós mérleg. (Fotó: Kovács László)



5. ábra. Hallgatói méréshez használt összeállítás.





6. ábra. Az 1891. évben a Ság-hegyen végzett észlelések eredményei. (A méréshez használt horizontális variométer fotóját lásd áprilisi számunk első belső borítóján.)

között, amikor a gravitációs kölcsönhatásban lévő testek középpontjait összekötő egyenes merőleges a rúdra, és közel 55 fokos szöget zár be a vízszintessel. A vonzó erő nagyobb lett volna, ha a tömböket a torziós rúddal egy magasságban helyezik el, azonban a tanár úr eszköze így is kellően érzékeny volt: 2-3 fok maximális kitérést lehetett vele észlelni.

Elképzelhető, hogy Eötvös az inga érzékenysége alapján gondolhatott arra, hogy berendezése akkor is kimutatja az ólomtömböket, a szikladarabokat, ha azok a Föld felszíne alatt vannak. Képletesen azt mondhatjuk, hogy a legnagyobb forgatónyomaték most is akkor hat az ingára, ha az ismeretlen, a környezeténél sűrűbb anyagdarab tömegközéppontját és az ingára helyezett tömeget összekötő egyenes 55 fok körüli szöget zár be a vízszintessel. Most nem lehet az inga alatti tömeget elmozdítani, ezért az ingát kell addig mozgatni, amíg megeljük a maximális forgatónyomatékot adó helyet. Sőt, természetesen ennél is tovább kell mennünk, hogy a vonzó centrumtól távolodva a csökkenést is ki tudjuk mutatni. Ez nagyon szépen látszik Eötvös és munkatársai a Ság-hegy, akkor még meglévő platóján 1891-ben végzett méréseiről készült 6. ábrán. A közel kör alakú, 200 m átmérőjű plató szélétől minden mérési pontból befelé haladva nőtt a nehézségi gyorsulás értéke. Az ábrán a nyilak a növekedés irányait jelzik.

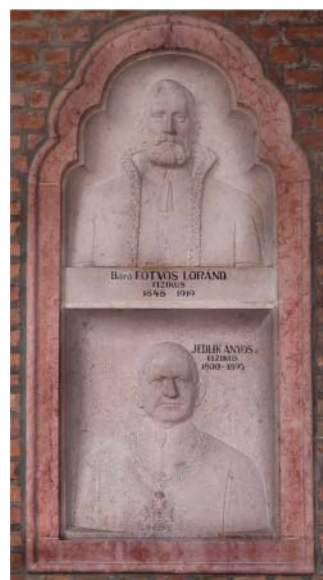
Az Eötvös-inga segítségével nem a nehézségi gyorsulás abszolút értékét lehet meghatározni, hanem annak *változását*. Egészen pontosan a vízszintes komponens változását. Az eljárás hosszadalmas: minden egyes pontban öt különböző, elforgatott helyzetben kell észlelni, majd számolni. (Német szaktekintélyek egy csoportja javasolta, hogy a nehézségi gyorsulás vízszintes összetevője *változásának* egységét Eöt-

vösről nevezzék el. Korabeli egységekben: 1 eötvös = 10^{-9} gal/cm; 1 gal = 1 cm/s^2 , ahol az 1 cm-t vízszintesen kell mérni. A gal *Galilei* nevének kezdete. Így Eötvös Loránd nemcsak eredményes munkásságával, hanem fizikai egységen keresztül is kapcsolódik elődeihez, *Newtonhoz* és *Galileihez*.) Így lehetett a hegyvonulatok föld alatti továbbfutását vizsgálni, így lehetett olajlelőhelyekre bukkanni, megtalálni a földrengés okát Kecskeméten, előre jelezni a vulkánkitörést a Vezúvnál. A torziós mérleggel még azt is ellenőrizni lehetett, hogy 1910. május 19-én éjjel 2 óra 30 perckor a Halley-üstökös csóvája – a sajtóhírekkel ellentétben – nem „seperte végig a Földgolyót”, nem volt semmiféle gravitációs vagy mágneses zavar.

Nagy lengésidők mérése

A kis amplitúdójú rezgések felerősítéséhez a rezonancia-módszert használta: amikor a torziós rúd elérte maximális kitérését, az asztal forgatásával áthelyezte az ólomgolyókat a lengő tömegek másik oldalára. (Hasonlóan járt el a negyedhengerekben levő higany átömlesztésénél is.) Az asztal forgatását először kézzel végezte, később automatizálta a forgatást. Megfelelő időközökben óramű zárta az asztallapot elforgató villanymotor áramkörét. *Jedlik* 12 egységből álló, összetett forgó Volta-méterénél is óramű kapcsolta be automatikusan egymás után az egységeket.

A kísérletezés terén Eötvös mesterei a heidelbergi három év alatt *Bunsen* és *Kirchhoff* voltak. Itthon pedig *Jedlik* Ányos, akivel hét közös évet töltött el a tudományegyetemen. Láttá *Jedlik* emberi tartását, munkaszeretét, eszközeit. Néhány kísérleténél segített is neki. Jelképértékű, a szellemi rokonságot mutatja, hogy a Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya ugyanazon a napon, 1873. május 21-én emelte tiszteleti tagjai sorába *Jedliket* (31 szavazattal 2 ellen), amikor levelező taggá választotta Eötvöst (30 szavazattal 4 ellen). Ugyancsak szimbolikus erejű, hogy a Szegedi Tudományegyetem árkádsorában kialakított Nemzeti Pantheonban közös dombormű ábrázolja a két fizikust (7. ábra).

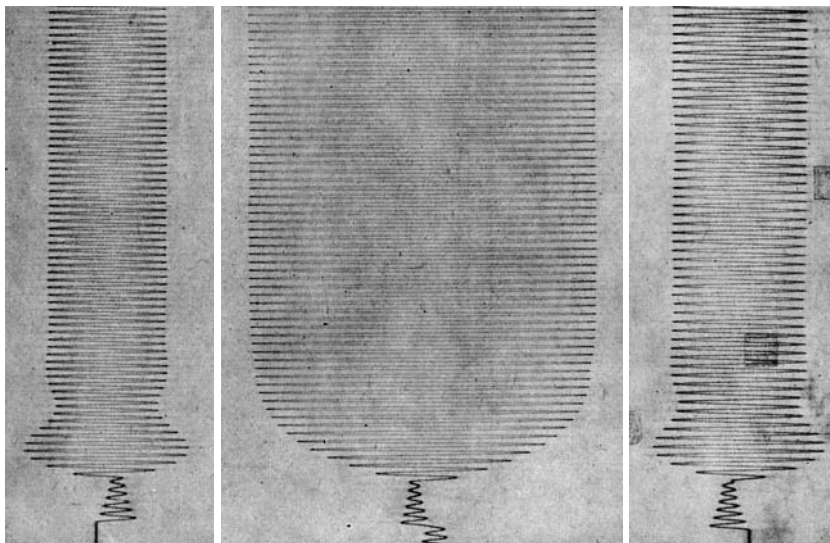


A rezonancia-módszer Eötvös későbbi tudományos munkáinál a nagy lengésidők pontos mérésére szolgált. A légellenállás miatt nagy lengésidőknél egy-két lengés után megállt az inga. A multiplikációs módszer alkalmazásával tetszőleges ideig fenn tudta tartani a len-

gést, így fél órás lengésideőt is tized vagy századmásodperces pontossággal tudott mérni.

A Tanár Úr azért, hogy az egész jelenségről meggyőző bizonyítékot nyerjen, és ezt a hallgatóságnak utólag, bármikor megmutathassa, fotografikus eljárást is használt. A torziós rúd közepére helyezett tükrőről visszavert fény, óraművel egyenletesen mozgatott fényérzékeny papíron, kirajzolta az eszköz kitérés-idő grafikonját. Jedlik „órával szabályozott motoros áramíró”-jában alkalmazott ilyen megoldást az 1860-as években.

Bemutatjuk az Akadémián 1890. április 21-én tartott előadásának fotografikus eljárással készített ábráját (8. ábra).



8. ábra. Fotografikus ábra a gravitációs multiplikátor működéséről.

A vonzó tömegek nagysága 1,85 kg, az inga lengésideje 10 perc, a tömegáthelyezések időintervalluma a bal oldali esetben 9 perc, a jobb oldalánál 11 perc, a rezonancia esetén – közepén – 10 perc volt. A kép alján a sokszorozás nélküli lengések jelei láthatók. Pontos számértékekkel is jellemezte a multiplikálást.

$$T = 611 \text{ s}, \quad t = 611 \text{ s}, \quad \Phi = 252'$$

$$T = 611 \text{ s}, \quad t = 600 \text{ s}, \quad \Phi = 225'$$

$$T = 611 \text{ s}, \quad t = 590 \text{ s}, \quad \Phi = 180'$$

Ahol T a rúd lengési ideje, t a tömegek periodikus áthelyezésének ideje és Φ a végső kilengés nagysága.

A gravitációs állandó mérése

Az Eötvös-ingák nagyfokú érzékenységének két hátránya volt. 1. Kezelésük nagy szakértelmet, gyakorlatosságot követelt. A külföldi ingavásárlóknak több esetben Magyarországra kellett jönniük megtanulni az inga kezelését. 2. Egy-egy mérés – és főleg a terepen egy-egy mérősorozat – nagyon hosszú ideig tartott. Gondoljuk meg, ha nemcsak a vonzás tényét akarjuk demonstrálni, hanem mérni is szeretnénk, akkor az ólomtömbök elhelyezése után, illetve az inga elforgatását követően meg kell várni a lengésbe jött inga megállását. Sokáig kell várni, amíg a fénymutató kijelöli az új egyensúlyi helyzetet, illetve a leolvasó távcsőben már nem látunk lengést. Követhetjük *Cavendish* módszerét is: a torziós rúd végénél leolvasott néhány maximális kitérésből meghatározható a nyugalmi helyzet. De ez is időigényes.

A Tanár Úr nagyszerű ötlete abban rejlik, hogy nem az egyensúlyi helyzetek változását kell keresni, hanem a statikus módszer helyett dinamikus módszert kell választani.

Két egymásra merőleges helyzetben méri a lengésideőt a befolyásoló tömegek jelenlétében, illetve anélkül, és a lengésideők különbözőségéből következtet a vonzó hatásra. Ezt tette már első „terepi” mérésénél, a Rudas-fürdő igazgatósági épületének földszintjén,

amikor a Gellérthegy vonzó hatását vizsgálta a görbületi variométernek nevezett eszközzel.²

Eötvös *Jelentés a Szent-Gellérthegy vonzó erejéről* címen ismertette eredményeit a Tudományos Akadémia III. osztályának 1889. május 20-i ülésén.

„A görbületi variometer rúdjának lengési ideje e helyen a hegy felé irányított egyensúlyi állás körül 564,6 s., arra merőlegesen 572,2 s. volt. Ugyanott a mérő-drót elcsavarodását a mérlegrúdnak két egymásra merőleges, az előbbi iránnyal 45 fok szöveget képező állítása közben 45 percczel egyenlőnek találtam. Ez utóbbi érték alig 1 percczel tér el attól, melyet a lengés időkből számítás útján nyerünk. A variationak ezekből folyó értéke megfelel a hegy alakjának és tömegének, a mennyiben ezeket szabálytalanságok mellett számításba vehetjük.”³

Ugyanilyen módon megmérte a gravitációs állandó értékét is: egyenként 610 kg tömegű ólomoszlopok között és anélkül lengette az ingát két, egymásra merőleges helyzetben. Az oszlopok között a két mérő lengésideőérték 641 és 860 másodperc volt, az oszlopok eltávolítása után pedig 743 és 759 másodperces időket mért. Ezen adatokból a gravitációs állandó értéke: $f = 0,000\,000\,066\,5$, a pontosság 1/500.

Érdekes kiszámítanunk, hogy ólom nélkül 2%-kal, az oszlopok között pedig 34%-kal változott meg a lengésideő.

A hét évvel korábbi, az első terepi mérésnél a hegy vonzása 1,3 százalékkal változtatta meg a lengésideőt. A nagy százalékos változás nem is annyira

² Erre emlékeztet Eötvös születésének 150. évfordulójakor, 1998-ban az Eötvös fizikai versenyen *Radnai Gyula* tanár úr, aki *Vermes Miklós* után 25 éven keresztül volt a versenybizottság elnöke, majd pedig örökös tiszteletbeli elnöke lett, egy erre vonatkozó feladatot tűzött ki. A megoldás a <elft.hu/wp-content/uploads/2016/11/Eötvös-verseny_1998.pdf> található.

³ Ebben az esetben nem tudta a hegyet eltávolítani – mint ahogyan az ólomoszlopot a következő kísérletnél –, ezért kellett az eszközt 45 fokkal elfordítani, és ekkor a hegy vonzásának tekintetében nincs különbség az egymásra merőleges helyzetek közt!



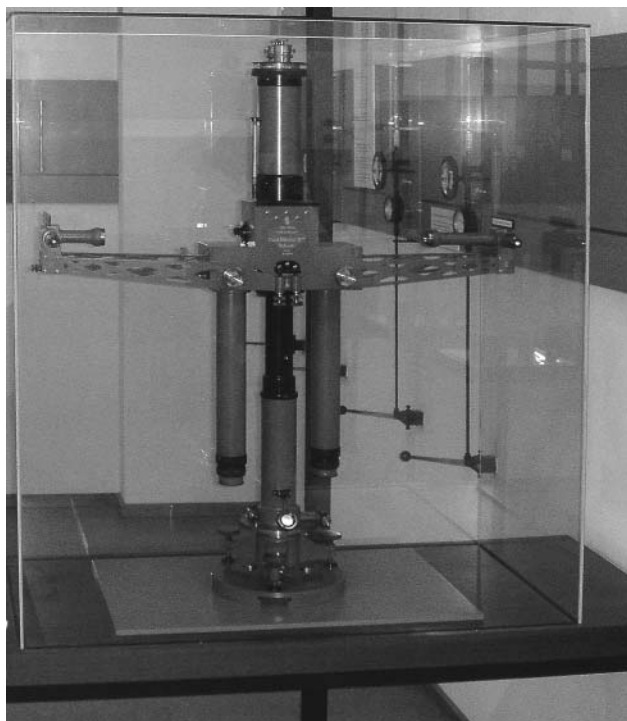
9. ábra. Mérés demonstrációs Coulomb-ingával a müncheni Deutsches Museumban.

az eszköz tökéletesítésének, hanem inkább annak tulajdonítható, hogy a lengő tömegekhez közel voltak a vonzó tömegek.

A müncheni Deutsches Museum meglátogatásakor saját építésű, feszített szálak torziós ingákkal megismételtük Eötvös mérését. Először az épület tornyában – ahol a Foucault-inga leng – a földszinten, *Philipp von Jolly* eredeti, közel 6 tonnás (5775,2 kg) ólomtömbjénél mértünk. (Ő 1880-ban az ólomgolyó fölött helyezte el egy közönséges matematikai ingát. Mérté, hogy a golyó milyen mértékben változtatta meg a lengésidőt. A lengésidő megváltozásával igazolta a tömegvonzást, illetve – a kor szokásainak megfelelően – meghatározta a Föld sűrűségét.)

Második mérésünket az első emeleten a Jolly-gömb mérhető modelljénél – amelynek csupán a felületét borítják ólomlemezek – végeztük. Méréseink igazolt-

10. ábra. Eredeti Eötvös-inga a müncheni Deutsches Museumban.



ták a különbséget (9. ábra). A múzeumban boldogan fotóztuk a kiállított eredeti Eötvös-ingát, Süss Nándor alkotását (10. ábra).

Nagy tanulság, hogy a számítógép, az okostelefon, vagy más elektronikus eszköz segítségével végzett fizikai mérések mellett a mai napig létjogosultsága van a 140 év előtti kísérleti elrendezéseknek.

A nehézségi gyorsulás, a g mérése

A Magyar Természettudományi Társulat *Than Károly* elnökletével „1879 jan. 15-ikén a m. tud. akadémia kis termében” tartotta évi közgyűlését. Itt jelentették be, hogy a választmány megbízta „Dr. B. Eötvös Loránd urat a nehézségi gyorsulás meghatározásával itt Budapesten, a Kárpátokban és az Alföldön”. Eötvös egy későbbi választmányi ülésen elmondta, hogy nem tudja teljesíteni a megbízatást, mert nem áll rendelkezésére a méréshez megfelelő terem. Visszaadta a feladatért megelőlegezett 300 koronát, amit még meg is toldott 100 koronával. A feladat azonban foglalkoztatta, és egy demonstrációs mérőeszközt épített.

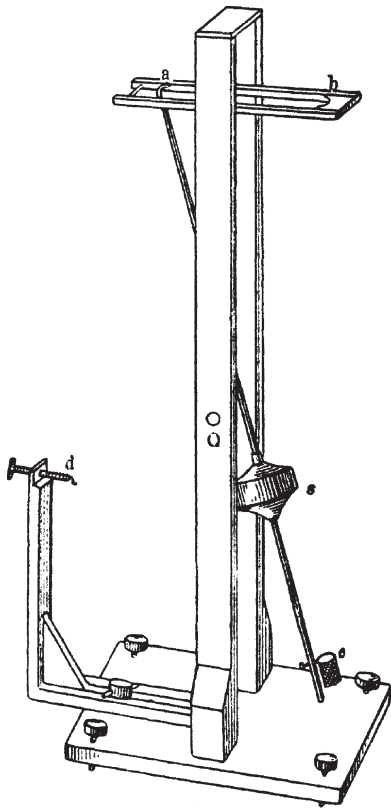
Tanítási órán a tanteremben szabadeséssel is meg kell határozni a g -t. Biztosítani kell a koincidienciát: pontosan abban az időpontban kell indítani az időmérést, amikor a test esni kezd. Több különböző megoldást ismerünk a koincidencia biztosítására.

Tanár Úr látványosan oldotta meg ezt a feladatot. Súlyos ólomtalpra függőleges keretet állított; ennek közepén van egy rúdinger tengelye. A nehezzel ellátott 130 cm hosszú rúd alsó végén kis kosárkát helyeztet el. A rúd felső végére félkörben kivágott, vízszintesen álló fémlapot, egy villát tett. Az inga egyik szélső helyzetében ez a fémlap és az állványhoz rögzített, ugyancsak félkörben kivágott fémlap egy acélgolyót tart. Az ingát ebben az állapotában cérnával rögzítette az állványon lévő állítható csavarhoz. Ha a cérnát elégette, akkor ugyanabban a pillanatban kezdett szabadon esni a golyó és lengeni az inga (11. ábra, balra). Gondos beállítással elérhető, hogy amikor az inga a másik szélső helyzetébe kerül – pontosan a golyó indítási helye alá – akkor érkezik oda a golyó, és beleesik a kosárkába.

Az ejtő ingájának lengésideje fél másodperc. A lengésidőt például tíz lengés idejéből viszonylag pontosan meghatározhatjuk. A kosárka és az állványra szerelt villa közötti távolság 122,5 cm. Így tantermi méréssel a Tudományegyetem egykori Fizikai Intézetének előadó termében (az „Eötvös-teremben”) a nehézségi gyorsulás értéke:

$$g = \frac{245 \text{ cm}}{0,25 \text{ s}^2} = 980 \text{ cm/s}^2.$$

A tudományos pontosságú méréshez nem csak megfelelő terem, de alkalmas mérőműszer sem állt Eötvös rendelkezésére. 30 évvel később úgynevezett négyingás műszereket vásárolt és *Oltay Károly* műegyetemi tanárt bízta meg a méréssel, aki 1908-, 1911-



11. ábra. Balra Eötvös félmásodperces ejtőingájának rajza, míg jobbra annak szombathelyi másolata. (Fotó: Molnár László)



12. ábra. Feszt László rézkarca (1994).

és 1913-ban Magyarország több helyén mérte a g -t. Budapesten a „kir. József műegyetem fizikai intézetében (108 m magasan, Greenwich-től keletre: $19^\circ 3' 11''$ és az északi szélesség $47^\circ 28' 49''$ helyén)” $g = 980,852 \text{ cm/s}^2$ értéket kapott.

Eötvös félmásodperces kosaras ejtőingája az 1970-es évek óta a Műszaki Múzeumban van, leltári száma 75.254.1. 1992-ben egy másolat készült róla (11. ábra, jobbra) a Berzsényi Dániel Főiskola Fizika Tanszékén Szombathelyen, Somogyi Péter szakdolgozati munkája.

A földmágnesség kimutatása

Eötvös számos, eredeti, egyszerű kísérletei közül már csak egyet emelünk ki. Ezt is azért, mert az 1960-as évektől kezdve Budapesten, az ELTE Kísérleti Fizika Tanszékének Múzeum körüti, II. emeleti előadótermében és 1995-től Szombathelyen, a Berzsényi Dániel Főiskola Fizika Tanszékén is bemutatták.

Idézünk a 1893-as, az első Mathematikai és Fizikai Társulati közgyűlésről szóló ismertetésből:

„Az előadások sorát b. EÖTVÖS LORÁND zárta be. ... Ezúttal ő is csak két ilyen kísérletet kíván bemutatni. ...

Az egyik az indukció kimutatása, a mely egyenes vezetőben keletkezik akkor, a midőn ez a földi mágneses térben mozog. Ennek elektrom-indító ereje elemi úton kiszámítható s értéke luV , ha l a vezető hossza, u a mozgás sebessége, V pedig a földmágnesség verticalis componense. A bemutatott kísérletben $l = 200$, $V = 0,3$,

u pedig 100, mely adatokból $E = 200.100.0,3 = 6000 \text{ CGS}$, vagyis mintegy $6/100,000 \text{ Volt}$.⁴

A vezető egymástól 2 méternyi közben kifeszített dróton volt mozgatható, s az eközben indított áram a galvanomotéren 5-10 foknyi kitérést okozott, melynek iránya a mozgás irányától függ.

A másik kísérlet a tömegvonzás bemutatása volt.”

Ezzel az írással, és zárásként Feszt László grafikájával (12. ábra) szeretnénk tisztelni Tanár Úr emléke előtt, halálának 100. évfordulóján, 2019-ben, az Eötvös Loránd emlékében.

Irodalom

- Báró Eötvös Loránd-füzet. *Mathematikai és Fizikai Lapok* 27(1918) 6–7. füzet
- Rybár István: VII. Előadásairól és eredeti előadási kísérleteiről. *Báró Eötvös Loránd Emlékkönyv*. Budapest (1930) 240–260.
- Eötvös Loránd: Vizsgálatok a gravitáció és a mágnesség köréből. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 14 (1896) 221–266; német fordításban: Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. *Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge* 59 (1896) 354–400.
- Eötvös Loránd: A nehézség és a mágneses erő nivófelületeinek és változásainak meghatározása. *Mathematikai és Fizikai Lapok* (1900) 361–385.
- <https://drive.google.com/open?id=1IHZHiEDmvO9IAM0mEOngSNgtAVCKAqUq>
- Akadémiai Értesítő* 1 (1890) 274. és *Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn* 8 (1891) 450–451.
- A Szt. Gellérthegy vonzó erejére vonatkozó vizsgálatok *Természettudományi Közlöny* (1889) 198.

⁴ A számértékek közötti szorzópont az akkori nyomdai konvenció szerint a számok lábánál volt, és vessző választotta el a keletkező feszültségérték nevezőjében a nullákat.

A SZÁMTANI ÉS MÉRTANI KÖZÉP KARRIERJE A FIZIKÁBAN

Biró Tamás Sándor
MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont

E cikk célja bemutatni, hogy a fizika mélyen fundamentális koncepciói, mint az entrópia és a kvantumumos elmosódás¹ nagyon egyszerű, középiskolában is tárgyalt összefüggésekből kiindulva is felépíthetők, miközben a szakember számára is új élményt, további mélységet adhat e két, általában külön tárgyalt jelenség – bizonyos matematikai képletek mentén történő – összekapcsolása. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség általában algebrai alakban ismert, de eredete geometriai, s ezáltal sokkal régebbi lehet, mint algebrai formuláink. Már a régi görögök is tudták, tudhatták, csak jelentése számukra még egészen más volt.

A továbbiakban ezt az összefüggést tárgyalom, igen egyszerű megfogalmazással indítva, s ahol a helyszűke megengedi bizonyításokkal és megjegyzésekkel fűszerezve. Azután fokozatos általánosításokról esik szó, amelyek elvezetnek annak belátásához, hogy az entrópia az egyenletes eloszlásra maximális, természetesen további megszorító feltételek híján. Ennek kapcsán kiderül, hogy e tulajdonsághoz elegendő egy bizonyos konvexitás, amit nem csak a klasszikus boltzmanni képletben szereplő logaritmus függvény elégít ki. Vannak modern javaslatok más képletekre is, és ezek némelyike bizonyos jelenségcsoporthoz – ahol a klasszikus termodinamikai feltételek nem teljesülnek hiánytalanul – kapcsolódva természetesebb, egyszerűbb leíráshoz vezet.

Formális véletlennek tűnik, de ugyanez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerepel a kvantumfizikai mennyiségeket kezelő hermitikus operátorokra levezetett, a mért értékek varianciáinak szorzatára érvényes alsó határ kifejezésében. Az ilyen egyenlőtlenségeket szokás „határozatlansági relációknak” nevezni; az eredeti és leginkább ismert összefüggés a hely- és impulzuskoordináták közötti, ez *Heisenberg-től* származik. Azonban más mennyiségpárok-

ra is igaz, és ennek kapcsán a modern fizika további elméleti konstrukcióinak megtekintéséig is eljuthatunk, jelesül az energia és idő közötti, illetve az energia és impulzus közötti, a varianciák szorzatára vonatkozó alsó határt kifejező egyenlőtlenségekig. Érdekes módon ezen megfontolások egyike a gyorsulással arányos hőmérséklet (úgynevezett Unruh-hőmérséklet [1]) szerepére is rámutat egy váratlan nézőpontból. Remélem, hogy mindez az Olvasónak is szórakozást és egyben szellemi kalandot nyújt.

A számtani, mértani és a harmonikus közép rangsora

Ez a fejezet általános középiskolai ismereteknél nem kíván magasabb matematikát.

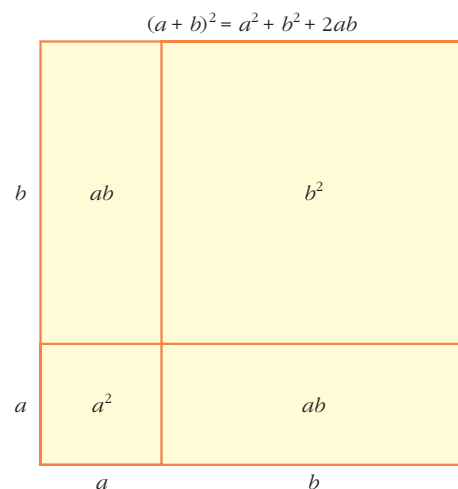
A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség, az $A \geq G$, talán nem algebrai, hanem inkább geometriai eredetű. Az 1. ábrán egy négyzet felosztása látható, az oldalhossz két részre, egy a és egy $b > a$ hosszúságú részre bontásával.

Ez a felbontás a teljes, $(a+b)^2$ területű négyzetet egy a^2 , illetve egy b^2 területű kisebb négyzetre és két egybevágó, egyenként ab területű téglalapra osztja fel. A teljes területet kifejező egyenlet

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab. \quad (1)$$

Természetesen a régi görög szemlélet szerint itt a is és b is pozitív mennyiségek (persze nem használtak latin betűket, sőt görögöt sem e tény kifejezésére). A modern algebrai szemléletű diák rögtön úgy néz rá az (1) képletre, amiben a akár $-a$ -val is helyettesíthető,

1. ábra. Egy $a+b$ oldalhosszúságú négyzet felbontása az oldal felosztásával két kisebb, egymással általában nem egyenlő négyzetre és két egybevágó téglalapra.



¹ Nem támogatom a „határozatlanság” fordítást az eredeti német „Unschärfe” kifejezésről, amely az angol átmenetben az „uncertainty” révén még őrizte a kép életlenségének, bizonytalanságának jelentését is, de a magyar szóban már az elemi, atomi részecskéket mintegy döntési képességgel és az ezzel kapcsolatos hezitálással ruhazza fel, ami teljesen félrevezető.



Biró Tamás Sándor elméleti fizikus, az MTA Wigner FK RMI igazgatóhelyettese, tudományos tanácsadó. Kutatási területe a nehézion-fizika, a kvark-gluon plazma, amely sokszor extrém sűrű és forró, erősen kölcsönható rendszerekben térelméleti és statisztikus fizikai módszerek alkalmazását is megköveteli. Ezt jól tükrözi a Springer kiadó *Fundamental Theories of Physics* sorozatában megjelent könyve, *Is There a Temperature? – Conceptual Challenges at High Energy, Acceleration and Complexity*.

egy geometriai alakzat oldalhossza azonban nem lehet negatív. Mégis van kiút a geometria nyelvén is: most az összességében b oldalhosszúságú négyzet egy $a > 0$ és egy $b - a > 0$ felosztását tekintjük. Ezzel így alakul a fenti egyenlet:

$$b^2 = a^2 + (b - a)^2 + 2a(b - a). \quad (2)$$

Ezt az egyenlőséget már csak rendezni kell (a mértan nyelvén a kivágott alakzatokat ide-oda tologathatjuk az összeg egyenlőségének két oldalán). Eredményünk a különbség-oldalhosszú négyzet területének kifejezése:

$$(b - a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab. \quad (3)$$

Nyilvánvaló, hogy a negatív értékek és a számokat helyettesítő betűk elfogadásával (ami azonban Európában nem régebbi a 12. századnál) már az első kifejezés tartalmazza a különbségre vonatkozó eredményt is.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy minden négyzet területe nagyobb nullánál, vagy esetleg egyenlő vele, amikor az alakzatot egyetlen pontra, nulla oldalhosszúságúra húzzuk össze. A fenti két eredmény közös kifejezése

$$(|b| - |a|)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \geq 0. \quad (4)$$

Innen egyszerű átrendezés adja a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2) \geq \sqrt{|a|^2 |b|^2}. \quad (5)$$

Ebben az egyenlőtlenségben a bal oldalon az $|a|^2$ és $|b|^2$ mennyiségek átlaga, számtani közepe szerepel, míg a jobb oldalon ugyanazok mértani közepe. Tehát bármely két nemnegatív a_1, a_2 számra igaz, hogy

$$A_2 \equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \geq a_1^{1/2} a_2^{1/2} \equiv G_2. \quad (6)$$

Itt a négyzetgyököt – nem véletlenül – immár $1/2$ -ik hatványként jelöltük.

Ezen alapegyenlőtlenségből kiindulva további eredmények is nyerhetők. A legismertebb, s talán legközvetlenebb, a harmonikus közép beillesztése e sorba. Ehhez egyszerűen a fenti (6) egyenletet a tagok reciprokára, $1/a_1$ -re és $1/a_2$ -re alkalmazzuk:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \geq \frac{1}{a_1^{1/2} a_2^{1/2}}. \quad (7)$$

Mindkét (pozitív) oldal reciprokát véve az egyenlőtlenség megfordul:

$$a_1^{1/2} a_2^{1/2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}. \quad (8)$$

Ezzel bizonyítást nyer az egyszerű közepek hármas rangsora: $A_2 \geq G_2 \geq H_2$.

Az egyenlőtlenség általánosítása

E fejezet tagozatos középiskolai és kezdő egyetemi ismereteket tárgyal.

Mennyire tudjuk a fenti szép eredményt a közepek rangsoráról általánosítani? Ez több lépésben lehetséges. Elsőként az $1/2$ - $1/2$ szorzók (súlyfaktorok) és hatványok helyett tekintsünk általános p_1 és p_2 , nulla és egy közé eső számfaktorokat, azaz $p_i \in [0, 1]$. Az egyetlen kikötés, hogy összegük egységnyi: $p_1 + p_2 = 1$. Ekkor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alakja az alábbi:

$$A_2 \equiv p_1 a_1 + p_2 a_2 \geq a_1^{p_1} a_2^{p_2} \equiv G_2. \quad (9)$$

Bizonyítását két lépésben végezzük el. Először felteszünk, hogy $a_1 > a_2$. Ha nem így lenne, felcseréljük a két elemet és az átnevezés után teljesül a feltevés. Vagyis az $a_1 > a_2$ kritérium nem szorítja meg az általánosságot, ennek alapján az $a_1/a_2 = 1 + x$ arány képletében $x > 0$. Továbbá legyen $p_1 = p$ és ekkor $p_2 = 1 - p$. Osztvá $a_2 > 0$ -val a (9) egyenletet kapjuk hogy

$$p(1 + x) + (1 - p) \geq (1 + x)^p. \quad (10)$$

Az állítást egyszerűsítve, $1 + px \geq (1 + x)^p$ áll fenn nulla és egy közötti p -re és pozitív x -ekre.

Az $1 + x$ összeg egynél kisebb (tört) hatványát bonyolult meghatározni, ezért újabb apró trükkhöz folyamodunk: megvizsgáljuk az egyenlőtlenséget $p = 1/w$ értékekre, ahol w pozitív egész szám. E vizsgálat eredményét azután kiterjesztjük (igazából „elfolytatjuk”) tetszőleges $w > 1$ -re és ezzel tetszőleges $0 < p < 1$ -re. Átrendezve (10)-et és $w > 1$ hatványra emelve kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{x}{w} \right)^w \geq 1 + x. \quad (11)$$

Itt már a bal oldal egy kéttagú összeg (eredetileg egész, később tetszőleges) hatványa, ami a binomiális képlettel sorba fejthető. Az így kapott kifejezés

$$1 + x + \binom{w}{2} \frac{x^2}{w^2} + \dots \geq 1 + x, \quad (12)$$

– ahol a \dots jelölés magasabb x hatványokat takar – minden $x > 0$ értékre pozitív vagy esetleg nulla tagokat tartalmaz a bal oldalon, túl az $1 + x$ -en, ami a jobb oldalon is áll. Vagyis a kijelentésünk igaz² egész $w = 1/p$ értékekre.

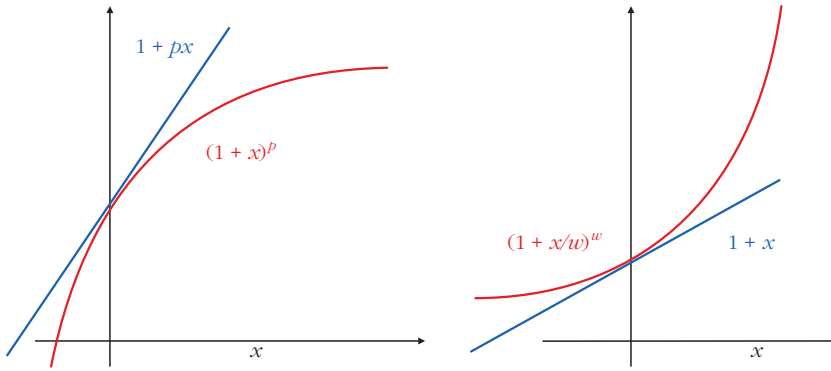
² Itt a

$$\binom{w}{k}$$

kifejezés a w -ből k -szor az x -et és $(w - k)$ -szor az 1-et választva adódó $(x/w)^k$ tagok számát jelöli, értéke

$$\frac{w!}{k!(w - k)!}.$$

A $w!$ (w faktoriális) a számok szorzata 1-től w -ig.



2. ábra. Az $(1+x)^p$ (bal oldali ábra) és az $(1+x/w)^w$ görbék futásai (jobb oldali ábra), érintőegyeneseikkel összehasonlítva.

A köztes értékre történő elfogadásához nézzük meg, min múlt ez a bizonyítás! Visszakanyarodva a geometriai szemlélethez két függvényt hasonlítunk össze mind az eredeti, mind a $w = 1/p$ -t használó megfogalmazásban. Az egyenlőtlenség az adott függvények konkáv, illetve konvex voltát fejezik ki. A 2. ábrán láthatók a bal oldalon a (10) és a jobb oldalon a (11) egyenlőtlenség görbéi.

Mindkét esetben az egyenest kék, míg a görbét piros színnel jelöltük. Először az egyenes egyenlete $g(x) = 1+px$, a görbéé $f(x) = (1+x)^p$. Közös az értékük $x = 0$ -nál, $f(0) = g(0) = 1$. Ez egyébként az $a_1 = a_2$ eset, amikor két egyenlő mennyiség közepét képezzük. Ekkor természetesen az egyenlőtlenség határesetre, az egyenlőség teljesül: a számtani közép minimuma egybeesik a mértani közép maximumával. Az érintő egyenletét a függvények első deriváltja adja meg, ebben a pontban $f'(0) = g'(0) = p$. Végezetül a konvexitás az x tengely felől nézve a második derivált negativitását jelenti. Az egyenes se nem konkáv, se nem konvex, ott ez a derivált eltűnik, $g''(x) = 0$. A görbére pedig $f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2} < 0$, azaz minden pontjában elhajlik az egyenestől, az x tengely felől nézve közelebbre. Ezért minden x -re, $f(x) \leq g(x)$, azaz beválílik a számtani közép szupremáciájának fenti általánosítása.

Ugyanez az elemzés végezhető el az alternatív alakra is. Itt az egyenes egyenlete $g(x) = 1+x$ (kék) a görbe egyenlete pedig $f(x) = (1+x/w)^w$ (piros). A megfelelő függvény-, illetve deriváltfüggvény-értékek rendre: $f(0) = g(0) = 1$ közös érték az érintőpontban, $f'(0) = g'(0) = 1$ közös meredekség ugyanebben a pontban, és végül $g''(x) = 0$ mellett (hiszen ez egyenes) $f''(x) > 0$. Ez a görbe pedig éppen az ellenkező irányba hajlik minden pontjában, ezért $f(x) \geq g(x)$. Mindkét eset elemzése ugyanazt bizonyítja: a két tagú számtani és mértani közép egyenlőtlensége általánosítható tetszőlegesen, de 0 és 1 közötti súlyozással.

Egy mély levegővételre elegendő röpké szellemi pihenő után nekilátunk, hogy eljussunk a 20. század elején először közölt további általánosításhoz, a Jensen-egyenlőtlenséghez [2]. Első lépésként ehhez az $a_2 \geq G_2$ állítást szeretnénk tetszőlegesen sok tagra kiterjeszteni. Jelölje a tagok számát $N \geq 1$ és a megfelelő nulla és egy közötti súlyfaktorok szintén adódjanak

össze az 1 értékre: $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ és $p_i \in [0,1]$. Az általános egyenlőtlenség alakja most

$$\sum_{i=1}^N p_i a_i \geq \prod_{i=1}^N a_i^{p_i}. \quad (13)$$

Ezt $N = 2$ -re éppen az imént bizonyítottuk, az általános eset bizonyításához teljes indukcióval jutunk el, azaz $N-1$ -ről N -re következtetünk az alapeset ($N = 2$) felhasználásával. Egy fontos dolgot kell előre látni a zökkenőmentes érveléshez: ha $(N-1)$ tagra a súlyok összege 1 volt,

és ehhez a sokasághoz hozzáveszünk egy N -ik elemet p_N súllyal, akkor az előző p_i -ket újra kell normalizálni. A normalizációs faktor pedig éppen $(1-p_N)$, hogy a súlyfaktorok összege továbbra is 1 maradjon: $p_i \rightarrow (1-p_N)p_i$ minden $i < N$ -re. Ezt megszívélve kapjuk az alábbi kifejezéseket

$$A_N = (1-p_N)A_{N-1} + p_N a_N, \quad (14)$$

$$G_N = G_{N-1}^{1-p_N} a_N^{p_N}.$$

Az első kifejezésre a kéttagú egyenlőtlenséget, azután az $(N-1)$ feltevést alkalmazva kapjuk

$$A_N \geq A_{N-1}^{1-p_N} a_N^{p_N} \geq G_{N-1}^{1-p_N} a_N^{p_N} = G_N. \quad (15)$$

Ezzel bebizonyítottuk a tetszőlegesen súlyozott N tagú számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Jensen-egyenlőtlenség és entrópia

E fejezethez az egyetemi fizikus kutató szak BSc fokozatig terjedő tananyagának ismerete szükséges lehet, de van akinek anélkül is érthető.

A fenti (13) egyenlőtlenség alkalmazható a termodinamika, a statisztikus fizika és az információelmélet központi fogalma, az entrópia vizsgálatára. Vegyük az egyenlőtlenség logaritmusát, ez – monoton növekvő függvény lévén – nem változtatja meg az egyenlőtlenség irányát:

$$\ln \left(\sum_{i=1}^N p_i a_i \right) \geq \sum_{i=1}^N p_i \ln a_i. \quad (16)$$

Alkalmazzuk ezt az eredményt a speciális, $a_i = 1/p_i$ választásra. A konstrukció háttérében az áll, hogy minél valószínűtlenebb egy esemény, annál több információt nyerünk a megfigyelésével, amikor mégis bekövetkezik. Ez magyarázza az $a_i = 1/p_i$ választást. A logaritmus pedig a szorzatot összeggé alakítja, s éppen ez a tulajdonság kívánatos akkor, ha két esemény bekövetkezésének a valószínűsége a valószínűségek szorzata (az ilyen eseménypárokat függetleneknek

nevezzük). Megjegyezzük, hogy a (16) egyenlet bal és jobb oldalán is egy-egy N tagú szumma áll, egyaránt a $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ és $p_i \in [0,1]$ súlyokkal. A statisztika nyelvén ezek várható értékek, és ezek között a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$\ln \langle a \rangle \geq \langle \ln a \rangle. \quad (17)$$

Történetesen a fent jelzett választással egy, a Boltzmann (Gibbs, Planck, Shannon) által megalapozott entrópiaképletre vonatkozó egyenlőtlenséghez jutunk el:

$$S_B[p_i] = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \leq \ln N = S_B[1/N]. \quad (18)$$

A jobb oldali, majoráló érték, az $\ln N$ éppen a $p_i = 1/N$ választással a bal oldali képlet értékét is adja egyben. Ezzel azt az eredményt kaptuk, miszerint a Boltzmann entrópia az egyenletes eloszlásra maximális.

Felmerül a kérdés: ragaszkodni kell-e a logaritmus-hoz? Hiszen a fentebb bizonyított egyenlőtlenség ennél általánosabb, bolond lenne a Természet, ha ezt nem használná ki. Valóban, a logaritmus helyett más függvény is elképzelhető, ezzel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (logaritmus) még tovább általánosítható. Visszatérve a geometriai vizsgálódásokhoz, megállapítjuk, hogy az x tengely felé hajló, $f''(x) < 0$ tulajdonságú függvények egy adott intervallumon a húr felett futnak. Azt állítjuk, hogy ilyen függvényekre igaz az alábbi Jensen-egyenlőtlenség:

$$f\left(\sum_{i=1}^N p_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^N p_i f(a_i). \quad (19)$$

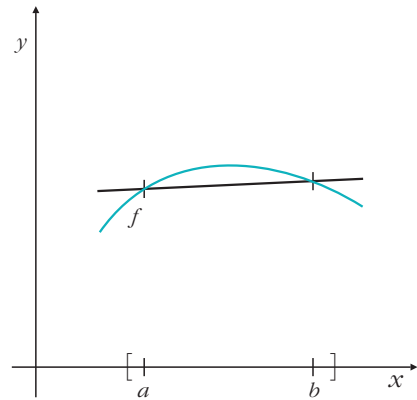
A 3. ábrán egy ilyen függvényt mutatunk. A $\sum p_i a_i$ összeg értéke a lehetséges a_i -k legkisebb és legnagyobb értékei között változik, ennek függvényértéke – a fenti (19) egyenlőtlenség bal oldala – mindig a görbére esik. Ugyanakkor a függvényértékek, függőleges koordináták hasonló arányú keverékösszege az $(a_i, f(a_i))$ sarokpont-koordináták által határolt sokszög belsejére esik, ami ebben az esetben csak egy húr, amely a görbe alatt köti össze a sarokpontokat. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha egyetlen $p_i = 1$ és a többi nulla. Az $f(x) = \ln x$ második deriváltja negatív, $f''(x) = -1/x^2 < 0$, ez egy ilyen tulajdonságú görbe.

Hasonlóan kezelhető az $f''(x) > 0$ eset, ekkor megfordul az egyenlőtlenség. Ezt demonstráljuk a 4. ábrán, $N = 4$ esetén. A függvény görbéje a húrok által határolt sokszög alatt fut. Ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^N p_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^N p_i f(a_i). \quad (20)$$

az igaz állítás.

Ez az általános Jensen-egyenlőtlenség is kapcsolatba hozható az entrópiával, pontosabban az entrópia meghatározására javasolt, a logaritmus helyett már más függvényeken alapuló képletekkel. Számos ilyen kép-



3. ábra. Egy $f''(x) < 0$ függvény $f(x)$ görbéje a húrja felett fut ($N = 2$ eset demonstrációja).

letjavaslat született az idők során, eltérő motivációkból. A fenti, konvex függvényekre vonatkozó (19) egyenlet speciális esete, amikor a tagok $a_i = 1/p_i$ alakúak; ez a klasszikus eset analógiájaként a Boltzmann-entrópiaképlet „trace formula” típusú általánosítása: a logaritmusra, mint ezt fentebb láttuk, $f'' < 0$, és ezért

$$f(N) \geq \sum_{i=1}^N p_i f(1/p_i). \quad (21)$$

Az $f(x) = \ln x$ esetén ez ismét visszaadja Boltzmann képletét:

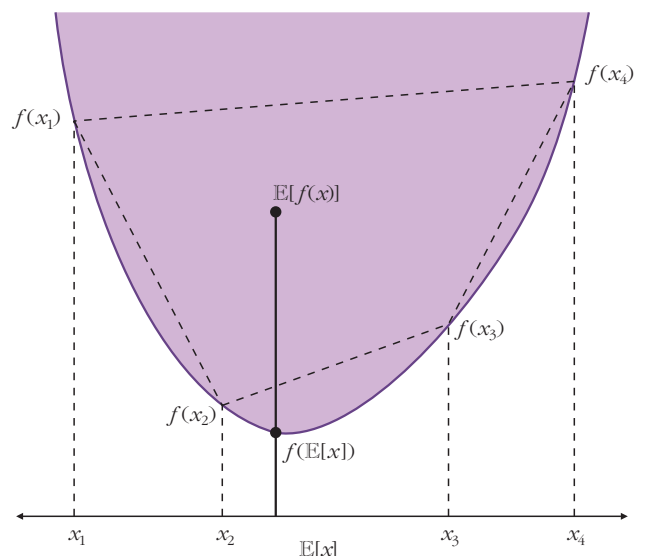
$$S_B[U] = \ln N \geq \sum_{i=1}^N p_i \ln \frac{1}{p_i} = S_B[p_i],$$

azonban minden $f''(x) < 0$ függvényre az egyenletes eloszlás a maximális entrópiájú!

Példaként tekintsük Tsallis entrópiaképletét [3]

$$S_T[p] = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^q - p_i}{1 - q} = \sum_{i=1}^N p_i f(1/p_i) \geq 0. \quad (22)$$

4. ábra. Az $f''(x) > 0$ függvényre vonatkozó általánosított Jensen-egyenlőtlenség szemléltetése $N = 4$ sarokpontra.



Ebben az esetben³

$$f(1/p_i) = \frac{p_i^{q-1} - 1}{1 - q}$$

tehát

$$f(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}.$$

Így $f'(x) = x^{-q}$ és $f''(x) = -qx^{-q-1}$. Minden $q > 0$ -ra $f'' < 0$. Látható, hogy a Tsallis-entrópia is az egyenletes eloszlásra maximális

$$S_T[1/N] = \sum_{i=1}^N \frac{N^{-q} - N^{-1}}{1 - q} = \frac{N^{1-q} - 1}{1 - q} = f(N). \quad (23)$$

ezért $S_T[1/N] \geq S_T[p_i]$ garantált. Ez a képlet olyankor használatos, amikor az additív (összeadódó) entrópiához nem a valószínűségek szorzata tartozik, hanem – a nem szűnő korrelációk miatt – magas korrekciók járnak. Megfordítva, a szorzatként előálló közös (joint) valószínűségek esetén az entrópia nem additív, hanem az

$$S_{12} = S_1 + S_2 + (q - 1) S_1 S_2 \quad (24)$$

szabályt követi. Véges N szabadsági fokú ideális fizikai rendszerek tanulmányozása során megmutatkozott, hogy jellemző a $q = 1 + O(1/N)$ közelítő viselkedés. Az eltérés az additív ($q = 1$) esettől inkább a kis rendszerekre jellemző [4–6]. Általában mi lehet az ilyen viselkedés oka? Miért nem additív minden rendszer entrópiája, ahogy tanultuk és – részben – tanítottuk? Az egyedi, összeadandó tagok az alrendszerek méretével, térfogatával, a szabadsági fokok számának logaritmusával nőnek, a korrekció viszont a csatlakozási felülettel („interface”) és az ebből egy korrelációs hosszal szorozva képzett térfogatmérettel arányos. Az egyszerű összehoz képest ez nem elhanyagolható mindazon esetekben, amikor vagy a kölcsönhatás nem cseng le elég rövid távolság megtétele után, vagy az érintkezési felület fraktális, és ezzel sokkal lassabban válik az egyedi térfogatoknál kisebbé, mint ahogyan megszoktuk.

Minimális kvantumvariancia

Ebbez a fejezetben a fizikus szak felsőbb évfolyamainak tudása lehet szükséges, bár bizonyos kijelentések nem (vagy nem feltétlenül) szerepelnek az általános tananyagban.

A kvantumfizika elméleti előzményeihez, a newtoni mechanikához és az elektrodinamikához képest jelentős szemléletváltást hozott. Míg addig a fizikai modelleket valós függvények és az azokat igazgató differenciálegyenletek nyelvén fogalmazták meg, az

³ Tsallis ezt a függvényt q -logaritmusnak nevezte el.

„új fizika” a mérhető (valós számértékű) mennyiségeket egy-egy különleges mátrix sajátértékeiként kezeli. A mátrixok, amelyek vektorokra hatva, azokat nagyítják vagy kicsinyítik, esetleg forgatják, csupa valós sajátértéket (nagyítási tényezőt) akkor nyújtanak, ha hermitikusak. Ez azt jelenti, hogy a főátlóra tükröszimmetrikus helyzetű tagjaik egymás komplex konjugáltjai. Röviden: ez az a matematikai alap, amely a kvantumfizikai számítások gerincét képezi.

Ilyen hermitikus operátorok és különböző, akár komplex együtthatós, tehát már nem hermitikus kombinációik különböző lehetséges mérési eredményeket írnak le. Itt is – a négyzet területi felbontásához hasonlóan – valaminek a pozitív vagy nulla voltából vezethetünk le egyenlőtlenségeket.

Legyenek $A = A^\dagger$, $B = B^\dagger$ hermitikus operátorok. A^\dagger azt jelöli, hogy az A mátrix elemeit a főátlóra tükröztük és komplex konjugáltuk. Az egyszerűség kedvéért zérus várható értéket feltételezünk $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$. Ekkor a variancia egyszerűen az operátor négyzetének várható értéke, $\Delta A^2 = \langle A^2 \rangle$ és $\Delta B^2 = \langle B^2 \rangle$. Konsturuálunk egy összetett operátort:

$$C \equiv \lambda A + \frac{i}{\lambda^*} B. \quad (25)$$

Ez elég általános, de a két komplex együttható nem független. A definíció adjungáltja (a mátrix transzponáltja a főátlóra szimmetrikus elemek cseréjével és komplex konjugálása)

$$C^\dagger \equiv \lambda^* A - \frac{i}{\lambda} B.$$

Ezzel

$$C C^\dagger = |\lambda|^2 A^2 + i B A - i A B + \frac{1}{|\lambda|^2} B^2, \quad (26)$$

$$C^\dagger C = |\lambda|^2 A^2 - i B A + i A B + \frac{1}{|\lambda|^2} B^2.$$

A lehetséges kvantumállapotok terében – a Hilbert térben vett vektorok hossz négyzetei miatt – bármely operátorra igaz, hogy $\langle C C^\dagger \rangle \geq 0$ és $\langle C^\dagger C \rangle \geq 0$.

A „határozatlansági reláció” egy olyan egyenlőtlenség a varianciákra (szórásnégyzetekre) nézvést, ami a $\langle C C^\dagger \rangle \geq 0$ és $\langle C^\dagger C \rangle \geq 0$ következménye. A (26) egyenlet következményeként a várható értékek közötti alábbi egyenlőtlenséget – teljes analógiaként a kiindulási négyzetfelosztási probléma tárgyalásával – kapjuk:

$$\frac{1}{2} \left(|\lambda|^2 \langle A^2 \rangle + \frac{1}{|\lambda|^2} \langle B^2 \rangle \right) \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} [A, B] \right\rangle \right|. \quad (27)$$

Ez az egyenlőtlenség is tartalmazza a számtani közepet, aminek minimuma éppen a mértani közép! Ez a továbblépés kulcsa: a (27) bal oldala maga is egy számtani közép. Mivel λ tetszőleges komplex együttható, az egyenlőtlenség a minimumában – amikor az $\langle A^2 \rangle$ és $\langle B^2 \rangle$ tagok mértani közeparányosát képez-

zük – is érvényes marad. Ez éppen a varianciák szorzatára ad alsó határt:

$$\Delta A \Delta B = \sqrt{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle} \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} [A, B] \right\rangle \right|. \quad (28)$$

Ez a kvantumfizikában érvényes, általános „határozatlansági relációnak” nevezett egyenlőtlenség. E képleteket talán találóbb lenne „minimális varianciarelációknak” hívni. Megjegyezzük, ha az itt tárgyalt hermitikus operátorokhoz az egységoperátorral arányos korrekciókat adunk, akkor $A_2 = A + a\mathbb{I}$ és $B_2 = B + b\mathbb{I}$ -re igaz, hogy $[A_2, B_2] = [A, B]$, valamint az, hogy $\Delta A_2^2 = \langle A_2^2 \rangle - \langle A_2 \rangle^2 = \langle A^2 \rangle$, és hasonlóan B_2 -re. Ezzel egy általános eredményt kaptunk:

$$\Delta A \Delta B \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} [A, B] \right\rangle \right|. \quad (29)$$

Sok speciálisan érdekes hermitikus A és B operátorra alkalmazható ez az eredmény. A legismertebb, és időrendben az első alkalmazás a hely- és impulzuskoordináta közötti eredmény

$$\Delta x \Delta p \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} \frac{\hbar}{i} \right\rangle \right| = \frac{\hbar}{2}. \quad (30)$$

Ezt hívjuk a Heisenberg-féle határozatlansági összefüggésnek. Ekkor az egyenlőtlenség jobb oldala egy természeti állandó.

Azonban más esetekre is létezik hasonló egyenlőtlenség. Különösen érdekesek azok, amelyek az energiát és az azt leíró Hamilton-operátort foglalják magukba. Például az energia és az impulzus varianciáinak a szorzatára is van alsó határ:

$$\Delta E \Delta p \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} [H, p] \right\rangle \right| = \frac{\hbar}{2} |\langle F \rangle|. \quad (31)$$

Az alsó határt az F erő várható értékének abszolút értéke adja. Amikor ez nulla, például a kvantumoszillátor, vagy az atomokhoz kötött elektronállapotok esetén, akkor a jobb oldal nulla és lehetséges, hogy az energia varianciája nulla, $\Delta E = 0$. Ilyenkor lehet a kvantumrendszer „éles” energiaállapotban. Máskor azonban – például egy egyirányú gyorsulást okozó állandó erő, mint a nehézségi gyorsulás esetén – itt is megjelenik egy alsó határ, az energia értéke nem lehet éles. Igaz is, ekkor a külső erő, ami gyorsít, munkát is végez a rendszeren. Mondhatjuk „energetikailag kommunikál” a megfigyelt kvantumrendszerrel.

Hasonló igaz a hely és az energia együttes megfigyelése esetén fellépő varianciák szorzatára:

$$\Delta E \Delta x \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} [H, x] \right\rangle \right| = \frac{\hbar}{2} |\langle v \rangle|. \quad (32)$$

Itt az alsó határt a v sebesség várható értéke állítja be. (Egy figyelmeztetés: ez még komplikációkhoz vezethet, hiszen a sebesség mérése függ az inerciálisan mozgó megfigyelő saját sebességétől is. A helyes Lorentz-transzformáció ezt és az energia és impulzus egymással keveredését úgy írja le, hogy a fentiek iga-

zak maradnak. Hasonló történik az általános relativitás elmélete szemszögéből az erővel, mivel ott a gyorsulás helyettesíthető egy gravitációs térrel.)

Egy pillanatra lépünk túl a fizikusok számára mindenhol tanított kvantumos elmosódási történeten, és további eseteket is vizsgálunk meg. Léteznek varianciakorlátok Heisenbergen túl is: a kvantumóra-operátor alábbi konstrukciója figyelmeztet erre. Zárt rendszerben egy $A(x, p)$ általános operátor időfejlődését a

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A]$$

összefüggés írja le. Az általunk tárgyalt egyenlőtlenség így alakul:

$$\Delta E \Delta A \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} [H, A] \right\rangle \right| = \frac{\hbar}{2} \left| \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle \right|. \quad (33)$$

Átrendezve

$$\Delta E \frac{\Delta A}{\left| \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle \right|} \equiv \Delta E \Delta t_A \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (34)$$

vagyis minden ilyen A operátor által definiált Δt_A időtartam-varianciának közös alsó korlátja van!

Egy másik a heisenbergin túllépő varianciakorlát adódik gravitációs vöröseltolódás vizsgálatából. Egy radiálisan mozgó foton energiája Schwarzschild-metrikában – amelynek gyenge gravitációs teret feltételező közelítése egy newtoni gravitációs potenciál-tagot mutat – az alábbi:

$$E = \hbar \omega \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \approx \hbar \omega - \frac{GM}{r} \frac{\hbar \omega}{c^2}. \quad (35)$$

Az energia várható értéke dominánsan $\langle E \rangle \approx \hbar \omega$, míg a zérus nyugalmi fotontömeghez tartozó $E(p) = c|p|$ diszperzió miatt $\Delta E = c\Delta p$. Az erő várható értéke

$$\langle F \rangle = \frac{GM}{r^2} \frac{\hbar \omega}{c^2} = \frac{\hbar \omega}{c^2} g,$$

ami úgy néz ki, mintha a foton gravitációs potenciálra reagáló tömege $m = \hbar \omega / c^2$ lenne. Ez nem mond ellent a zérus nyugalmi tömegnek, és különben is csak közelítés. Tovább lépve, alkalmazzuk az „energia-impulzus varianciák szorzata $\geq \hbar/2$ -szer az erő várható értéke” (31) eredményt:

$$\Delta E \frac{\Delta E}{c} \geq \frac{\hbar}{2} \frac{\langle E \rangle}{c^2} g. \quad (36)$$

Ebből a foton kvantumos elmosódására az alábbi mértéket számíthatjuk ki:

$$\frac{\Delta E^2}{\langle E \rangle} \geq \frac{\hbar g}{2c} = \pi k T_{\text{Unruh}}. \quad (37)$$

Miért éppen ez a mennyiség érdekes? Mert ez olyan, mint egy hőmérséklet (illetve az annak megfelelő kT

energia)! Zérus tömegű fotonok Boltzmann-eloszlására $\Delta E^2/\langle E \rangle = kT$ egzaktul adódik. A pontosabb Bose-eloszlásra az eredmény nem sokkal nagyobb, körülbelül $1,13 kT$. A T_{Unruh} Unruh-hőmérséklet, a fenti (37) képletben egy másik, jóval bonyolultabb számolás eredménye [1]. Itt meglepő, hogy a határozatlanság alsó határát jellemző hőmérséklet-szerű paraméter ennél nagyobb, ennek a π -szerese. Lehet, hogy ez rossz hír az ilyen hőmérséklet mérését tervező kísérletek számára...

Összefoglalás

A modern fizika két fontos fogalmával, az entrópiával (információval) és a kvantum elmosódással kapcsolatos egyenlőtlenségeket a számtani és mértani közép közötti, régóta ismert egyenlőtlenség általánosítása-ként tárgyaljuk. E célt az alábbi lépésekben értük el:

1. Ismertettük a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség geometriai levezetését, amely a négyzet területének felosztásából származik.

2. Ez az összefüggés súlyozott átlagokra és azon túl határozott konvexitású függvények statisztikus várható értékére általánosítható.

3. Az entrópia és irreverzibilitás titka a fogalom határozott konvexitása, ez az a követelmény, amit még a

boltzmanni képleten túllépő, nem logaritmikus képleteknek is be kell tartaniuk.

4. A kvantum „határozatlansági” relációnak – amely nemcsak a kanonikus hely- és impulzusmérésekre igaz, hanem általánosabban – is ez az egyenlőtlenség az alapja. Különleges példa a fotonok esete állandó gyorsulás mellett, ami az energia határozatlanságát egy hőmérséklet-jellegű matematikai fogalommal hozza kapcsolatba.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszöni a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem UBB Star programja támogatását ezen munka elkészülte (s az azt megelőző előadás) során. Az NIH (OTKA) K123815 sz. projektje szintén támogatta ezt a munkát.

Irodalom

1. W. G. Unruh: Notes on Black Hole Evaporation. *Physical Review D* 14 (1976) 870–892.
2. J. L. W. V. Jensen: Sur les fonctions et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.* 30 (1906) 175–193.
3. C. Tsallis: *Introduction into Nonextensive Statistical Mechanics (Approaching a Complex World)*. Springer 2009.
4. T. S. Biró, Z. Schram, L. Jenkovszky: Entropy production during the hadronization of a quark-gluon plasma. *European Physical Journal A* 54 (2018) 17.
5. T. S. Biró, Z. Neda: Unidirectional random growth with resetting. *Physica A* 499 (2018) 335–361.
6. Biró Tamás: Túl az exponenciális faktoron. *Fizikai Szemle* 67/12 (2017) 407–411.

ÚJ LEHETŐSÉGEK A LÁTÓÉLESSÉG-VIZSGÁLATI TESZTEK PONTOSSÁGÁNAK NÖVELÉSÉRE

Timár-Fülep Csilla, Erdei Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Atomfizika Tanszék

Kovács Illés, Kránitz Kinga

Semmelweis Egyetem, Szemészeti Klinika

A humán látóélesség vizsgálatára általánosan használt tesztek számos formában léteznek, ami alaposan megnehezíti a mérések összehasonlíthatóságát, a véletlen hiba pedig jelentős, és erősen függ a felvett adatok kiértékelésére választott módszertől. Mindennek tudatos figyelembevételre és a hibák redukálása elengedhetetlen, hiszen a modern klinikai vizsgálatok pontosságigénye messze túlmutat a házi orvosi rendelőben, szemüvegszalagonokban elvégezhető gyors tesztekénél. Cikkünkben sorra vesszük a látásvizsgálati módszerek szisztematikus és véletlen hibáit befolyásoló tényezőket, ismertetjük a jelenlegi módszerekkel

elérhető legnagyobb pontosságot, rámutatunk a szabályozás hiányosságára a környezeti fényviszonyok tekintetében, felhívjuk a figyelmet a pupillaméret látóélességet befolyásoló szerepére, valamint bemutatunk egy saját fejlesztésű, korrelációalapú eljárást, amellyel a mérések véletlen hibája számottevően tovább csökkenthető.

Bevezetés

A pontos és jól reprodukálható látásteszték a kezelés szükségességének elbírálása, illetve várható hatékonyságának előrejelzése szempontjából különösen nagy jelentőséggel bírnak a retina különböző betegségei (időskori makuladegeneráció, diabéteszes makuladéma stb.), valamint szürkehélyog esetén. A látóélesség-vizsgálatok eredményének legfontosabb mérőszáma a páciens vízúsértéke. A szemészek a klini-

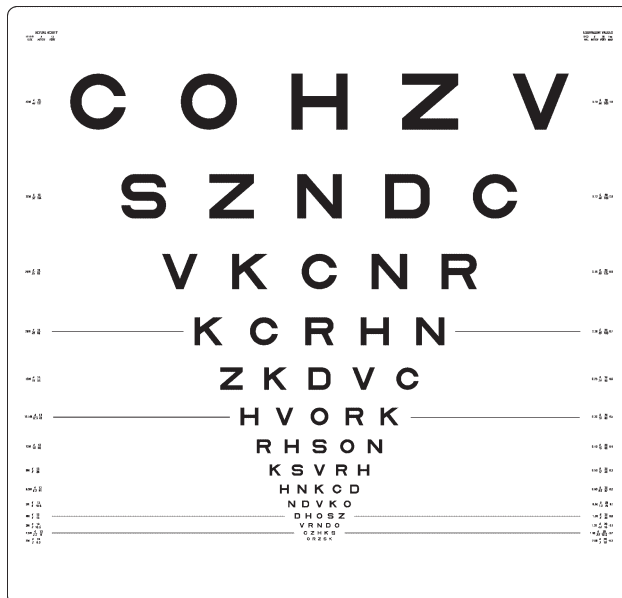
A szerzők köszönetüket fejezik ki a Nemzeti Fejlesztési Minisztériumnak (NFM) a Versenyképességi és Kiválósági Szerződések keretében nyújtott VKSZ-12-1-2013-80 sorszámu *A szürkebályog hatékony gyógyítását elősegítő orvostechnikai kutatás-fejlesztések* című projekt anyagi támogatásáért.

A kutatás az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-3 kód-számu Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

kailag releváns terápiás eredményt, a látásminőség javulására vonatkozó különböző kritériumoknak megfelelően (például minimum öt vagy tíz betű javulás) ezen szám mérhető megváltozása alapján osztályozzák. A különböző intézetekben viszont nem pontosan egyformán szokták elvégezni a tesztek, a mérési körülmények szabályozása nem teljes körű, ráadásul a kiértékelés sem mindig azonos módon történik, ami negatívan befolyásolja a mérések szisztematikus és véletlen hibáit. Mind a fent említett speciális klinikai esetekben, mind a tudományos kutatás szempontjából hasznos lenne tehát egy olyan mérési módszer kidolgozása, amely a jelenlegi eljárásoknál nagyobb pontossággal és jobb megismételhetőséggel rendelkezik [1, 3].

Standard látásvizsgálatok során a páciens feladata a vízustáblán szereplő, fokozatosan csökkenő méretű betűk helyes azonosítása. Az egyik legrégebbi, ám még ma is széles körben ismert megvalósítási mód az úgynevezett Snellen-tábla, amelyen az optimális helykitöltés érdekében a kisebb betűméretekben egyre több karakter szerepel [3, 12]. Magyarországon ennek egyszerűsített, háromoszlopos változata, a Kettes-féle tábla az elfogadott klinikai konstrukció [4]. Később, a látástesztok egységesítése során terjedt el a Bailey–Lovie-elrendezés, amelyben – a mérés önkonzisztenciájának növelése végett – minden sor azonosan öt karaktert tartalmaz. A szabványosítás jegyében a betűk közötti távolságot a betűmérettel megegyezőnek, a sorok közötti távolságot pedig a felső sor méretével azonosnak választották. Az emberi szem gyengülő stimulációra való érzékenységének megfelelően a betűméretet mértani sorozat szerint csökkentik, melynek kvóciense praktikus okokból $10^{0,1}$ [12].

Az egységesítés irányába tett következő lépést a kifejezetten látóélesség-vizsgálatokra kifejlesztett Sloan-karakterekkel (C, D, H, K, N, O, R, S, V és Z) implementált ETDRS (Early Treatment Diabetic Retinopathy



1. ábra. A Bailey–Lovie-elrendezésben Sloan-karakterekkel implementált ETDRS-tábla egy mintapéldánya.

Study) tábla bevezetése jelentette. A betűk speciális négyzetes kialakításának köszönhetően (a teljes függőleges és vízszintes méret megegyezik a vonalszélesség ötszörösével) minimális azok olvashatóságának különbsége, amelyet ráadásul az ETDRS 2000 szabvány az egy sorban előforduló betűkombinációk korlátozásával is kompenzál. A szabványosítás érdekében a táblák megvilágítását is standardizálták, így a klinikai vizsgálatokban csak kalibrált, beégetett fénycsövek használhatók, meghatározott élettartamig [5, 12]. A napjainkra széles körben elfogadott szabvánnyá vált ETDRS-tábla egy mintapéldányát szemlélteti az 1. ábra.

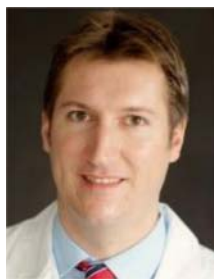
A Bailey–Lovie-elrendezésnek köszönhetően a betűméret az egyetlen olyan paraméter, ami jelentős mértékben változik az ETDRS-tábla sorai közt. Értékét



Timár-Fülep Csilla doktorjelölt a BME Atomfizika Tanszékén. 2013-ban szerezte fizika BSc, majd 2015-ben orvosi fizikus MSc diplomáját. Kutatási területe a humán látóélesség elméleti és kísérleti vizsgálata, valamint modellezése numerikus szimulációkkal. Kutatómunkáját, amelynek fő célja a szürkehályogos betegek részére a jelenlegi megoldásoknál komfortosabb látásérzetet biztosító intraokuláris lencsék kifejlesztése, a Semmelweis Egyetem szemészorvosaival és ipari partnerekkel együttműködésben végzi.



Erdei Gábor egyetemi docens 2003-tól kezdődően a BME Atomfizika Tanszék munkatársa. Fő kutatási területei a képalakító rendszerek tervezése, valamint optikai mérés-technikai módszerek alkalmazása és fejlesztése. 2014 óta ipari együttműködés keretén belül az emberi szem optikai szimulációjával, refraktív / diffraktív intraokuláris műlencsék tervezésével és mérés-technikájával foglalkozik, szoros kooperációban a Semmelweis Egyetem kutató szemészorvosaival.



Kovács Illés a Semmelweis Egyetem Szemészeti Klinikai Ismeretek Tanszékének docense, megbízott tanszékvezetője. Sokrétű műszeres diagnosztikai tapasztalata mellett szakmai gyakorlata kiterjed a vitreoretinális és a szürkehályog-sebészetre, a szemészeti lézerkezelésekre és intravitreális injekciók adására is. Fő kutatási területei közé tartozik a strukturális és funkcionális eltérések vizsgálata a szemfelszín betegségeiben, femtoszekundumos lézer alkalmazása szemsebészetben és a biostatistika.



Kránitz Kinga 2010 óta dolgozik szemorvosként a Semmelweis Egyetem Szemészeti Klinikáján. A betegellátás mellett aktívan részt vesz a Klinikán zajló tudományos kutatásokban és az orvostanhallgatók oktatásában is. PhD értekezését 2016-ban védte meg. Érdeklődési területei közé tartoznak a saruhártyát érintő betegségek és a zöldhályog, valamint foglalkozik a szürkehályogműtétek lehetséges technikai újításaival.

leggyakrabban a látásminőséget közvetlenül meghatározó, a karakterek vonalszélességéhez tartozó szögperc egységben megadott α látószögből származtatják. A mértani méretcsökkenéshez igazodó logMAR – Logarithm of Minimum Angle of Resolution – jelölésnek megfelelően, az s betűméret a látószög tízes alapú logaritmusával fejezhető ki:

$$s \equiv \lg \alpha. \quad (1)$$

A logMAR egységben megadott V vízúsérték definíció szerint ahhoz a fiktív betűmérethez (s_0) tartozik, amely esetén a karakterek P felismerési valószínűsége 50% [5, 8, 12]:

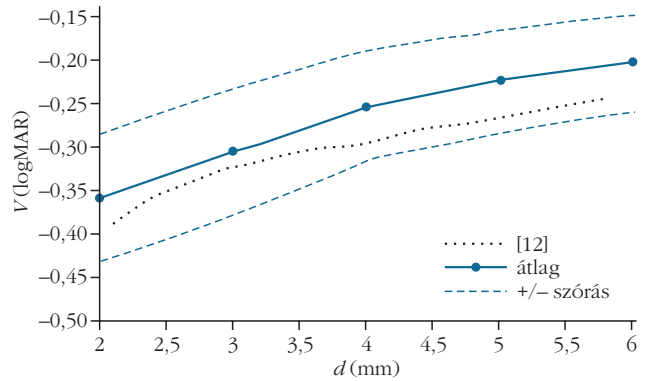
$$V \equiv s_0. \quad (2)$$

A látóélesség-vizsgálatok eredményeként adódó vízúsértéket szisztematikus és statisztikus hibák torzítják, ami korlátozza a betegségek előrehaladásával járó változások mérhetőségét. A vízustáblák egységeítése jelentős mértékben csökkentette a mérési hibát, de a vizsgálat környezeti paraméterei, valamint a mérés menete és a kiértékelés módja továbbra is befolyásolják az eredményt [2, 6, 11]. Ennek megfelelően külön hangsúlyt kell fektetni a mérés körülményeinek megválasztására és szabványosítására, valamint az eredmények kiértékelésére az összehasonlíthatóság és az ismételhetőség növelése céljából, amelyet a következő fejezetekben részletesen tárgyalunk. Cikkünkben bemutatunk továbbá két olyan módszert, amelyekkel a klinikai mérések szisztematikus és véletlen hibája is csökkenthető.

A szisztematikus hibák jellemzői

A különböző helyeken, eltérő időben vagy más orvosok által végzett látóélesség-tesztek eredményeinek összehasonlíthatóságát korlátozó szisztematikus hibák elsősorban a mérési paraméterek pontatlan beállításának, hitelesített értéktől való eltérésének következményei (a kiértékelési módszerekből fakadó hibát a következő fejezetben mutatjuk be). A látásminőséget, és így a mérések kimenetelét befolyásoló legjelentősebb tényezők a vizsgálóhelyiség megvilágítása [9, 10], a vízustábla háttérvilágítása [11], valamint a mérési távolság beállítása. Ezen hibaforrások számszerűsített hatásait listázza az 1. táblázat.

1. táblázat		
A látóélesség-vizsgálatok legjelentősebb szisztematikus hibaforrásai.		
kiváltó ok	paraméterváltozás	$\Delta V(\log\text{MAR})$
környezeti megvilágítás	100±15 cd/m ²	±0,05
tábla háttérvilágítása	100 ... 200 cd/m ²	±0,02
mérési távolság	4±0,5 m	±0,05



2. ábra. A látóélesség pupillaátmérőtől való függése a 2... 6 mm mérettartományban. A folytonos vonal a saját szimulációs eredményeket [15] (szaggatottan jelölt szórással), míg a pontozott vonal a szakirodalomban közölt értékeket jelöl [12].

Ezek közül a tábla háttérvilágítása és a mérési távolság az ICO (International Council of Ophthalmology) standard által rögzített paraméterek [5], és bár specifikációjuk országról országra eltérhet, konkrét értékük egy adott vizsgálóhelyiségben állandó és teljes mértékben független a páciensről. Ezzel szemben a szoba megvilágítására nincs ilyen szigorú előírás, bár régóta ismert tény, hogy megváltozása mind a pupilla méretét, mind a látóélességet jelentős mértékben módosítja [9, 10, 12].

A környezeti megvilágítás szabványosítása már önmagában is növelné a mérések összehasonlíthatóságát, azonban az egyes páciensek pupillaátmérője még azonos fényviszonyok esetén is jelentős szórást mutat (±1,5 mm [12]), ami továbbra is torzíthatja az eredményeket. Mivel a szakirodalomban nem találtunk olyan publikációt, amely a belépő pupilla átmérőjének a látóélességre gyakorolt közvetlen hatását vizsgálná, a jelenséget neuro-fiziológiai látásmodellel végzett szimulációkon keresztül részletesen tanulmányoztuk [14, 15]. Eredményeink alapján a belépő pupilla d átmérőjének 1 mm-es növelése átlagosan 0,05 logMAR romlást okoz a vízúsértékben. Megfigyeléseink jó összhangban vannak az irodalomban bemutatott [12], indirekt mérésekből származtatott összefüggésekkel [9, 10], amelyet a klinikailag releváns mérettartományban a 2. ábra szemléltet.

A fentiek alapján tehát a vizsgálóhelyiség megvilágításának standardizálása mellett, ami a mérési körülmények egységeítését szolgálja, meglehetősen fontos lenne a pupillaátmérő vízúsértékkel együtt történő feljegyzése is a személyre szabott pupillaadaptáció figyelembevételére. Tapasztalataink szerint egy ±0,5 mm mérési pontosságú kamerarendszer használata már nagymértékben hozzájárulna a mérések összehasonlíthatóságához.

A véletlen hiba okai és mértéke

A bemutatott előírások pontos követése esetén a vizsgálatok megismételhetőségét végső soron a páciens vizuális rendszerének bizonytalanságaiból származó véletlen hibának kellene meghatároznia. Ezzel szemben jelentős hiba származik a tesztek lehetséges kiértékelési

módjaiból is, amelyeket a vizsgálat gyorsítása miatt a végletekig egyszerűsítettek. Ebből adódóan, a legérzékenyebb látóélesség-mérés megvalósításához fontos feladat a megfelelő kiértékelési algoritmus megválasztása és annak konzekvens alkalmazása [1, 2, 6].

Kiértékelési módszerek

A standard vízustáblák használatával végzett vizsgálatok minősítésére három különböző módszer található a szakirodalomban [1, 3, 12]. A legegyszerűbb lehetőség a soralapú (line assignment) kiértékelés, amely szerint a vízusérték megegyezik azon legkisebb sor méretével, ahol a betűknek legalább a felét helyesen felismerte a páciens. Ugyan a megfogalmazás megfelel a vízus definíciójának, de a soronként öt betűvel megvalósított ETDRS táblák esetén a küszöbnél elért felismerési valószínűség – a helyesen azonosított betűk eloszlásától függően – praktikusán 60%, 80% vagy esetleg 100% lehet. Tehát a soralapú kiértékelés minden esetben jelentős eltolási hibával rendelkezik az elméleti értékhez képest, ráadásul a bizonytalansága 0,6 és 1,5 sor között mozog ($\Delta V = \pm 0,06 \dots 0,15 \log\text{MAR}$) normál látóélességű páciensekre [1, 3].

A statisztikus hiba csökkentése érdekében került bevezetésre a betűalapú (letter counting) kiértékelési módszer, amely külön-külön pontozza az egyes betűkre adott válaszokat. A Bailey–Lovie-elrendezés lehetővé teszi, hogy minden helyesen felismert karakter 0,02 logMAR egységnek feleljen meg [3, 12], így a vízusérték a helyes azonosítások T_c összegéből a következőképpen származtatható:

$$V = 1,1 - 0,02 \cdot T_c. \quad (3)$$

Ugyan a betűalapú módszer egyértelműen finomítja a kiértékelést, ezzel csökkentve a mérés bizonytalanságát, de a szakirodalomban közölt mérési eredmények alapján [1, 6] az elméleti 50%-os küszöbhez képest fél sornyit (+0,05 logMAR) szisztematikus hibával rendelkezik.

Végül, a nemlineáris regresszió egy alternatív lehetőség, amely a betűalapú módszerrel megegyező, alacsony mértékű ($\Delta V = \pm 0,04 \log\text{MAR}$) véletlen hibát eredményez [1, 6]. Ez esetben a vizsgált betűméreteken elért pontokra egy folytonos, monoton, szigmoid alakú görbét, úgynevezett pszichometria függvényt ($L(s)$) illesztnek, amely minden s értékre megmutatja a felismerés valószínűségét. A vízusértéket a görbe $P_0 = 0,5$ küszöbvel vett metszeteként határozzák meg [8]:

$$L(s) \Big|_{s=s_0} = P_0 \Rightarrow V \equiv s_0. \quad (4)$$

A görbeillesztéses módszer (curve fitting) egzaktul megfelel a definíciónak [5], így szisztematikus hiba nélkül és minimális véletlen hibával számszerűsíti a vízusértéket. A fen-

tek alapján a látóélesség minősítésére ez az eljárás tekinthető a legjobbnak, ezért a továbbiakban elsősorban ezzel foglalkozunk.

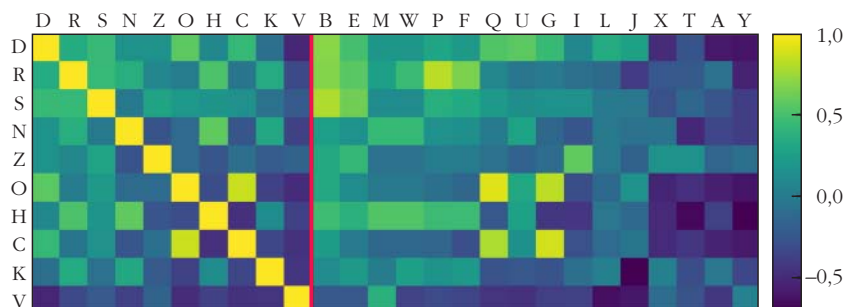
Pontozási sémák

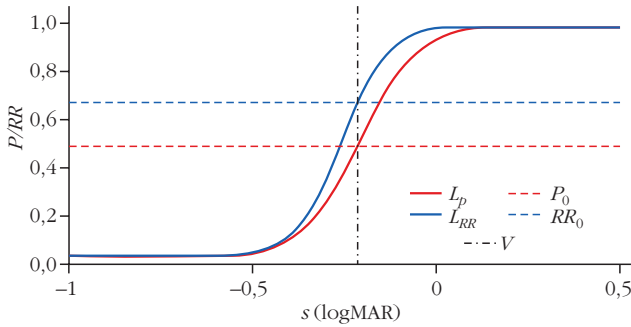
A mérések ismétlési hibáját az alkalmazott kiértékelési eljárásnál az egyes betűk olvashatósága is befolyásolja. A Sloan-karakterek speciális kialakításának ellenére is megfigyelhető, hogy némelyek könnyebben felismerhetők, míg másokat nehezebb azonosítani [2]. Emiatt egy korrelációalapú pontozási módszert vezettünk be, amely – a betűk hasonlóságát felhasználva – számszerűsíti az egyes válaszok helyességét, és ezáltal jelentős mértékben csökkenti a mérések bizonytalanságát [16, 17].

Hagyományos látásvizsgálatok esetén csak az kerül feljegyzésre, hogy a páciens felismerte-e az adott karaktert vagy sem, és így a válaszok bináris reprezentációval írhatók le, ahol az 1 helyes azonosítást, míg a 0 tévesztést jelöl. Azonban a hasonló betűk, mint például C és O, vagy P és R, összetévesztése lényegesen gyakoribb, mint kifejezetten eltérő betűk, például V és S felcserélése [18], amely azt sugallja, hogy a helytelen felismerésből nem következik, hogy a páciens a vizsgált betű semmilyen részletét nem látja. Tehát az emberi látás komplexebb egy egyszerű bináris sémánál, így a válasz helyességét megéri számszerűsíteni. E célra a vizsgált és az azonosított betűk hasonlóságát megadó OC (Optotype Correlation) értéket vezettük be [16, 17], amelyet a Pearson-féle keresztkorreláció felhasználásával definiáltunk úgy, hogy a – hagyományos bináris pontozásnak megfelelően – helyes felismerés esetén értéke 1, míg tévesztés esetén várható értéke 0 legyen. A teljes betűkészletre vonatkozó OC értékkészlet, amelyet a 3. ábra szemléltet, összhangban van a szemészetben is alkalmazott tévesztési mátrix statisztikájával [18], mivel a magasabb OC értékhez tartozó betűpárok könnyebben összekeverhetők, mint az alacsonyabb értéknek megfelelőek.

Egy teljes, azonos betűméretű sor felismerhetőségének jellemzésére az RR (rate of recognition) mennyiséget vezettük be, amelyet az adott sorban elért OC értékek átlagával definiáltunk [16, 17]. Ilyen módon RR közvetlenül összehasonlítható a hagyományos kiértékelésben alkalmazott P felismerési valószínűséggel, de lényegesen több információt szolgáltat a

3. ábra. Az oszlopok a vizsgált Sloan-karaktereket, míg a sorok a lehetséges válaszokat, így a teljes angol ábécét jelölik, ahol a 10 eredeti Sloan-karakterhez tartozó válaszokat vonallal elkülönítettük. A sorokat/oszlopokat az átlagos OC értékük alapján rendeztük: hasonló betűpárok, amelyeknek nagyobb a korrelációja a bal felső sarok felé vannak csoportosítva.





4. ábra. A valószínűségi és a korrelációalapú pontozási módszerek különbségének szemléltetése a vízusértéket definiáló megfelelő küszöbökkel együtt ($P_0 = 0,5$, $RR_0 = 0,68$).

látás minőségéről. RR felhasználásával, nemlineáris regresszióval a V vízusérték a (4) egyenlettel analóg módon – annyi eltéréssel, hogy a definíciónak megfelelő $P_0 = 0,5$ valószínűségi küszöböt $RR_0 = 0,68$ korrelációértékre kell módosítani – számolható [16]:

$$L(s) \Big|_{s=s_0} = RR_0 \Rightarrow V \equiv s_0. \quad (5)$$

Az $L(s)$ pszichometriai függvény alakjának leírására egy lineárisan transzformált logisztikus függvényt alkalmazunk, amelynek határértékei a lehetséges válaszok számának (a teljes angol ábécé mind a 26 betűje) megfelelő elméleti RR értékekhez lettek beállítva:

$$L(s) = \frac{25}{26} \frac{1}{1 + \exp(-4k(s - s_{mp}))} + \frac{1}{26}. \quad (6)$$

A görbe két paramétere, k és s_{mp} a nemlineáris regresszióhoz megfelelően az elért (s , RR) pontpárookra való illesztéssel kerül meghatározásra minden egyes vizsgált szem esetén. A 4. ábra normál látású páciensek átlagos valószínűségi (L_p) és korrelációs (L_{RR}) pszichometriai függvényeivel szemlélteti a görbeillesztéssel történő vízusmeghatározást és hangsúlyozza a pontozási sémák különbségét [16].

Klinikai mérési elrendezés a korrelációs pontozás megvalósítására

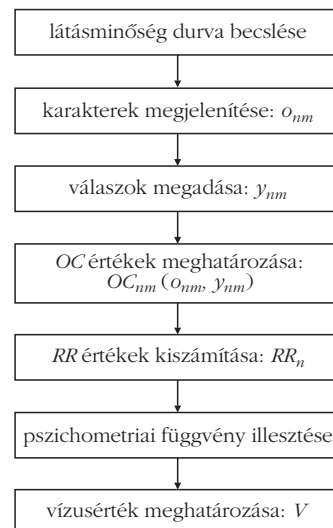
A fent bemutatott korrelációs kiértékelés alkalmazásához olyan mérőrendszerre van szükség, amely lehetővé teszi az egyes karakterekre adott válaszok regisztrálását, valamint az elért OC és RR értékek gyors és hatékony kiszámítását. Ezért egy számítógép-vezérelt összeállítást valósítottunk meg, amely a válaszok bevitelét követően automatikusan feldolgozza az eredményeket [13]. A széleskörű szemészeti alkalmazhatóság céljából a rendszert úgy alakítottuk ki, hogy megfeleljen a klinikai standardnak [5, 7].

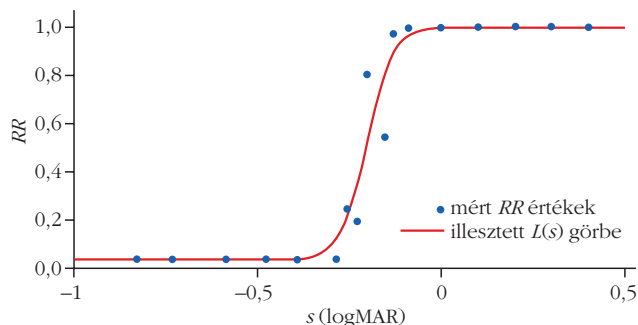
A számítógépes mérési összeállításban a vízustábla szerepét egy nagyfelbontású monitor váltja ki, amely célra egy 4k UHD LED monitort (Samsung U24E590D, pixelméret: 0,1358 mm, képátló: 600 mm) alkalmaztunk. A képernyő háttérvilágítását a nemzetközi standardnak [5] megfelelő 100 cd/m^2 értékre állítottuk be. A

vizsgálatot végző programot C++ környezetben implementáltuk az OpenCV és Dlib könyvtárak felhasználásával [13]. Kétlépéses mérési protokollt vezetünk be, így gyors vizsgálatokkal pontos adatokat biztosítunk a látóélesség meghatározásához. Az első rész a látásminőség durva becslésére, a második szakasz pedig a vízusérték precíz meghatározására szolgál. A durva becslés minél gyorsabb elvégzése érdekében az algoritmus minden második betűméreten egyetlen Sloan-karaktert vizsgál, amelyeket konstans fehér háttéren, egymás után jelenít meg a monitoron. A tesztelt betűk kiválasztása – a sorrend memorizálásának elkerülése érdekében – véletlen módon történik. Ez a fázis az első nagyobb tévesztésig tart, amikor a megjelenített és a választott betűpárhoz tartozó OC pontszám $0,85$ alá csökken (ez az érték két hasonló betű, például O és C összetévesztéséhez tartozik). A második rész az előbb meghatározott durva küszöb fölött három betűmérettel kezdődik és egy mérettel alatta ér véget, összesen legalább öt mérési pontot eredményezve. E szakaszban betűméretenként már öt karakter tesztelése zajlik le úgy, hogy az ETDRS 2000 szabvány szerint megválasztott betűötösöket egyszerre, a Bailey–Lovie-elrendezésnek megfelelő teljes sorokban jeleníti meg a program. Amennyiben az elért RR érték a legkisebb betűméreten is nagyobb, mint $0,4$, további két kisebb sor vizsgálatát végzi el a program, ezzel megfelelő adatokat biztosítva a mérés kiértékeléséhez. Ezt követően az algoritmus a szabad paraméterek optimalizálásával meghatározza a (6) egyenletben leírt pszichometriai függvényt, majd az (5) egyenlet alapján kiszámítja a vízusértéket. A mérési protokoll blokkvázlatát az 5. ábra szemlélteti.

A mérő és kiértékelő algoritmusok mellett egy felhasználóbarát kezelőfelületet is készítettünk, amelynek segítségével a vizsgálóorvos – a félreütésekből származó hibák kiküszöbölése érdekében – együtt ellenőrizheti a kivetített karaktereket és a begépelte válaszokat. Továbbá egy speciális kódot is bevezettünk a kis betűméreteken gyakori „Nem látom” válaszok – amely ese-

5. ábra. A korrelációs kiértékelést alkalmazó klinikai látásteszt blokkvázlata. Az n index a vizsgált betűméretekre, míg m az adott méreten tesztelt egyes karakterekre utal.





6. ábra. Egy reprezentatív korrelációalapú látóélesség-vizsgálat eredménye: az egyes betűméreteken elért RR értékek és a mérési pontokra illesztett $L(s)$ pszichometriai függvény.

tekhez nem rendelhető OC érték – regisztrálására. Ekkor az algoritmus az OC mátrix átlagértékét ($1/26$) használja a páciens véletlen választásának reprezentálására. A mérés végeztével a program elmenti a feldolgozott numerikus és grafikus eredményeket, valamint későbbi elemzés céljából a vizsgált-azonosított betűpárokat tartalmazó nyers adatokat is. Egy reprezentatív vizsgálat kimenetét illusztrálja a 6. ábra.

A kapott véletlen hiba összehasonlításához a nyers adatokból számolt felismerési valószínűségekből is meghatároztuk a V_p vízusértéket, a (4) egyenletnek megfelelően. Eredményeink alapján – csupán a korrelációalapú pontozásnak köszönhetően – 20%-kal csökkenthető a mérések statisztikus hibája ($\Delta V_p = 0,045$ logMAR és $\Delta V_{RR} = 0,036$ logMAR) [13]. Tapasztalataink szerint az új módszer mérési ideje mindössze 10%-kal magasabb a standard táblával végzett vizsgálatokénál ($t_{ETDRS} = 60$ s és $t_{RR} = 65$ s) [13], amely alátámasztja az eljárás széleskörű alkalmazhatóságát.

A módszer hatékonyságát azon észrevételünk is jól demonstrálja, hogy a hagyományos bináris sémával betűméretenként öt helyett tíz betű alkalmazása eredményezne a fentiekkel egyező bizonytalanságot, és az egyúttal a vizsgálat hosszát is megduplázná [13, 16].

Az új mérési protokoll szisztematikus hibájának feltérképezésére eredményeinket hagyományos ETDRS-táblával végzett látásteszt kimenetével is összevetettük. A mért vízusértékek között szisztematikus eltérés nem figyelhető meg, így megállapíthatjuk, hogy a javasolt módszer praktikus megoldást jelent azon esetekben, amikor nagy pontosságú látóélesség-vizsgálatok elvégzésére van szükség [13].

Összefoglalás, konklúzió

A klinikai látóélesség-tesztek összehasonlíthatóságának és megismételhetőségének vizsgálata érdekében részletesen tanulmányoztuk és rendszereztük a mérési eredményeket befolyásoló szisztematikus és véletlen hibákat. A környezeti és páciensspecifikus egyéni paraméterek látóélességre gyakorolt hatásának szimulációkon keresztül történő elemzése alapján megállapítottuk, hogy rendkívül fontos a szabványban meghatározott környezeti paraméterek precíz betartása, amelyeket ki kellene egészíteni egy új, a vizsgáló helyiség megvilágít-

tását szabályozó standard előírásával. Továbbá, a páciensspecifikus pupillaadaptáció figyelembevételére érdemes lenne a vízusértékkel együtt a pupilla átmérőjét is feljegyezni, amely nagymértékben hozzájárulna a mérések konzisztenciájának növeléséhez. A mérési paramétereken túl a vizsgálatok kiértékelését is egységesíteni kellene mind a statisztikus, mind pedig a rendszeres hiba minimalizálására, amelyre a nemlineáris regresszió az optimális módszer. Ezen felül az egyes karakterekre adott válaszok korrelációalapú pontozása is finomítja az elért eredményt, azonban ennek alkalmazása megköveteli a válaszok egyenkénti regisztrálását, amelyre egy új számítógép-vezérelt mérési eljárást javasoltunk. Mivel a módszer ~20%-kal csökkenti a véletlen hibát és cserébe csak ~10%-kal növeli a mérési időt a standard ETDRS-vizsgálatokhoz képest, így megfelelő alternatívát jelent olyan esetekben, amikor nagy pontosságú vizsgálatokra van szükség.

Irodalom

- Vanden Bosch, M. E., Wall, M.: Visual acuity scored by the letter-by-letter or probit methods has lower retest variability than line assignment method. *Eye* 11 (1997) 411–417.
- Shah, N., Dakin, S. C., Whitaker, H. L., Anderson, R. S.: Effect of scoring and termination rules on test–retest variability of a novel high-pass letter acuity chart. *Investigative Ophthalmology and Visual Science* 55/3 (2014) 1386–1392.
- Kaiser, P. K.: Prospective evaluation of visual acuity assessment: a comparison of Snellen versus ETDRS charts in clinical practice (An AOS Thesis). *Transactions of the American Ophthalmological Society* 107 (2009) 311–324.
- Somlai J., Kovács T.: *Neuro-Ophthalmology*. Springer (2016).
- International Council of Ophthalmology, Visual Functions Committee: Visual acuity measurement standard, ICO 1984. *Italian Journal of Ophthalmology II/1* (1988) 1–15.
- Hazel, C. A., Elliott, D. B.: The dependency of logMAR visual acuity measurements on chart design and scoring rule. *Optometry and Vision Science* 79/12 (2002) 788–792.
- Rosser, D. A., Murdoch, I. E., Fitzke, F. W., Laidlaw, D. A.: Improving on ETDRS acuities: design and results for a computerized thresholding device. *Eye* 17/6 (2003) 701–706.
- Norton, T. T., Corliss, D. A., Bailey, I. L.: *The Psychophysical Measurement of Visual Function*. Ridgeview Publishing (2014).
- Shlaer, S.: The relation between visual acuity and illumination. *Journal of General Physiology* 21/2 (1937) 165–188.
- Campbell, F. W., Gregory, A. H.: Effect of Size of Pupil on Visual Acuity. *Nature* 187 (4743) (1960) 1121–1123.
- Lythgoe, R. J.: *The Measurement of Visual Acuity*. Medical Research Council, Special Reports Series, H. M. Stationary (1932).
- Rabbetts, R. B.: *Bennett and Rabbetts' Clinical Visual Optics*. Butterworth–Heinemann, Elsevier (2007).
- Fülep Cs., Kovács I., Kránitz K., Nagy Z. Zs., Erdei G.: Application of correlation-based scoring scheme for visual acuity measurements in the clinical practice. *Translational Vision Science and Technology* 8(2):19 (201) 1–13.
- Fülep Cs., Kovács I., Kránitz K., Erdei G.: Simulation of visual acuity by personalizable neuro-physiological model of the human eye. *Scientific Reports* 9:7805 (2019) 1–15.
- Timár-Fülep Cs., Erdei G.: Investigation of the effect of pupil diameter on visual acuity using a neuro-physiological model of the human eye. *IS&T Human Vision and Electronic Imaging Conference 2019 proceedings HVEI-207* (2019).
- Fülep Cs., Kovács I., Kránitz K., Erdei G.: Correlation-based evaluation of visual performance to reduce the statistical error of visual acuity. *Journal of the Optical Society of America A* 34/7 (2017) 1255–1264.
- Erdei G., Fülep Cs.: Measuring visual acuity of a client. *World Intellectual Property Organization WO/2018/020281 A1* (2018) PCT/HU2016/000050.
- Liu, L., Klein, S. A., Xue, F., Zhang, J. Y., Yu, C.: Using geometric moments to explain human letter recognition near the acuity limit. *Journal of Vision* 9/1 (2009) 26.

IFJÚ FIZIKUSOK NEMZETKÖZI VERSENYE 2018 – MAGYAR SZEMMEL – 1. rész

Kovács Levente – Német Nemzetiségi Gimnázium, Budapest
 Nagy Dániel – XVII. kerületi Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium, Budapest
 Szakály Marcell – Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
 Hömöstrei Mihály – Budapesti Német Gimnázium, ELTE TTK
 Ispánovity Péter Dusán – ELTE TTK
 Asbóth János – Wigner Fizikai Kutatóközpont
 Tüzes Dániel – ELTE TTK
 Jenei Péter – ELTE TTK

2018. július 19. és 26. között Pekingben került megrendezésre az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye. A 2017 júliusában meghirdetett 17 nyílt végű problémát (lásd <http://iypt.org>) a magyar diákok majdnem egy éves kutatómunkával oldották meg, hogy a 31. alkalommal rendezett versenyen 32 másik ország diákjaival mérjék össze felkészültségüket. A magyar csapat (Földes András Ottó, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorlógimnázium, Budapest; Gyulai Márton, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc; Nagy Dániel, XVII. kerületi Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium, Budapest; Penc Patrik, ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium, Budapest; Vavrik Márton, Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest) nagyon kiegyenlített mezőnyben a 15. helyen végzett, ami bronzérmes helyezést jelentett. A bővebb magyar csapat további tagjai (Kadlecsik Ádám, Tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata; Kovács Levente, Német Nemzetiségi Gimnázium, Budapest; Szakály Marcell, Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest) hazánkat az Ausztriában rendezett felkészülési versenyen (lásd <http://aypt.at>) képviselték sikerrel. Nyolc ország 16 csapata között a 2. helyezést érték el.

A versenyre való felkészülés és a versenyen való részvétel anyagi háttérét a MOL Nyrt., az Audi Hungaria Zrt. és az Emberi Erőforrások Minisztériuma, valamint a nemzeti tehetség program NTP-NTMV-17-B-0001 számú pályázata biztosította. A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatósi Programja támogatta.



Nagy Dániel 2018-ban érettségizett a Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnáziumban, jelenleg a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem első éves mechatronikai mérnök szakos hallgatója. 2018 júliusában Pekingben, a bronzérmes magyar csapat tagjaként részt vett az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén (IYPT), ahol előadta a *Mozgó gyűrűk* című feladatot.

Az IYPT versenyről részletesen írtunk korábbi cikkünkben [1]. A továbbiakban a diákok és felkészítőik által közösen végzett kutatásokból szeretnénk ízelítőt adni. Reméljük, ezzel sok fizikatanárnak is sikerül kedvet csinálni, hogy a jövőben ők is belekóstoljanak a verseny által felkínált érdekes feladatok megismerésébe, és tehetséges diákjaikat bátorítsák a részvételre. Minden fejezet egy-egy problémát mutat be, és közvetlenül az elején, dőlt betűvel szedve található a versenykiírásban szereplő eredeti problémaleírás. A diákoknak a feladat megoldásához további információ nem áll rendelkezésre. Minden fejezet végén feltüntettük annak szerzőit, őket az írásuk előtt külön is bemutatjuk.

Hanglebegtetés

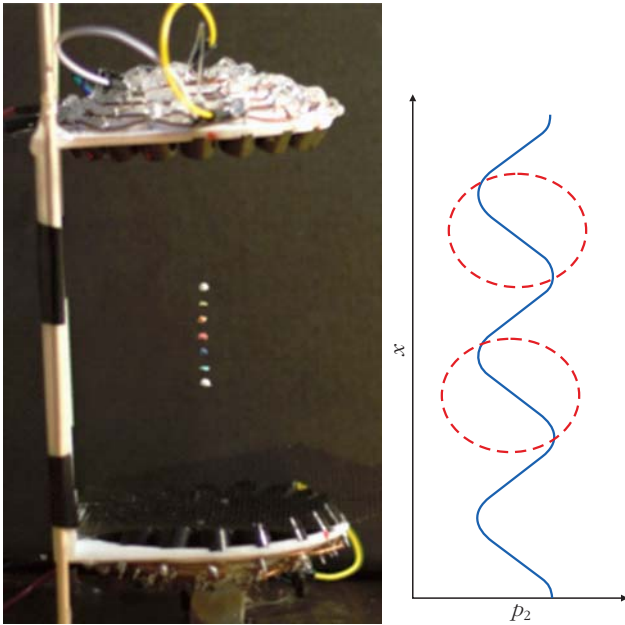
Kis objektumok képesek lebegni akusztikus állóhullámokon. Vizsgád meg a jelenséget! Milyen mértékben tudod manipulálni az objektumokat?

Elkészített eszközök

A jelenség előállítása nem egyszerű. Csak ultrahangok használatával érhető el, amelyekhez speciális sugárzó, mikrohullámú transzduktor szükséges. Az 1. ábrán látható az általam megépített eszköz. A tervek internetes leírás alapján készültek [2], ez a berendezés 72 darab transzduktort tartalmaz, amelyek két darab gömbfelületdarabon helyezkednek el, így a hanghullámok a középpontban fókuszáltak. A transzduktorok egy jelgenerátorhoz vannak csatlakoztatva, amely egy 40 kHz-es négyszögjelet biztosít, ezáltal a transzduktorok 40 kHz-es hanghullámot bocsátanak ki.

Mégis miért lebeg?

A lebegés akkor valósulhat meg, amikor a lebegtető erő kiegyenlíti a nehézségi erőt. A lebegtető erő az átlagos nyomáskülönbségekből származó erő lesz, amely akkor fogja kiegyenlíteni a nehézségi erőt, ami-



1. ábra. Ultrahangos levitátor (balra) és az eszközben kialakuló átlagos nyomáshullám (jobbra).

kor a lebegő tárgy alatt a nyomás nagyobb, mint a lebegő tárgy felett. De mégis miért alakulnak ki átlagos nyomáskülönbségek? Ez hagyományos állóhullámképpel nem magyarázható!

Ahhoz, hogy az átlagos nyomáskülönbségeket megmagyarázzuk a Navier–Stokes- és a kontinuitás-egyenleteket használtuk fel [3]. Első közelítésben feltételezzük, hogy a nyomás a levitátorban p_0 légköri nyomás, de ez idő és hely függvényében ettől egy kicsit eltérhet ($p_0 \gg p_1$):

$$p = p_0 + p_1(x, t). \quad (1)$$

A sűrűség a levegő ρ_0 sűrűsége, ebben szintén lehetnek kisebb eltérések ($\rho_0 \gg \rho_1$):

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t). \quad (2)$$

A levegő molekuláinak sebessége pedig az idő és hely függvényében változhat [3]:

$$v = v_1(x, t). \quad (3)$$

Ezen közelítéseket, valamint a Navier–Stokes- és a kontinuitás-egyenleteket felhasználva a hagyományos állóhullám megoldásra jutunk, amely a nyomásra a következő (a sűrűsége és sebessége kapott összefüggéseket most nem részletezzük):

$$p_1(x, t) = P_0 \sin(\omega t) \cos(kx), \quad (4)$$

ahol P_0 a hanghullám nyomásának amplitúdója, ω a körfrekvencia és k a hullámszám. Ez utóbbi két mennyiséget a hangsebesség köti össze ($c = \omega/k$). A (4) nyomáshullámot jobban megvizsgálva látható, hogy időátlagos, azaz nincs átlagos nyomáskülönbség, tehát

a lebegés nem lehetséges. Az akusztikus levitáció megmagyarázásához további sorfejtés szükséges [3]:

$$p = p_0 + p_1(x, t) + p_2(x, t). \quad (5)$$

Ezek és a Navier–Stokes-egyenlet felhasználásával levezettük, hogy a $p_2(x, t)$ nyomáshullám időátlagos értéke a következő:

$$p_2(x) = \frac{P_0^2}{4 \rho_0 c^2} \cos(2kx). \quad (6)$$

Láthatjuk, hogy P_0 növelésével az átlagos nyomáskülönbségeknek is egyre nagyobbak lesznek. A kísérleti összeállításához ezért nagy nyomásamplitúdójú hanghullámot kibocsátó hangszórókat kellett használni, erre a piezoelektromos hangszórók a leginkább megfelelők. A statikus nyomáskülönbségekből következik, hogy a hangnyomásból származó erőnek léteznie kell. Ha egy tárgy lebeg, a hangnyomásból származó erőnek felfelé kell mutatnia, hogy kiegyenlítsa a gravitációs erőt. Ez akkor történhet meg, ha a lebegő tárgy alatt nagyobb a nyomás, mint a lebegő tárgy fölött. Az átlagos nyomáshullámot (6) az 1.b ábra mutatja, a piros körök azon helyeket jelölik, ahol a levitáció létrejöhet.

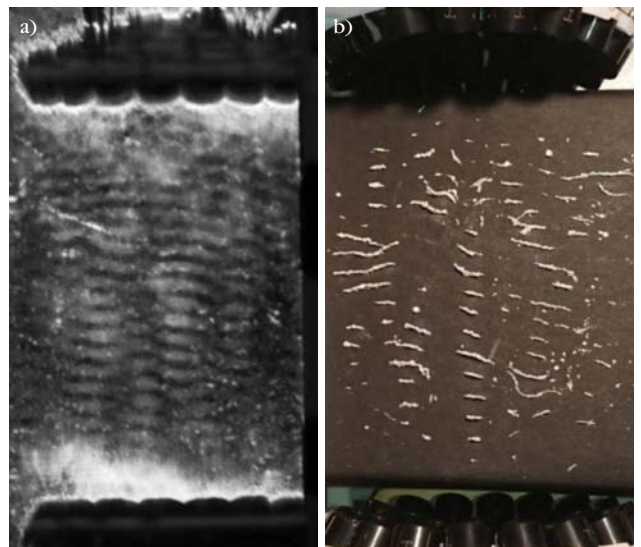
A levitációra alkalmas helyek egymástól félhullámhossz-távolságra találhatóak (hiszen a p_2 állóhullám kétszeres hullámszámú), tehát a lebegő tárgyak közötti távolság [4]:

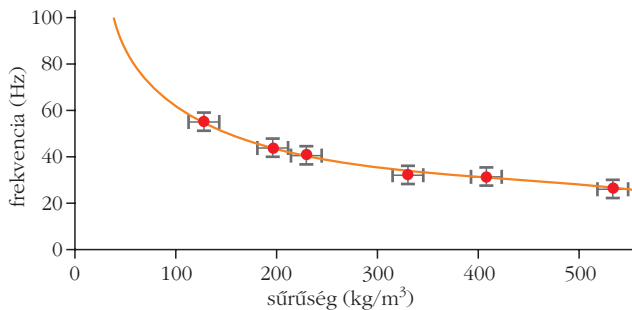
$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f}. \quad (7)$$

Az elmélet kísérleti megerősítése

Első lépésként Schlieren-optika [5] segítségével azt mutattuk meg, hogy állóhullámoknak és nyomáskülönbségeknek valóban létezniük kell. A 2.a ábrán az

2. ábra. (a) Schlieren-optikával készült kép. (b) Vízzintesre állított eszközben a finom por elrendeződik.





3. ábra. Különböző sűrűségű testek lebegés közbeni rezgési frekvenciája. A pontok a kísérleti adatokat, a folytonos vonal az elméleti görbét mutatja.

így készült képek láthatók, a fehérebb részek a legnagyobb nyomásváltozás helyei.

Ezután a lebegő tárgyak közötti távolságot mértük meg. Eldöntöttük a levitátort, majd finom port szórunk az alatta levő papírra, a por ott gyűlt össze, ahol a tárgyak lebegni tudnak, ezt mutatja a 2.b ábra. A (7) képlet alapján az elméleti távolság 4,25 mm, általunk mért érték $4,38 \pm 0,2$ mm, tehát jó eredményt kaptunk. A kísérletet lebegő tárgyakkal is elvégeztük, és így is hasonló eredményekre jutottunk.

E módszerrel mennyire tudunk tárgyakat mozgatni?

Kicsiny tárgyak esetén a hangnyomásból származó erő a (6) összefüggés alapján levezethető:

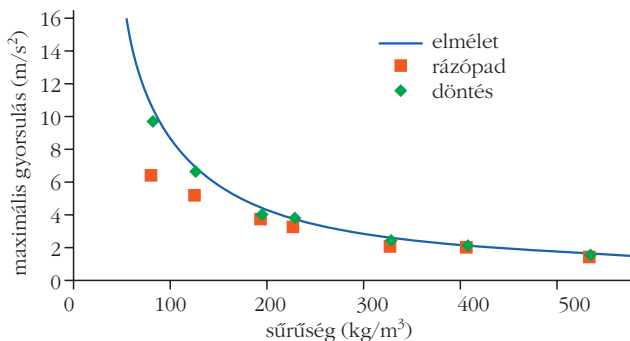
$$F_{\text{radiation}}(x) = V \frac{P_0^2 k}{2 \rho_0 c^2} \sin(2 k x), \quad (8)$$

ahol V a lebegő tárgy térfogata. Az átlagos nyomás (6) és a tárgyra ható erő (8) a levitátorbeli meghatározásához P_0 értékének pontos ismerete szükséges. A használt hanghullám frekvenciája 40 kHz, azaz a nyomásamplitúdó nagymértékűen változik másodpercenként, ezért a nyomásamplitúdó hagyományos módszerekkel nem mérhető meg. Megfigyelhető, hogy a lebegő tárgyak rezgőmozgást végeznek, így a hangnyomásból származó erő az egyensúlyi helyzet közelében rugóerőként viselkedik. A rezgés frekvenciáját mérve a nyomásamplitúdó a következő egyenlettel számolható ki:

$$P_0 = f \lambda c \sqrt{\rho_0 \rho_t}, \quad (9)$$

ahol f a tárgy rezgési frekvenciája, λ a hullámhossz, c a hangsebesség, ρ_0 a közeg, ρ_t a tárgy sűrűsége. Több különböző sűrűségű tárggyal végeztünk méréseket, a tárgyak mozgását nagysebességű kamerával rögzítettük (1200 fps), majd frekvenciájukat a Tracker program segítségével határoztuk meg. A 3. ábra mutatja a mérési eredményeket, amelyből P_0 értéke kiszámolható, ez 1957 ± 113 Pa-nak adódott. Ebből következik p_2 (6) amplitúdója, tehát az a nyomáskülönbség, amely a tárgyakat lebegteteti, ennek az értéke mindössze $6,77 \pm 0,63$ Pa.

A lebegő tárgyak maximális oldalirányú gyorsulását szintén levezettük (ami az a gyorsulás, amikor a levi-



4. ábra. Testek maximális gyorsulásának kísérleti és elméleti eredményei.

tátor nem tartja meg) a (8)-as egyenletből és a második Newton-törvényből:

$$a_{\text{max}} = \frac{P_0^2 k}{2 \rho_0 c^2 \rho_t}. \quad (10)$$

A gyorsulás értéke a levitátor döntésével is meghatározható, ebben az esetben $a_{\text{max}} = g \sin \alpha$. Itt g a gravitációs gyorsulás α az a dőlésszög, amelynél a lebegő tárgy leesik. A maximális gyorsulást egy rázópadon is meg tudtuk mérni. Az eredményeket a 4. ábra mutatja, a döntéssel végeztett kísérlet eredményei jól egyeznek az elméleti értékekkel.

Megpróbáltuk elhangolni a levitátor alsó és felső hangszóróit, azaz $\Delta \varphi$ -vel megváltoztattuk azok egymáshoz képesti fázisát. Ebben az esetben a tárgyak – a fáziseltolás irányától függően – felfelé vagy lefelé mozdultak el a levitátorban. Mérések alapján a következő egyenlet adja meg a $\Delta \varphi$ fáziseltolás hatására arányosabb helyezkedő lebegő tárgy Δx elmozdulását:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta \varphi}{2 \pi}. \quad (11)$$

Tehát, ha az első és felső részt egymáshoz képest 2π -vel toltuk el, akkor a tárgyak $\lambda/2$, azaz 4,25 mm-t mozdultak.

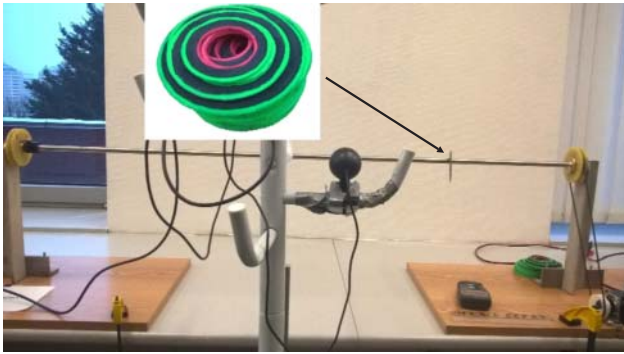
Össességében elmondható, hogy sikerült megvalósítani a manipulációt és annak elméleti hátterét is megadtuk. Nehezebb tárgyak mozgatásához természetesen jóval erősebb hangszórókra lenne szükség.

Nagy Dániel

Olajozott gyűrűk

Egy olajozott vízszintes henger egyenletes sebességgel forog a tengelye körül. Készíts egy kartongyűrűt úgy, hogy a belső sugara körülbelül kétszer akkora legyen, mint a hengeré. A gyűrű dőlésétől függően mindkét irányban végigmozoghat a hengeren. Vizsgáld meg a jelenséget!

A feladat szövege leírja a mérési összeállítás alapjait, ám számtalan kérdés is felmerül, többek között, hogy miért kell kartonpapírgyűrűket használni, ha az olajos rúd ezeket könnyen tönkretelheti. Az első lépés a változtatható paraméterek megállapítása: a gyűrű külső és belső sugara, vastagsága, tömege, anyaga; a



5. ábra. Az olajoztgyűrűk-probléma kísérleti összeállítása. Az ábrába szerkesztett kis képen a kísérletekben használt gyűrűk láthatók.

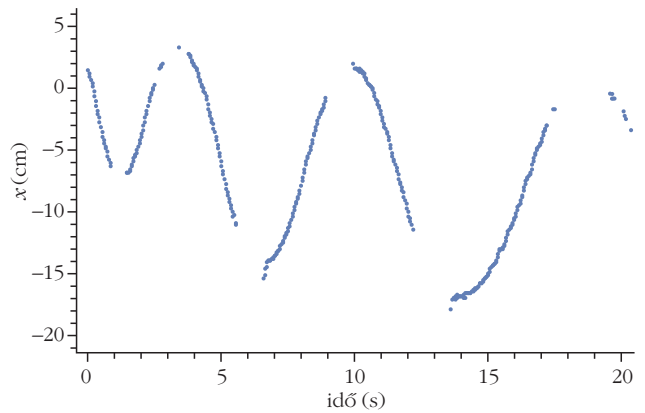
rúd átmérője, hossza, felszíne, forgási sebessége. Ezen paraméterek változtatását figyelembe véve készült el az 5. ábrán látható összeállítás.

A rudat két csapágyazott pillér tartja, és egy ékszíjon keresztül egy léptetőmotor forgatja. A rudat vízszintesen szemből egy kamera figyeli. A kamera által rögzített videókat későbbi feldolgozásra számítógépen tároljuk. A kezdeti feltételek kontrollálására egy kioldó szerkezetet készítettünk, amely a gyűrűket a megfelelő pillanatban reprodukálható szögekből engedte szabadon.

A gyűrűk – mint ahogy az 5. ábrán látható – jól meghatározott módon festve voltak: külső élük zöld, belső élük piros. A köztes terület egyik oldalán fehér, hátoldalán fekete volt. Az élénk és jól megkülönböztethető színeknek köszönhetően a mozgástól gyakran elmosódott videókon is – egy saját fejlesztésű tracker program segítségével – követni tudtuk a gyűrű helyzetét. A programot a Python nyelven írtuk, és a képfeldolgozáshoz általános OpenCV csomagot használtuk. A videókat a program képkockáról képkockára elemezte: először a szokványos RGB (piros, zöld, kék) színmodellből a HSV (árnyalat, telítettség, világosság) modellbe alakította a képet, mivel így az objektumok színét kényelmesebb elemezni. Ezután megkereste a piros és zöld színű pixeleket, és elkülönítette a gyűrűt alkotó, viszonylag egybefüggő halmazt a háttérzajban felbukkanó egy-egy pixeltől. A kúpszeletek tulajdonságaiból következik, hogy egy térbeli körgyűrű leképezése kamerával mindig ellipszis lesz, így a program a két pixelhalmazra ellipszist illesztett. Mivel a gyűrű valós adataiból ismert a két ellipszis nagytengelyének aránya, amely a leképezés során változatlan, a két illesztett ellipszist egyesíteni lehet, hogy a mérési zaj szintjét csökkentsük. Mindezen felül a program ele-



Szakály Marcell 2018-ban érettségizett a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban, jelenleg az Oxfordi Egyetem első éves fizika szakos hallgatója. A 2017 júliusában, Szingapúrban megrendezett Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén (IYPT) az aranyérmes magyar csapat tagja volt. A 2018. évi fizika OKTV 2. kategória nyertese. Az Európai Fizika Diákolimpián aranyérmet, a Nemzetközi Fizika Diákolimpián bronzérmet szerzett.



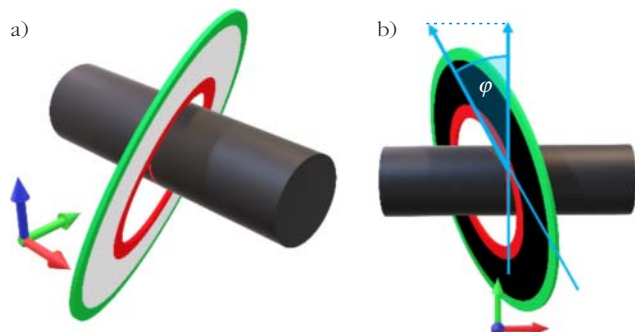
6. ábra. A gyűrű mozgásának hely-idő grafikonja.

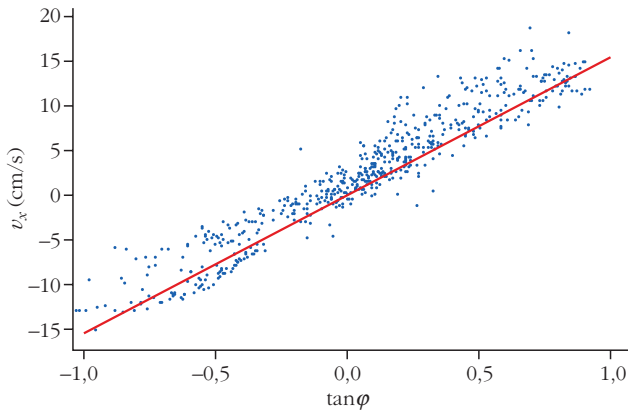
mezte a gyűrű belső részének színét (fekete vagy fehér), és ez alapján eldöntötte, hogy melyik oldalát látjuk. A leképezett, korrigált külső-ellipszis pixelekből mért elhelyezkedése, a kamera felbontása és nyílásszöge, valamint a gyűrű valós adatai és látott oldala segítségével a kamera koordináta-rendszerében meghatározható a gyűrű adott pillanatbeli eredeti, térbeli helyzete. A kamera vízszintesen, merőlegesen nézte a tengelyt, ebből a gyűrű koordinátái a rúd rendszerében is meghatározhatók. Megfelelő mozgó átlagokkal és numerikus differenciálszámítással a pillanatnyi sebességet és gyorsulást is meg tudtuk határozni (természetesen egyre növekvő numerikus hibával). A pozíciókövetés eredményét a 6. ábra mutatja. Jól látható, hogy a gyűrű egyre növekvő amplitúdójú és periódusidejű oszcillációt végez.

A mozgás elméleti leírása

Helyezzünk a rendszerre egy olyan koordináta-rendszert, amelyben az x (piros) tengely a rúddal párhuzamos, a z (kék) felfelé mutat, az y (zöld) pedig – a jobbkézszabály szerint – a rúdra és a függőlegesre is merőleges. A jelenség megfigyelésével tapasztaltuk, hogy a gyűrű és a rúd érintkezési pontja jó közelítéssel mindig legfelül helyezkedik el, továbbá a gyűrű tömegközéppontja az érintkezési pont alatt van, azaz a gyűrű mozgás közben is „csüng” a rúdon. A gyűrű a függőleges tengely körül még mindig elfordulhat: ezt a szabadsági fokot a gyűrű síkja és a rúdra merőleges sík φ szögével írtuk le (7. ábra).

7. ábra. (a) A mozgás elméleti leírásához használt koordináta-rendszer, valamint (b) felülnézetből a φ szög értelmezése.





8. ábra. Az x irányú sebesség és a korong elfordulási szögének függvénye. Piros vonal: elméleti érték, kék pontok: mérési adatok.

Fontos megfigyelés továbbá, hogy a gyűrű és a rúd nem csúszik meg egymáson, azaz az érintkezési pontbeli sebességeik egyenlők. Ennek következtében természetesen a gyűrű forog a saját tengelye körül. Amennyiben $\varphi \neq 0$ az érintkezési pontban – a gyűrű saját, síkjára merőleges tengelye körüli forgása miatt –, a gyűrűsebességnek x irányú komponense is kell legyen, ám a rúd csak y irányú komponense van. Ennek következtében a gyűrűnek egy v_x haladási sebességgel kell rendelkeznie, hogy a sebességek egyenlősége az érintkezési pontban fennmaradjon.

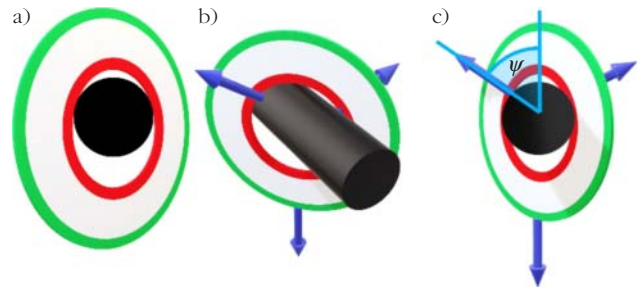
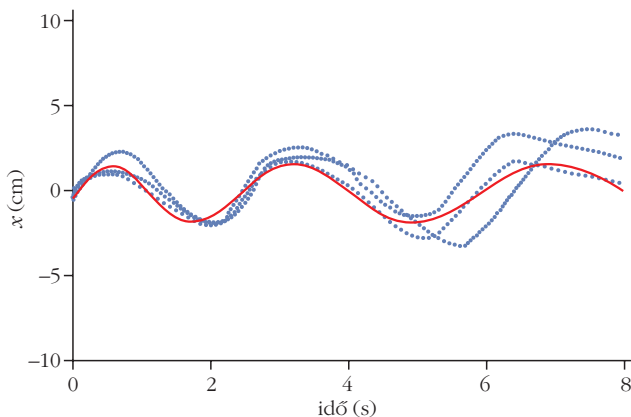
Amennyiben v_y a rúd (és gyűrű) pontbeli sebessége az y irányban, és v_x a gyűrű sebessége az x irányban, a φ szög definíciójából következik, hogy $\operatorname{tg}\varphi = v_x/v_y$. Amennyiben a rúd sugara r és szögsebessége ω_c felváltva v_y sebessége $r\omega_c$, így:

$$v_x = r\omega_c \operatorname{tg}\varphi. \quad (12)$$

Ezt az összefüggést kísérletileg is igazoltuk (8. ábra).

A sebesség nem más, mint a hely idő szerinti deriváltja, így $\varphi(t) \rightarrow v_x(t) \rightarrow x(t) + x_0$, a $\varphi(t)$ függvény meghatározza a gyűrű hely-idő függvényét. Amennyiben a φ szög időben állandó lenne, a hely arányosan változna az idővel. A valóságban φ az időben nem állandó, így a sebesség sem maradhat állandó. Gon-

10. ábra. Az azonos kiindulású mérések során a korong helye az idő függvényében (pontok) és a paraméterekhez tartozó elméleti görbe (folytonos vonal) összehasonlítása.



9. ábra. (a) A korong egy kritikus szögnél nagyobb elfordulása esetén geometriai okok miatt kénytelen felemelkedni. (b) Ebben az esetben a gyűrűre ható erők sematikusán. (c) A ψ szög definíciója.

doljunk meg egy olyan szélső esetet, ahol a gyűrű olyannyira elfordul φ irányban, hogy a rúdra merőleges vetülete a 9. ábrán látható módon sokkal vékonyabb lesz. Ekkor a gyűrű geometriai okokból kénytelen felemelkedni.

A gyűrűre ekkor – a 9. ábra alapján – forgatónyomaték hat. Amennyiben az érintkezési pontok a 9.c ábrán látható módon $\psi(\varphi)$ szögben helyezkednek el, a gyűrűre ható nyomóerők:

$$F_z = \frac{mg}{2}, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{F_y}{F_z},$$

így

$$F_y = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\psi \quad (14)$$

erő fejt ki a forgatónyomatékokat. Az erőkar $r \operatorname{tg}\varphi \sin\psi$, így a forgatónyomaték

$$M = -mg \operatorname{tg}\psi r \operatorname{tg}\varphi \sin\psi. \quad (15)$$

Az $I\ddot{\varphi} = M$ egyenlet és a forgatónyomaték előjele miatt φ és $\dot{\varphi}$ között negatív a visszacsatolás, így $\varphi(t)$ oszcillálni fog:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{4gr \operatorname{tg}\varphi \tan\psi \sin\psi}{(R_{out} + R_{in})^2} \varphi - C\dot{\varphi} + |\dot{\varphi}|. \quad (16)$$

Ha a gyűrű vastagságát figyelembe vesszük (amely elfordulásakor igen lényeges és nem elhanyagolható torzulást okoz), $\psi(\varphi)$ függvény meghatározása zárt alakban szinte lehetetlen, numerikus kiszámítása is lassú.

Az egyenletben szereplő C tagot a megfigyelésekhez illesztjük, és a forgó gyűrűre ható légellenállás forgatónyomatékát képviseli szemempirikus módon.

A 10. ábrán látható, az elmélet jól közelíti a mérési görbe alakját. Érdeemes megjegyezni, hogy a feladat előírja, a rúd és gyűrű sugara között körülbelül kétszeres szorzó legyen. Ugyan a szám pontos értékét számításokkal nem, de érveléssel alátámaszthatjuk: amennyiben a gyűrű és a rúd mérete nagyon hasonló, a $\psi(\varphi)$ függés nagyon hirtelen nő, így a gyűrű kis φ szögtartományban ingadozna, és igazi távolság megtevése helyett egyhelyben remegne. Hasonlóan túl

nagy gyűrű esetén a φ szög jelentősen megközelítené az abszolút elméleti maximum 90° -ot, ahol hatalmas sebességgel haladna oldalirányba, így a reálisan beszerezhető rudaknál sokkal hosszabb távra lenne szükség érdemleges megállapítások tételéhez.

Szakály Marcell, Nagy Dániel

Sugárzó lámpa

Amikor éjszaka fényképet készítünk egy világító lámpáról, a képen megjelenhetnek a lámpa középpontjából kiinduló fénysugarak. Vizsgálj és magyarázd meg a jelenséget!

Ezt a jelenséget rengetegszer lehet látni jó minőségű fényképeken a hétköznapokban is (11. ábra).

A jelenséget a fényképezőgép blendéje okozza azért, hogy a blendén áthaladó fénycsugárak fényelhajlást szenvednek. A jelenség jobb megértéséhez ismernünk kell a Huygens–Fresnel-elvet, ami kimondja, hogy egy hullámfront apró elemi hullámok összegére bontható fel, ezek fázishelyes összege (avagy interferenciája) a későbbi hullámfront minden pontjában megadja annak alakját és amplitúdóját.

Interferencia egy pontban akkor lép fel, ha azonos hullámhosszú és időben állandó fáziskülönbségű hullámok találkoznak egymással. Egymással ellentétes fázisban találkozó két hullám gyengíti egymást, ha amplitúdóik is azonosak, akkor kioltás következik be. Ha a két hullám ugyanabban a fázisban találkozik egymással, akkor erősítésről beszélhetünk, ekkor a két hullám amplitúdója összeadódik.

A fényképezőgép-objektív leképezésének jobb megértéséhez tekintsük a 12. ábrát!

A tárgy a tér minden irányába fénycsugárakat bocsát ki, aminek a fényképezőgép felé tartó részét az objektívben lévő lencse(rendszer) párhuzamosakká alakítja, a párhuzamos fénycsugárak áthaladnak a blendén, majd a második lencse(rendszer) a tárgy egy-egy adott pontjáról érkező fénysugarakat más-más pontba fókuszálja, ami által egy bizonyos távolságban kép keletkezik, amit film vagy elektronikus eszköz (CCD) rögzít.

Elmélet

Az elmélet kidolgozását egy $B(x, y)$ apertúrafüggvénnyel kezdtük, ami megadja, hogy az adott fénycsugár áthalad-e a blendén, vagy sem. Ha a fénycsugár



11. ábra. A Szabadság híd éjszakai képe. A lámpák körül jól láthatók a csillag alakú fények.

lám áthalad rajta, akkor a függvény értéke egy, különben pedig nulla. Ezután meghatározhatjuk, hogy a fény mekkora utat tesz meg külön-külön a blende minden egyes pontjától a tőle d távolságban lévő ernyő minden egyes pontjára. Ennek felírásához a 13. ábrán látható koordináta-rendszert használtuk. A blendénél az x és y koordinátákat x és y -nal, míg az ernyőnél ugyanezt X és Y -nal jelöltük.

Látható, hogy a z koordináta a blendénél nulla, az ernyő pontjainak a z koordinátája a d értéket veszi fel. Ezek alapján, a Pitagorasz-tétel segítségével már meg lehet határozni, hogy mekkora utat tesz meg a fény a blendétől a kamera ernyőjéig:

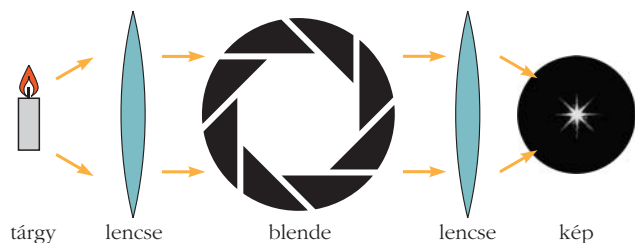
$$r(x, y, X, Y) = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + d^2}. \quad (17)$$

Egy P pontból kiinduló elemi gömbhullám elektromos (vagy mágneses) térerősségének a járulékat egy Q pontban,

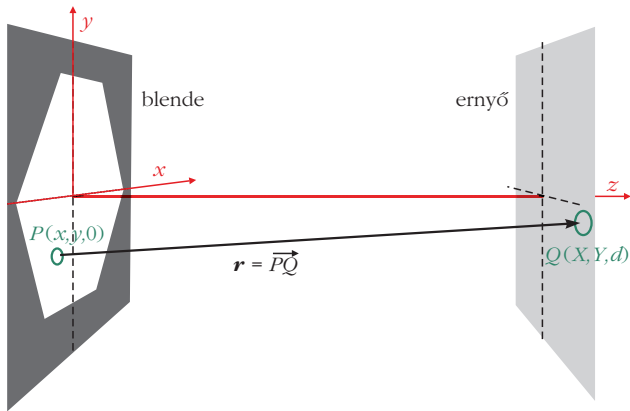
$$\begin{aligned} d\psi(t) &= \psi_{P \rightarrow Q}(t) = \\ &= B(x, y) A \sin(k_1(r(x, y, X, Y) - \omega t)) = \\ &= B(x, y) A \sin\left(k_1 \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + d^2} - \omega t\right), \end{aligned} \quad (18)$$

ahol A a blendére eső hullám amplitúdója, k_1 a hullámzámvektor PQ irányú komponense, ω a frekvenciája. Ez az egyenlet akkor ad jó közelítést, ha a blende méretéhez képest attól távol (vagy egy lencse fókusz síkjában) nézzük a térerősségeket (ez a Fraunhofer-diffrakció esete). Ezt követően felösszegezhető a

12. ábra. Sematikus ábra egy tárgy kamerával való leképezéséről.



Kovács Levente az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója. A 2017/2018-as tanévben a KöMaL G jelű fizika gyakorlatok versenyén IX. helyezést ért el. A 2018 áprilisában, Leobenben megrendezett Austrian Young Physicists' Tournamenten (AYPT) a magyar csapat tagjaként II. helyezést ért el.



13. ábra. A modell koordináta-rendszere és jelölései.

blende minden pontjáról kiinduló elemi hullámok járuléka, így meghatározva az ernyő minden egyes pontjában a térerősséget.

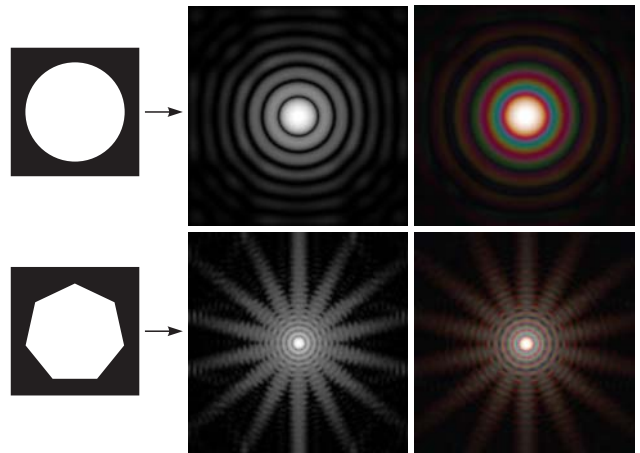
$$\psi(X, Y, t) = \int_{\text{blende}} B(x, y) A \sin(k_{\parallel} r(x, y, X, Y) - \omega t) dx dy. \quad (19)$$

Ezután már csupán a fényintenzitás eloszlását – ami végső soron megmutatja, hogy az ernyő mely részein fogunk sötét és világos részeket látni – kellett kiszámolni. Ehhez felhasználtuk, hogy az elektromos (vagy mágneses) térerősség négyzete arányos a fény intenzitásával, amit egy periódusra időátlagolni kell, hiszen szemünk is csak ezt a kiátlagolt értéket érzékeli.

$$I(X, Y) \sim \langle \psi^2(X, Y, t) \rangle_t = \left\langle \left(\int_{\text{blende}} B(x, y) A \sin(k_{\parallel} r(x, y, X, Y) - \omega t) dx dy \right)^2 \right\rangle_t. \quad (20)$$

(A (19) és a (20) egyenletben ne feledkezzünk meg r (17)-ben szereplő kifejezéséről!) Egyenlőséget akkor kapunk, ha – attól függően, hogy ψ -vel az elektromos vagy a mágneses teret jelöljük – ϵ_0 és μ_0 megfelelő kombinációjával ezt megszorozzuk. Azonban e jelenségnél nekünk elegendő volt a relatív intenzitáseloszlást ismerni.

15. ábra. Fényképek eltérő lamellaszámú blendével, balra 7 lamella: 14 ágú csillag; jobbra 8 lamella: 8 ágú csillag.



blende monokromatikus fény polikromatikus fény

14. ábra. Szimulációs képek.

Szimulációs program

Az elmélet és kísérleti eredmények összevetésére szimulációs programot írtunk, amelyben két közelítést használtunk: 1) az ernyő effektív távolsága lényegesen nagyobb a blende méreténél, 2) a képet egy lencse segítségével képeztük le. Ezekre azért volt szükség, mert így egy nagyon gyors matematikai módszerrel, a Fourier-transzformációt lehet alkalmazni. A szimulációs program Pythonban készült, használata igen egyszerű. Bemenő adat a blende alakját fekete-fehérben, valamint a fény hullámhosszát tartalmazó fájl. A program elkészíti ezen adatoktól függő szimulált diffrakciós képet.

A 14. ábrán láthatjuk, hogy a szimuláció milyen diffrakciós képet számol mono-, valamint polikromatikus (fehér) fényekre, kétfajta blendealak (kör és hétszög) mellett. A program a fehéret különböző színek összegeként kezeli, amit polikromatikusnak nevezünk az ábrán, mert csak véges sok színt adunk össze.

Kísérleti eredmények

Kísérleteink során – többek között – azt vizsgáltuk, hogy a blende mérete miként befolyásolja a kapott képet. Azt tapasztaltuk, hogy minél szűkebb a blendenyílás, a fényképen annál jobban látható a jelenség. Ezzel szemben, minél tágabb a blende, annál szélesebbek a fénysugarak, és kevésbé határozott csillagalak látható a képen.

Azt is vizsgáltuk, hogy a különböző lamellaszámú blendék miként befolyásolják a jelenséget. Azt tapasztaltuk, hogy páros számú lamella esetén a csillag ágainak száma megegyezik a lamellaszámmal. Azonban páratlan számú lamellát használva a csillag ágainak száma a lamellaszám duplája. Ez azzal magyarázható, hogy a fény minden lamellánál két irányba törik, így páros számú lamella esetén a szemközti ágak átfedik egymást, két ágat egyként látunk. Páratlan számú lamella esetén a csillagok ágai között nincsenek átfedések, így minden elhajlást külön-külön lát-

hatunk. A 15. ábrán saját fényképeink láthatók, olyan blendével, amelynek a bal oldali képén páratlan, míg a jobb oldalon látható képen páros számú lamellája van.

Ezek mellett különböző fókusztávolságokkal is készítettünk fényképeket. Azt figyeltük meg, ha a tárgy élesre van állítva, akkor a fénysugarak vékonyabbak és sokkal élénkebben láthatók, azonban, ha a fókusztávolság túl kicsi vagy túl nagy, akkor egyre inkább a blende alakja jelenik meg a fényképen.

Kovács Levente

Irodalom

1. Hömöstrei Mihály, Pham Thi Linh, Beregi Ábel, Laukó András, Béda Ármin, Nagy Péter, Ispánovity Péter, Dusán, Jenei Péter: Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye magyar szemmel. *Fizikai Szemle* 64/12 (2014) 430–435.
2. instructables.com/id/Acoustic-Levigator – Akusztikus levitáció Asier Marzo-tól (megtekintés: 2018/08/23).
3. H. Bruus: Acoustofluids 7: The acoustic radiation force on small particles. *Lab on a Chip* 6 (2012).
4. M. Hakan Kandemir, M. Caliskan: Standing wave acoustic levitation on an annular plate. *Journal of Sound and Vibration* 382 (2016) 227–237.
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Schlieren_photography Schlieren photography – Wikipédia (megtekintés: 2018/08/23).

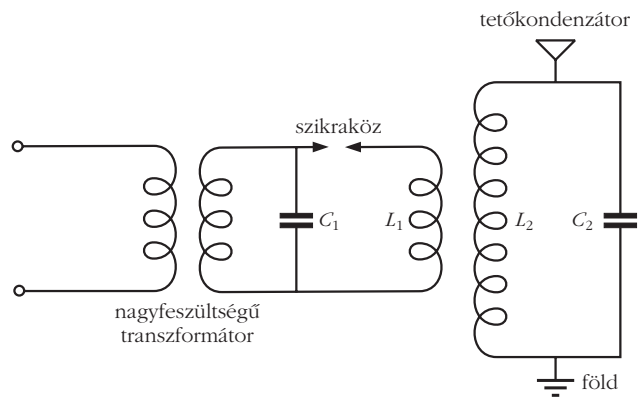
A WIGNER JENŐ SZAKKOLLÉGIUM KÍSÉRLETI KÖR MUNKACSOPORTJA BEMUTATJA: A TESLA-TEKERCS

Träger Magdolna – Eötvös Loránd Tudományegyetem
Buday Csaba – Prolan Irányítástechnikai Zrt.
Sánta Botond – BME Fizika Tanszék

Az első Tesla-tekercs

Az 1800-as évek végén *Nikola Tesla* sokat foglalkozott a váltóárammal és nagyfrekvenciás generátorával. Ekkor alkotta meg az azóta róla elnevezett Tesla-tekercs is, amellyel nagyfeszültségű (akár 100 kV) és nagyfrekvenciás áramot lehet előállítani.

Az első Tesla-tekercs két egymásra hangolt áramkörből áll (1. ábra). Működésének lényege, hogy a szekunder kör egy rezgőkör, amelyet a primer körrel induktív módon lehet gerjeszteni. A primer körben egy néhány menetes szolenoid tekercs, a hozzá méretezett kondenzátor, egy nagyfeszültségű transzfor-



1. ábra. A Tesla-tekercs egyszerű kapcsolási rajza.



Träger Magdolna az Eötvös Loránd Tudományegyetem fizika-matematika tanárszacos ötödéves hallgatója, 2015-től a Wigner Jenő Szakkollégium Kísérleti Körének tagja. Szabad idejében szívesen vesz részt természettudományos versenyek szervezésében, illetve a fizika népszerűsítésében.



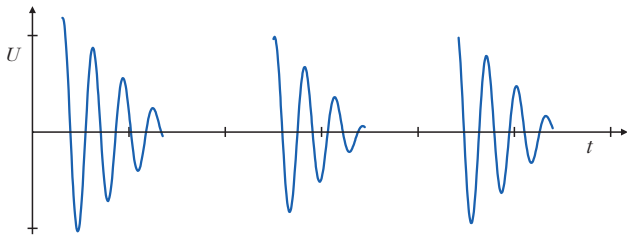
Buday Csaba 2010-ben szerzett mérnökfizikus diplomát a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, majd 2017-ben villamosmérnök BSc-t az Óbudai Egyetemen. Jelenleg hardverfejlesztő mérnökként dolgozik a Prolan Irányítástechnikai Zrt.-nél. Egészen a kezdetektől tagja a Wigner Jenő Szakkollégiumnak és a Kísérleti Körnek, ahol főleg a kísérleti eszközök építésében tevékenykedik.

mátor (vagy induktor) és egy szikraköz van. A másik, a szekunder kör (amely a rezgőkör) egy sokmenetes szolenoid tekercsből és ezen egy tetőkondenzátorból – ami a tekercs tetejére helyezett hengeres alakú fém – áll. Valójában e fém földdel alkotott kapacitása határozza meg a szekunder kör kondenzátorának kapacitását és rezonanciafrekvenciáját.

Az eszköz kapcsolásakor a nagyfeszültségű transzformátorról vagy az induktorról a primer kör konden-



Sánta Botond 2016-ban végzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizikusok képzésén, jelenleg doktorandusz-ként dolgozik a BME Fizika Tanszékén. Kutatási területe atomi méretű memóriák vizsgálata. Kutatási tevékenysége mellett a Wigner Jenő Szakkollégium Kísérleti Körének vezetőjeként (és egyik alapítójaként) aktív közéleti tevékenységet folytat, számos demonstrációs kísérleti bemutató és laborlátogatás megszervezése és megtartása fűződik a nevéhez.



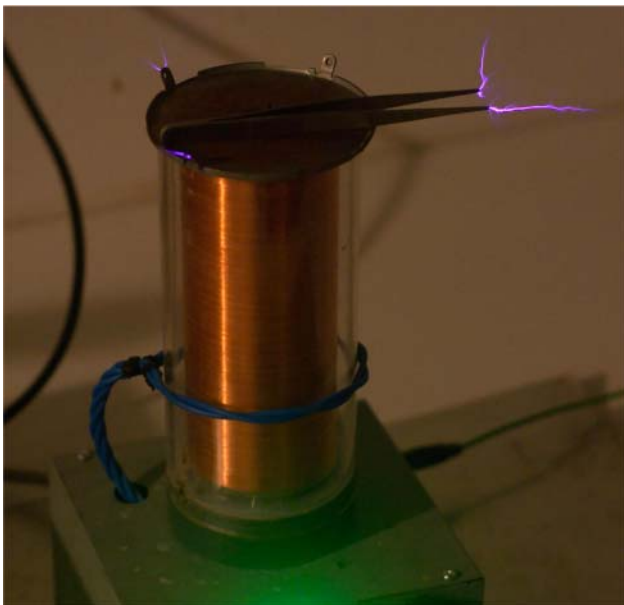
2. ábra. A primer kör feszültségének időfüggése.

zátora elkezdi feltöltődni. Amint eléri azt a feszültséget, amelynél a szikraközben lévő gázban (levegőben) megindul az ívkisülés, az ív – kis ellenállása miatt – gyakorlatilag rövidre zárja a primer kört és a kondenzátor a primer tekercsen keresztül kisül. Oszcilláló kisülés alakul ki, ennek jellegzetes feszültség-görbéjét a 2. ábrán láthatjuk.

Ahogy a csatolás révén az energia átkerül a szekunder körbe és a kondenzátorban a feszültség az ív fenntartásához szükséges feszültség alá csökken, az ívkisülés a szikraközben leáll. Ekkor a kondenzátor ismét töltődni kezd és így a kisülés-töltődés ismétlődik. A primer körben kialakult elektromos rezgés energiája a mechanikai csatolt rezgésekhez hasonlóan átadódik a szekunder körbe, így gerjesztve azt. A Tesla-tekercs szekunder körében tehát a transzformátorhatás (a szekunder kör tekercse sokkal nagyobb menetszámú, mint a primer köré) és a megfelelő induktív gerjesztés miatt jön létre nagy feszültség. Amennyiben a két rezgőkör között rezonanciát alakítunk ki a tekercsek, illetve kapacitások hangolásával, akkor a szekunder oldalon még nagyobb feszültséget, akár 100 kV-ot is kaphatunk [3].

A első Tesla-tekercs működése tehát nagyon hasonló két azonos hosszúságú csatolt matematikai inga viselkedéséhez, amelyeknél az egyikre nagyon kicsi, míg a másikra egy sokkal nagyobb tömeget akasztunk. A primer kör feleltethető meg a nehéz ingának,

3. ábra. A Kísérleti Kör által épített eszköz működés közben [1].



ezt kitérítjük, majd elengedjük. Ahogy ez a nagy tömeg elkezdi lengeni, a csatoláson keresztül elkezdi gerjeszteni a kis tömegű ingát, energiáját átadja annak, ami ezáltal nagy kitérésű lengéseket kezd végezni. Ez történik akkor, amikor a szikraközben elindul az ívkisülés és a kondenzátor a primer tekercssel egy rezgőkört alakít ki, amely a szekunder rezgőkört gerjeszti az induktív csatoláson keresztül.

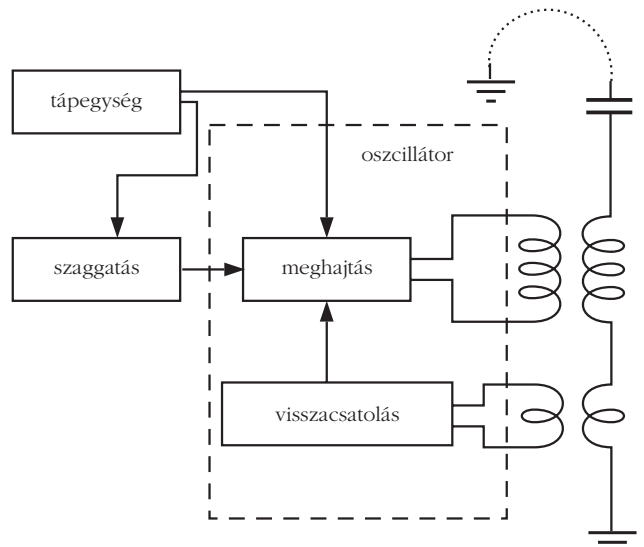
A Kísérleti Kör által épített eszköz

Mostanában gyakori az úgynevezett Solid State Tesla Coil, amelyben a szikraközrel zárt gerjesztő áramkör helyét egy félvezetős oszcillátor váltja fel. A nagyteljesítményű félvezetők, elsősorban a MOSFET-ek fejlődésének köszönhető, hogy egy ilyen meghajtású Tesla-tekercs kis méretben és jó hatásfokkal megépíthető. A Kísérleti Kör (*Skori* tervein alapján, de nem azzal azonos módon) is egy ilyen meghajtású Tesla-tekercs-et épített meg, 3. ábra [7].

Bár külsőre nagyon hasonlít az eredeti Tesla-tekercshez, működése alapjaiban más. Míg a hagyományos Tesla-tekercsben a két rezgőkört egymásra kellett hangolni, a félvezetős megoldás során ez nem jelent korlátozást. A primer kör nem is rezgőkör, nincs benne kondenzátor, hanem csak egy meghajtókör, ami a meghajtó tekercset az oszcilláció által meghatározott frekvencián hajtja meg. A visszacsatolást – más oszcillátorokhoz hasonlóan – magából a rezgőkörből nyerjük, ebben az esetben induktív kicsatolással (4. ábra). Ezáltal csak egy rezonáns áramkörünk van, a szekunder kör, jelentős energia csak ott tárolódik. A soros rezonancia elvén a szekunder körben így is jóval nagyobb feszültség alakul ki, mint ami a transzformátor áttételéből következne.

Ha tisztán ezen az elven építenénk egy Tesla-tekercs-et, az folyamatos üzemben működne, ami nagy terhet jelentene a meghajtó áramkörnek és a tápegységnek. A Kísérleti Kör által épített eszköz életvédel-

4. ábra. A Kísérleti Kör által épített eszköz blokkvázlata.



mi okokból törpefeszültségről működik, de eleve nehéz lenne olyan tápegységet találni, ami ennek folytonos üzemű meghajtását bírná.

Egy kis átalakítással azonban a működés látványának elrontása nélkül csökkenthető a felvett teljesítmény. A lényege, hogy egy NE555 időzítő áramkörrel megszagatjuk az oszcillátor működését, így azt csak az idő kis részében, egy-két milliszekundumra kapcsoljuk be, majd 10-20 milliszekundumra kikapcsoljuk. Ez a rövid működési idő is éppen elég arra, hogy a csúcshőfeszültség megközelítse az állandósult értékét, ugyanakkor a kisülések méretét számottevően nem befolyásolja. Az oszcillátor megépítésekor az is fontos követelmény, hogy a meghajtó áramkör az idő nagy részében kellően nagy visszacsatolást kapjon, hogy a benne lévő MOSFET-ek ne a jelentős energiadiSSIPációval járó lineáris tartományban működjenek.

A Kísérleti Kör által épített Tesla-tekerces primer tekercest egy szimmetrikus push-pull áramkör hajtja, a primer tekerces központi megcsapolású. Ez a topológia egyszerű és hatékony, de érzékeny arra, hogy a meghajtás valóban szimmetrikus legyen. Ellenkező esetben a két félperiódusban létrehozott fluxus nem oltja ki egymást és eredő egyenáram indul meg a primer tekercesben, ami megterheli a meghajtó áramkört és a tápegységet is. A tapasztalat szerint ezekben a topológiákban a meghajtó MOSFET-ek pozitív hőmérsékleti együtthatója segít e probléma megoldásában: ha az egyik ágon nagyobb áram indulna meg, ott a FET melegedése miatt nő a vezetési csatorna ellenállása, ami csökkenti az ágba folyó áramot és stabilizálja a rendszert. Csodákra – természetesen – ez a hatás sem képes, mint azt az évek során tapasztaltuk: a meghajtó FET-et mindig párban kell használni, két különböző típus nem működik együtt hatékonyan. A FET-ek meghajtása teljesen analóg módon történik: egy ellenállásosztóval beállítjuk a FET-ek (közös) munkapontját, a visszacsatoló tekerces pedig – megfelelő áttétellel – erre szuperponálva hajtja a FET-ek gate-jét. Ezt kiegészíti még annyi védelem, hogy a specifikált maximum gate-source feszültséget ne hogy túllépjük.

E Tesla-tekerces fontos része a kisülőcsúcs, ami a tetőkondenzátorra tett csúcsos alakú fémelektroda. Ugyanis mindenhol nagy görbületi sugarú tetőkondenzátor esetén előfordulhat, hogy nem alakul ki kitörési pont, ahol az energia távozni tud a rezgőkörből, így azt csak a tekerces ohmikus veszteségein és sugárzással tudja leadni. Ez ahhoz hasonlítható, mint ha egy rádióadót antenna nélkül üzemeltetnénk, ami ott is és eszközünkben is képes lenne tönkretenni a végfokozati áramkört.

Jelenségek a Tesla-tekerccsel

A Tesla-tekerces működése során többféle szikrát, kisülést is megfigyelhetünk.

- Koronakisülés közeli, néhány centiméterre lévő elektrodák közt alakulhat ki, ha ezekre több ezer voltos feszültséget kapcsolunk. Az elektrodák felületén ilyen-



5. ábra. Ív kisülés a Tesla-tekercesen [1].

kor keskeny fényréteg, vagy világító pontok láthatók. Amennyiben legalább az egyik elektróda csúcsos alakú, akkor csúcskisülésnek hívjuk. Ilyen koronakisülés egyetlen elektróda körül is ki tud alakulni, ha ott az elektromos tér akkora, hogy maga körül másodlagos ionizációt hoz létre. A levegőben mindig képződnek ionok (például kozmikus sugárzás miatt), ezért, ha az elektromos tér elég erős ahhoz, hogy a szabad úthossz alatt annyira felgyorsítsa az iont, hogy az újabb ionizációt okozzon, akkor kialakul a koronakisülés.

- Szikrakisülést akkor tapasztalhatunk, ha a fémelektrodák közt a feszültséget tovább növeljük. Ekkor egy szikra impulzusszerűen átugrik, rövid idő alatt nagy áram folyik át. A szikra ideje alatt az elektrodák között végig kialakul egy vezetési csatorna, amelyben ütközési ionizáció játszódik le.

- Ív kisülés (5. ábra) két fémelektroda között alakulhat ki, nagyobb áramú vezetési csatorna, amelyben jellemzően folyamatosan folyik áram [3].

Egyenfeszültség alkalmazásakor a levegő átütési szilárdsága – páratartalomtól, hőmérséklettől függően – 10–30 kV/cm, viszont a Tesla-tekercesben váltófeszültség van, tehát a szikrák méretéből nem tudjuk közvetlenül megbecsülni a keletkezett feszültséget. Amikor a kisülés elindul a föld felé, egy lokális, kicsiny vezetési csatornát hoz létre, amelyben a levegőben lévő ionok adják a vezetést. Ha minden egyes kisüléskor új vezetési csatornának kellene létrejönnie, csak milliméteres szikrák tudnának keletkezni. A Tesla-tekerces azonban nagyfrekvenciás eszköz, így olyan gyorsan jön az újabb kisülés, hogy a köztes idő alatt a korábban felépült ioncsatorna nem tud eltűnni. Az ionok mozgási sebessége – a sok ütközés miatt – kicsi és ehhez képest a rekombinációjukhoz szükséges idő is nagyobb. A kisülés – természetesen – többfelé is elindulhat, a vezetési csatornában is



6. ábra. Hagyományos izzóban kialakuló kriptonkisülés [1].

körül erős, váltakozó elektromos teret hoz létre, amit a szigetelő nem, vagy csak nagyon kicsit árnyékol le. Maga a szigetelőanyag nem válik vezetővé, ez az elektromos tér nem elég erős ahhoz, hogy töltések induljanak meg benne, ahhoz viszont elég nagy, hogy az eszköztől távolabb, a szigetelő túloldalán lévő fémbe elmozdítsa a töltéseket, azaz abban a fémbe is folyhasson áram.

keletkezhetnek elágazások, ezért láthatjuk a faágszerűen szétfutó, változatos alakú kisülési mintákat.

Ilyen nagyfrekvenciás váltóáram az emberi szervezetre nem veszélyes, holott egészen kicsi, 0,005 A-es egyenáram is már komoly károsodást tud okozni. A sejteinkben nagyon sok ion vándorol, amire a rajtunk átfolyó áram hatással van: ha akár csak kicsi egyenáram éri sejteinket, a bennük lévő ionok mozgását az adott irányba megváltoztatja, ami a sejtek károsodásához vezet. Ilyen nagy frekvenciájú áramoknál viszont már annyira gyors az elektromos tér váltakozása, hogy az ionok nem tudnak olyan távolságra elmozdulni, ami károsodást okozhatna szervezetünkben.¹ A nagyfrekvenciájú áramokat az orvosi gyakorlatban gyógyászati célokra is használják [4]. Azonban nagyon fontos kihangsúlyozni, hogy a ténylegesen megvalósított Tesla-tekerccsek esetén óhatatlanul megjelennek alacsony frekvenciás komponensek is, amelyek rázásérzetet adhatnak és szervezetkárosító hatásuk is van. A bemutatókon ezért fontos felhívni a figyelmet arra, hogy senki ne nyúljon a szikrákba.

Ha egy izzólámpát (6. ábra) vagy fénycsövet a Tesla-tekerccs szekunder tekercsének nem földelt végéhez érintünk, akkor az izzólámpa vagy a fénycső világítani kezd a kezünkben, mert megindul benne az ívkisülés. Ilyen gázkisülésekkor a keletkező fény színképe vonalas szerkezetű, ahol a színképvonalak helye legfőképp a gáz anyagi minőségétől, szélessége pedig a gáz nyomásától függ. A 7. ábrán a neon jellegzetes vörös színét láthatjuk [5].

Nagyon érdekes a szigetelők viselkedése a Tesla-tekerccs által létrehozott nagyfrekvenciás térben. Ha a tetőkapacitásra, azaz a szekunder tekercs tetején lévő fémre szigetelőt, majd arra ismét egy fémtestet teszünk, az ugyanúgy szikrázni fog, mintha a szigetelő dielektrikum ott sem lenne. A Tesla-tekerccs maga

Talán pont a gyönyörű jelenségek miatt, a Tesla-tekerccset a Kísérleti Kör már nagyon sokszor vitte bemutatni például *A fizika mindenkié* rendezvényre, a *Kutatók Éjszakájára*, a *BME Nyílt napokra* és más hasonló rendezvényekre, ahol érdeklődő gyermekek, felnőttek láthattak bele a fizika varázslatos világába (lásd a címképet). A legkülönlegesebb helyszín a Magyar Állami Operaház volt, ahol ez a Tesla-tekerccs járt. 2015. február 14-én, Goethe *Faust* című műve első tőredékes megjelenésének 225. évfordulóján rendezték meg a Faust-bált, amely a tudományokat és a művészeteket kapcsolta össze. Ezen az eseményen a BME Fizikai Intézet hat kutatója és diákjaik, köztük a Kísérleti Kör tagjai mutattak be fizikai kísérleteket, amelyek közt az említett Tesla-tekerccs is sikeresen szerepelt [2].

Irodalom

1. Kísérleti Kör oldala: <https://wjsz.bme.hu/~kiskor/wiki/SSTC>
2. https://www.bme.hu/hirek/20150220/A_tudomany_karakteres_fuszerkent_jarul_hozza_a_vegso_izharmoniahoz
3. Budó Á.: *Kísérleti fizika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
4. Gombás P.: *Fizika mérnököknek*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.
5. Litz J. (szerk.): *Általános fizika, III. kötet*. Dialóg–Campus Kiadó, Budapest–Pécs, 2003.
6. Sánta Botond: *Tesla-transzformátor továbbfejlesztése*. Szakdolgozat, BME, 2013.
7. <http://skory.gylcomp.hu>
8. <http://donkclipstein.com/skin.html>

7. ábra. Ívkisülés egy neonsőben [1].



¹ A jelenség pontos háttere vitatott, vannak, akik a skineffektust (nagyfrekvenciás áramok esetén a vezető belsejében gyakorlatilag nem halad áram, csak a vezető felületi rétegében) is lényegesnek tartják [8].

MOZGÁSSZIMULÁCIÓK A LÉGKÖRBE – 2. RÉSZ

Hogyan írjunk érdekes szimulációkat középiskolában?

Stonawski Tamás
Nyíregyházi Egyetem

Az előző cikkben egyszerű kinematikai szimulációk ismertetése után jutottunk el olyan összetettebbek megírásáig, ahol a légkör szerepe már nem volt elhanyagolható. Érdekes újságcikkek és érettségi feladatokon keresztül teszteltük a szimulációkat, eljutva a felhajtóerő befolyásoló hatásáig. A továbbiakban újabb érdekes példákon keresztül folytatjuk a szimulációk írásának technikáját.

A felhajtóerő „felerősödése”

Természetesen nem adtuk fel, tovább kerestünk olyan mozgásokat, ahol a szimulációba beépített felhajtóerőnek akár egyenrangú szerepe lehet (9. ábra). Így esett a választásunk a szondázó ballonok tanulmányozására. A TOTEX 200 grammos rotációs öntéssel készült latexballonjának adatait mind a kezdeti értékek megadásához, mind az ellenőrzéshez is felhasználhattuk (hasznos teher = 250 g, felengedési átmérő = 117 cm, pukkanási átmérő = 3 m, pukkanási magasság = 21,2 km). Az előző szimulációt abban kellett módosítani, hogy itt a fölfelé mozgás miatt a megtett út az emelkedési magassággal legyen egyenlő, illetve be kellett toldani még egy feltételt, azaz, ha a léggömb térfogata eléri a pukkanási átmérőt, érjen véget az emelkedés, és szabadeséssel folytatódjon a mozgás. A ballon térfogatváltozását az egyesített gáztörvény alapján határoztuk meg: az előző nyomás-, térfogat- és hőmérséklet-adatokból, illetve az aktuális hőmérséklet- és nyomásadatok alapján minden lépésnél ki tudtuk számítani az aktuális térfogatot. A ballon térfogatának és homlokfelületének növekedése miatt a felhajtó- és a közegellenállási erő is növekedett, ami az eredő gyorsulást is nagyban befolyásolta.

```
while v(i)>=0; // amíg emelkedik, tegye a következőket
```

```
  i=i+1;
```

```
  t(i)=t(i-1)+dt; // időléptetés
```

```
  v(i)=v(i-1)+ae(i-1)*dt; // pillanatnyi sebesség
```

Köszönettel tartozom az Ecsedi Báthori István Gimnázium tanulóinak és a Nyíregyházi Egyetem fizikatanár szakos hallgatóinak.



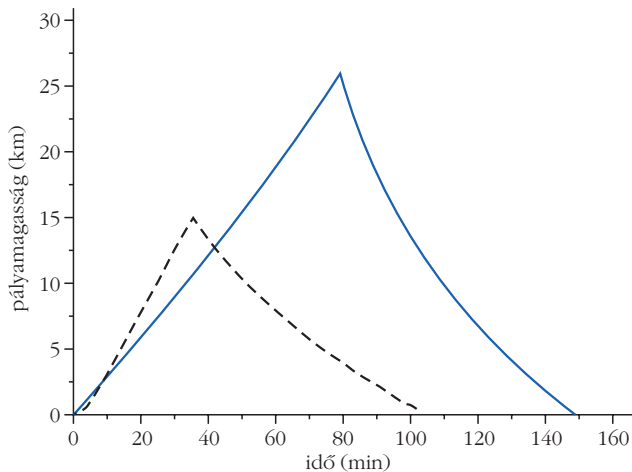
Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori program keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanuló kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.

```
s(i)=s(i-1)+v(i-1)*dt; // megtett út
ph(i)=s(i); // a pillanatnyi magasság a megtett úttal egyenlő
ro(i)=rok0*exp(-rok0*g*ph(i)*p0.^-1); // sűrűségfüggvény
if ph(i)<11000 then T(i)=T(1)-ph(i)*0.0065 // hőmérséklet-
  gradiens a troposzférában
end
if ph(i)>=11000 then T(i)=T(i-1) // hőmérséklet a
  sztratoszférában 20 km-ig
end
if ph(i)>20000 then T(i)=T(i-1)+(ph(i)-ph(i-1))*0.001 //
  hőmérséklet a sztratoszférában 20 km-től 32 km-ig
end
if ph(i)>=32000 then T(i)=T(i-1)+(ph(i)-ph(i-1))*0.0028 //
  hőmérséklet a sztratoszférában 32 km-től 47 km-ig
else T(i)=T(i-1) // hőmérséklet a sztratoszférában 47 km-től
  52 km-ig
end
p(i)=p0*exp(-rok0*g*ph(i)*p0.^-1); // barometrikus
  magasságformula
V(i)=(p(i-1)*V(i-1)/T(i-1))*(T(i)/p(i)) // a ballon tágulása az
  egyesített gáztörvény szerint
r(i)=(V(i)*3/(%pi*4))^(1/3) // ballon sugara
hf(i)=(r(i))^2*%pi // homlokfelület nagysága
Fk(i)=c*hf(i)*0.5*ro(i)*(v(i).^2) // közegellenállási erő
Ff(i)=ro(i)*V(i)*g // felhajtóerő
Fe(i)=-(m*g)-Fk(i)+Ff(i); // eredő erő
ae(i)=Fe(i)/m // eredő gyorsulás
if 2*r(i)>3 then v(i)=-0.1 // pukkanási átmérő
end
if i>1000000 then // mesterséges megállítás
  break;
end
```

Pukkanás és zuhanás

A pukkanás detektálásával kicsit „becsaptuk” a szimulációt, ugyanis e feltételnek megfelelően az emelkedési sebesség egy nagyon kicsi negatív értéket kapott, így a while ciklus úgy érzékelte, hogy vége az emelkedésnek, így a ciklust befejezte. A pukkanás utáni szabadesés már az eddig megírt szimulációk alapján készült, az ejtőernyő adatait (alaki tényező = 1,3; a homlokfelület 1,5 m²; V = 1 dm³) becslések alapján adtuk meg. A szimuláció lefuttatásakor a pukkanási magasság 25,9 km-nek adódott, ami körülbelül 4 km-rel különbözik a gyártó alapján kapott értéktől. Az interneten találtunk felengedett TOTEX 200-as GPS-adatokat [12]. A BME hallgatói által publikált magasság-idő grafikont összehasonlítottuk a szimulációéval (8. ábra).

A grafikonok jellegei megegyezők voltak. Különbségeket a pukkanási magasságokban találtunk. A hallgatók által felengedett ballon 15 km-es magasság-



8. ábra. A szimuláció során (folytonos) és a 2018. március 31-én felengedett TOTEX 200 ballon GPS-adatai alapján (szaggatott) kapott magasság-idő grafikonok.

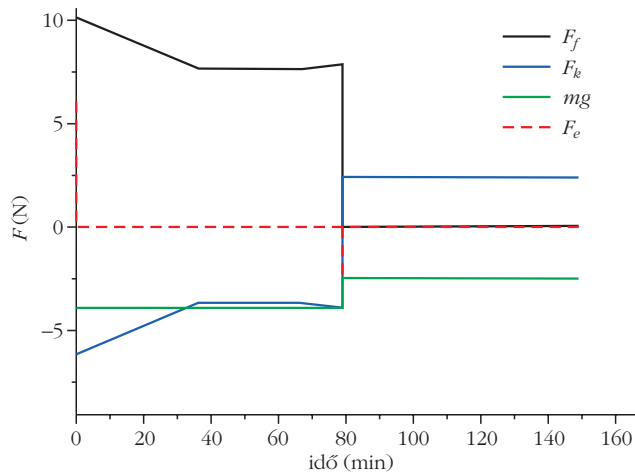
ban pukkant ki, ami körülbelül 6 km-rel tér el a gyártó alapján megadott értéktől (többel, mint a szimulációban). Az emelkedés idő: szimulációnál számított: 79 perc (15 km-es magasság 49 percnél), ballonnal mért: 36 perc.

Ekmondhatjuk, hogy a középiskolai képletekkel szimulált ballon mozgása – a kapott adatok alapján – valóságosnak mondható.

Ballisztikus pályák

Az eddigiekben egydimenziós, azaz vonalmenti mozgásokkal foglalkoztunk, a téma további bővítését az egydimenzióból kilépve érhetjük el, ekkor a síkmozgásokat vesszük górcső alá. A síkmozgás egyik tipikus esete a ferde hajítás. A ferde hajításnál tanultak alkalmazásának egyik legérdekesebb témaköre a ballisztika. Ez a témakör magában foglalja a tetszőleges irányú kezdősebességgel elhajított, ellőtt testek mozgását. Különösen a nagy torkolati sebességgel rendelkező fegyvereknél fontos ismerni a levegő lövedék pályájára gyakorolt hatását. A mesterlövészek komoly fizikai előtanulmányokban vesznek részt, hogy megtanulják, melyek a ballisztikát befolyásoló hatások, és ezen tudás birtokában érik el a lehető legpontosabb találatot.

Hogyan tudjuk az eddig megírt szimulációinkat kétdimenziósra bővíteni? Az egyetlen erőtvény helyett most két erőtvényt kell felírni bizonyos fizikai mennyiségek x és y komponenseivel. A kezdeti értékek a kezdősebesség nagysága és a vízszintessel bezárt szöge (ezekből v_{0x} és v_{0y} meghatározható, és innen fogjuk származtatni a többi mennyiséget is), a lövedék alakja (bc = ballisztikus tényezője), mérete és tömege (r , h), a puskacső pozíciója (például $h = 1,5$ m magasságból tüzelünk) lesznek. Ennél a mozgásnál a közegellenállási erőnek függőleges és vízszintes, míg a felhajtóerőnek csak függőleges (kis méretű lövedékek esetén elhanyagolhatóan kicsi) komponense van. A közegellenállás y komponensénél figyelembe kell



9. ábra. A ballontra ható erők az idő függvényében. Jól látható a felhajtóerő kiemelkedő szerepe, hiszen legnagyobb nagyságú a pukkanásig. Az eredő erő nullához közelít (szaggatott vonal).

venni a maximális magasságnál bekövetkező előjelváltást (ezt a szignum függvénnyel érhetjük el, ahol a vy lesz az argumentum).

A modern fegyverek torkolati sebessége a hangsebességet is túlhaladja (akár 2-3-szorosa is lehet), így a lövedéket – nagy sebessége miatt – a közegellenállási erő is jelentősen akadályozza a mozgásában. A szimulációkat úgy írtuk meg, hogy a közeg figyelembevételével és a közeg nélkül vett számításokat is össze tudjuk hasonlítani (10. ábra, y - x grafikon).

while y(i) >= 0; // amíg földet nem ér, tegye a következőket

```

i=i+1;
t(i)=t(i-1)+dt;
vx(i)=vx(i-1)+aex(i-1)*dt;
vy(i)=vy(i-1)+aey(i-1)*dt;

x(i)=x(i-1)+vx(i-1)*dt;
y(i)=y(i-1)+vy(i-1)*dt;

ph(i)=h+y(i);
ro(i)=rok0*exp(-rok0*g*ph(i)*p0.^-1); //sűrűségfüggvény

Fkx(i)=cx*hf*x*0.5*ro(i)*(vx(i).^2)
Fky(i)=-cy*hf*y*0.5*ro(i)*(vy(i).^2)*signm(vy(i))

Ff(i)=ro(i)*V*g // felhajtóerő

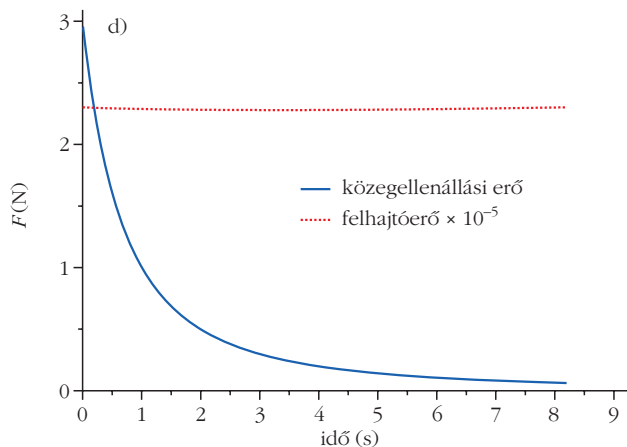
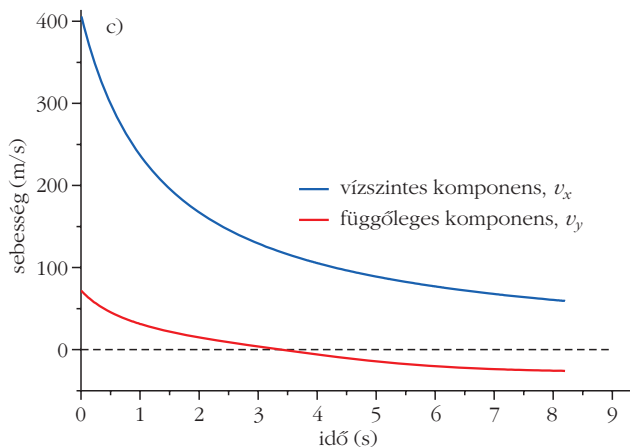
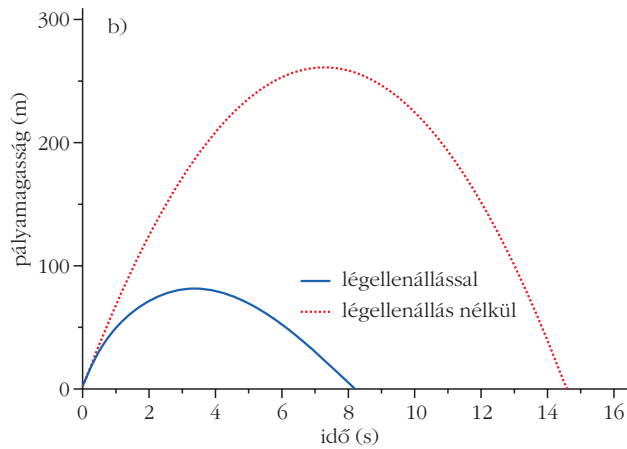
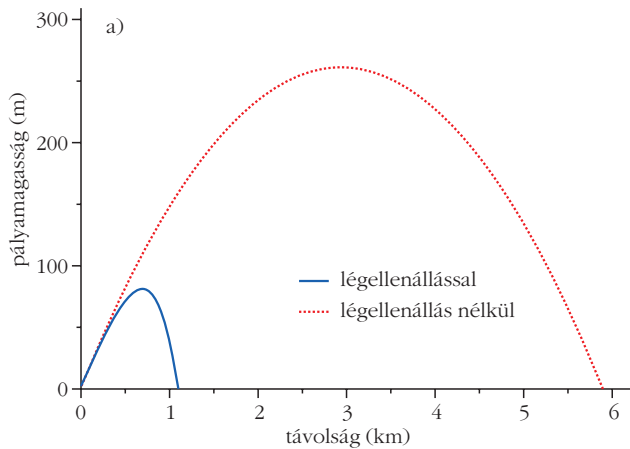
Fex(i)=-Fkx(i)
Fey(i)=-((m*g)+Fky(i)+Ff(i)); //eredő erő

aex(i)=Fex(i)/m
aey(i)=Fey(i)/m;

if i>100000 then
    break;
end
end

```

A grafikonról leolvasható, mennyire erősen befolyásolja a közeg a lövedék pályáját: míg az y - x grafikon a közeg nélküli esetben szimmetrikus parabolaág, a közeg figyelembevételével a parabolaív eltorzul, az emelkedés után „kihegyesedik”. A lövés távolsága is meglehetősen lerövidül: 6 km-ről 1 km-re (a lövés magassága ugyanígy), a lövés időtartama 14 másodpercről 8-ra csökken. A v - t grafikon a sebesség füg-



10. ábra. A .357 Magnum kézfegyver adataival lefutott szimuláció. A felső két ábra a közegellenállás figyelembevételével és anélkül hasonlítja össze a lövedék pályáját (a), illetve a magasság-idő grafikonokat (b). Az alsó ábrákon: balra a lövedék sebességének x és y komponensei (c), jobbra a közegellenállási erő és a felhajtóerő időbeli változása látható (d). A kezdeti értékek: $v_0 = 411$ m/s, $\alpha = 10^\circ$, $h_0 = 1,5$ m, $d = 9,1$ mm, $m = 0,0102$ kg, $l = 29,3$ mm, $c_x = 0,45$, $c_y = 0,8$.

gőleges komponensének előjelváltását jól szemlélteti, de a 8. másodperc utáni viszonylag nagy becsapódási sebességek is jól leolvashatók róla. Az $F-t$ grafikon elemzésekor szembevetjük a közegellenállási erő felhajtóerővel szembeni dominanciáját (5 nagyságrendű), és hirtelen csökkenése (a sebességhez hasonlóan).

Egy másik érdekes kérdés, hogy amíg közeg nélkül azonos kezdősebesség mellett a 45° -os szögben kilőtt lövedék repül a legmesszebbre, úgy ez az érték a közeg hatására 30° -ra módosul (11. ábra).

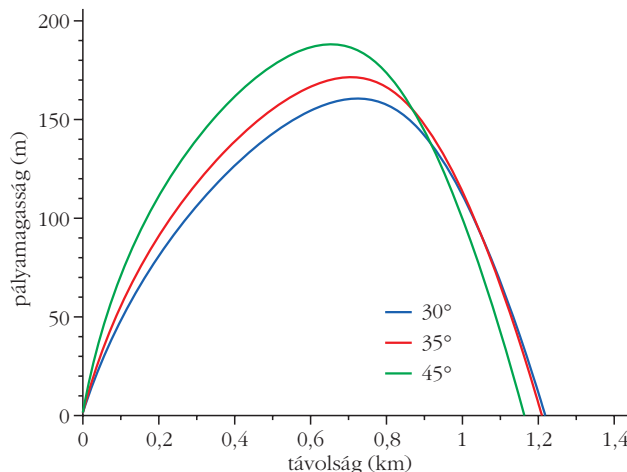
A szimuláció „hitelesítését” egy vadászoknak fejlesztett szoftveroldalról letöltött ábra alapján végeztük el [13]. Mivel az ábrán feltüntették a lövedék torkolati sebességét, a lövedék tömegét és ballisztikus együtthatóját (a lövés szögét az ábráról kiszámoltuk), az így kapott ábrát be tudtuk helyettesíteni a szimulációba, és össze tudtuk vetni az eredetivel. A feladat egyik különlegessége a más mértékegységben való „gondolkodás” volt, az átváltásokat a programunkban is végre kellett hajtaniuk (12. ábra).

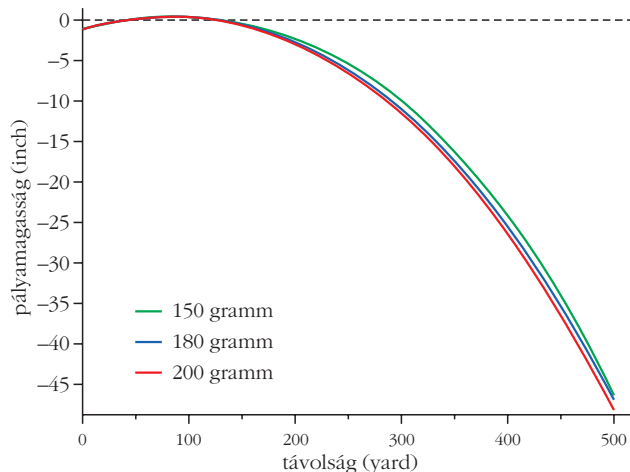
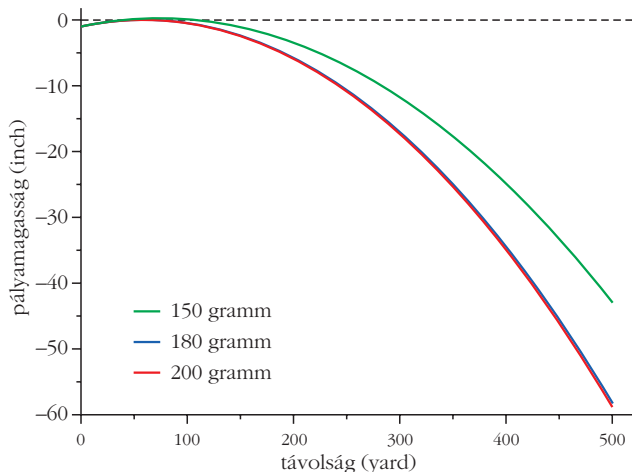
4–10 inches eltérést tapasztaltunk a vizsgált 500 yardos távolságnál a gyári adatoktól. A szimulációkban a jóval kisebb (150 g) tömegű és ballisztikai tényezőjű lövedék „süllyedése” elmaradt a másik két lövedékétől, a gyári grafikonon ugyanezt nem tapasztaltuk.

Játékfegyverrel is végeztünk kísérleteket, az így kilőtt lövedék videóanalízisét is összevetettük a szimulációval, ami szintén jó egyezést mutatott.

Összegzésképpen elmondható, hogy szimulációnk jól közelítette a valóságos mozgásokat, de több szempontból is finomítani lehetne. A nagy sebességű lövedék ugyanis maga előtt összehúzza a levegőt (ez a sű-

11. ábra. Különböző szögekben kilőtt lövedék pályái a szimuláció alapján. Az ábrán a 25° -hoz tartozó pálya közel egybeesne a 35° -hoz tartozóval.





12. ábra. A bal oldalon a szimulációnk alapján kapott trajektória, a jobb oldalon a gyártó szoftverének grafikonja.

rüség-növekedés sebességfüggő), így nagyobb sűrűség-értékekkel kellene számolni, a vektorok vízszintes és függőleges komponensekre való felbontásánál pedig a lövedék nem tartja a vízszintes helyzetet, így a homlokfelület nagysága is folyamatosan változik a mozgás során. Ezen korrekciók beépítésével – feltehetően – jobban közelíthetünk a valóságos trajektóriákhoz.

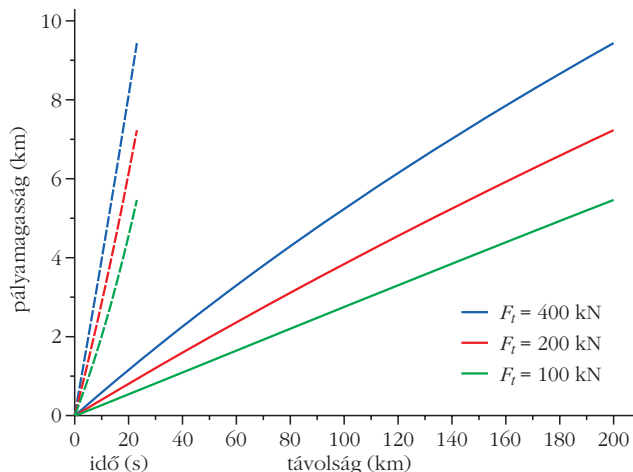
tudjuk kiszámolni g -t a távolság függvényeként. A légnyomás számítását pedig nyugodtan benne hagyhatjuk a szimulációkban, hiszen az exponenciális csökkenés a nagyobb távolságok esetén 0 Pa nyomást fog eredményezni.

Ideális rakéták

Még izgalmasabb a fent leírt ferde hajtás, ha a lövedéket nem hagyjuk magára a nehézségi erőterben, hanem a rakétamozgás során megismert tolóerőt is beépítjük a szimulációba (13. ábra). Szakkörön a legegyszerűbb esettel foglalkoztunk, amikor a tolóerő állandó és sebesség irányú (azaz előremutató), a mozgás során pedig (a kiáramló hajtóanyag miatt) egyenletes tömegcsökkenés következik be.

A rakéták mozgását nem túl messze engedve tanulmányozhatjuk csak, mert nagyobb távolságoknál már a g változásaival is számolnunk kell. Ilyenkor, legegyszerűbb esetben az általános tömegvonzás képletéből

13. ábra. Különböző tolóerőkkel elindított rakéták pályái (jobbra), illetve magasság-idő (balra) grafikonjai ($m = 1$ tonna, $r = 4$ m, $h = 10$ m, $c_x = 0,505$, $c_y = 0,8$, $\alpha = 30^\circ$).



Konklúziók

A szimulációk egyre fontosabb szerephez jutnak a tudományban, de az oktatásban is. Ahhoz, hogy közelebbről is megismerkedjünk a szimulációk működési mechanizmusával, érdemes néhány egyszerű algoritmus alapján megírt szimulációt elkészíttetni tanítványainkkal.

A szimulációk írása egy feladat komplex megoldásának is felfogható – hiszen a tanórákon előforduló feladatok többnyire csak egy speciális feltételek alapján fennálló lehetséges végállapot hiányzó fizikai mennyiségeinek kiszámítását követelik meg –, mert a szimulációkban lehetőségünk van kiterjeszteni az alapfeladatot más kezdőfeltételekre, vagy a környezet befolyásoló hatásainak figyelembevételére, így más végállapotokhoz is eljuthatunk. Érdekes felfedezéseket tehetünk, ha például a ferde hajtásnál megkeressük azt a szöveget, amellyel a legmesszebb repül el a test (45° helyett csak 30°), meddig repül fel egy léggömb, milyen sebességgel csapódik be a földre egy magasról lezuhanó test stb.

A szimulációkat játékosan is felhasználhatjuk a tanítási folyamatban (hagyjuk, hogy a tanulók próbálgatással jussanak új összefüggések felismerésére), de a szimuláció akkor jut igazán fontos didaktikai szerephez, ha valamilyen konkrét fizikai problémát szeretnénk vele megoldani vagy éppen tisztázni, de jó szolgálatot tehet valamilyen kísérlet várható kimenetelének előzetes tervezéséhez (például He-ballon felengedése és begyűjtése) is.

Valószínű, hogy akkor a legeredményesebb a szimulációkkal foglalkozni, amikor egy, a számítástechnikát és a fizikát szerető diák maga írja meg ezeket a programokat. Ahhoz viszont, hogy a tanulók önálló mun-

kára is képesek legyenek, először csoportmunkában, közösen kell felépíteni az alapalgoritmusokat, és ezt követően feladat-specifikusan kell továbbfejleszteni a szimulációkat, lehetőleg már önállóan. A programírást szaktárgyi érdeklődés-felkeltésre is lehet használni, hiszen tapasztalat szerint a tanulók többsége jobban kedveli a számítástechnikát, informatikát, mint a fizikát.

A kinematikából kiindulva néhány egyszerű szimuláció a [14] linken érhető el.

Irodalom

12. http://legokor.hu/2018-04-27-matef2_3_repules/
13. <http://www.ballisticsapp.com/300-win-mag-ballistics.htm>
14. <https://1drv.ms/f/s!An0er2QwwGjytDxz7aod3A9Q2jy0>

VÉLEMÉNYEK

TANÁRI HITVALLÁSOM¹

Tóth Eszter
Vác

A legtipikusabb társadalmi jellegzetesség ma az elégedetlenség. A társadalom azt akarja, hogy a dolgok gyorsabban menjenek és nagyobb léptékűek legyenek, ami azt jelenti, nem ülhetünk a babérjainkon. Ez nagyon fontos szerintem.

A kérdés az: mit teszünk ezért. Egy lehetséges válasz, hogy ezt a sorsra bízjuk. A másik megközelítés, amiben én hiszek, hogy ez a tanári küldetésünk.

Mindenki felemelkedése a tükör előtt kezdődik.

Vannak példák országunk iskoláiban a kiválóságra és az áttörésre – kevés, de van. Van ellenkező példánk is, és ami ott hiányzik nekünk: az a jó tanár. Szükségünk van kihívást értő tanárookra, olyan tanárookra, akik majdnem teljes mértékben kihasználják a gyerekekben rejlő lehetőségeket.

Hadd mondjam meg nektek, a tanári munka nem állhat meg egy szinten. Nincs „kicsit jó tanár”. Van természetadta tehetségű tanár és van magát lépcsőzetesen felépítő tanár. De a te tanárságod minősége egyedül tőled függ, és az egy alapos önvizsgálattal kezdődik – a tükör előtt. Onnan a felemelkedés olyan, mint egy ugrás egyenesen a határtalan égbe.

A tanár leginkább a gyerekek által érintett. Arra való, hogy elvezesse a fiatalat olyan területekre és eredményekre, amelyeket nem érhetnének el nélküle. A tanár a csoport szerves részeként kell, hogy működjön, nem saját kénye-kedvére, hanem a gyerekekkel, akiket meglátnia kell és nem keresztül nézni rajtuk. Gyerekekkel, akiket meg kell értenie, akiktől tanulnia kell, és elsősorban be kell vonnia őket a tanulásba. És amikor ők már a tied, te kell, hogy legyél ihletük forrása, te kell, hogy legyél a nevelőjük, neked kell megrónod őket, ha szükséges – és neked szeretned kell őket!

Tanárnak lenni arról is szól, hogy ragaszkodj az igazsághoz. A tanároknak még a legzivatárosabb időkben is irányítúként kell szolgálniuk. Az osztályukat. Igen, a tanárt meggyőzhetik és befolyásolhatják az emberek, ha szükséges, de a tanárnak ragaszkodnia kell az igazsághoz, olyan kell, hogy legyen, mint egy irányítú, és nem, mint a lág a szélben.

Oly korban élünk, ami bevezette az „alternatív igazság” fogalmát. Én nem hiszek ebben. Van igazság és van igazságtalanság. Van jó és van rossz. Nekem egyetlen igazság létezik: a gyerekeket segíteni a tudáson és a tiszta érzelmeken alapuló, ezért biztonságot nyújtó, belső szabadsághoz. Ezt semmi nem írja felül.

Azt hiszem, hogy a valódi erkölcs diskurzusait jelenleg félredobják, inkább adnak helyet az azonnali, vonzó fecsegésnek, a chat-stílusnak. De értékeinket – az empátiát, a barátságot, a személyes példamutatást – nem szabad félretenni. Nem hagyhatjuk, hogy egyetlen tesztnk legyen csak: a fegyelmi vizsgálat. Többet kell igényelnünk magunktól. Önvizsgálatunk erkölcsi vizsgálat. És ha nem védjük meg értékeinket, gyorsan elérünk a csúszós lejtőre.

Ezt az írást a Taní-tani Online-ból, a szerző engedélyével vettük át. (http://www.tani-tani.info/tanari_hitvallasom)

¹ Ez az írás arról szól, és nem másról, hogy „tanárok állnak a vartán” (*Marx György*). Rajtuk múlik következő generációink sorsa. Röviden: hitet akartam adni a kollégáimnak. Bármilyen szakosoknak. Nekem erre a célra „véletlenül” éppen a fizika tanítása a jó, azt tudom hitelesen használni. – A „hitvallásom” kezdettől fogva az, ami itt olvasható. De most az eredeti szöveget nem én írtam. Az eredeti nem is a tanárságról szól. Valaki más írta a vezetésről 2018 márciusában, amit angolból lefordítva írtam át a tanárságomra. „Valaki más” ma már nyugdíjas pilóta. A neten „találkoztam vele” először egy rövid videóban: <https://www.youtube.com/watch?v=hCW2noF1QTE>. Lenyűgözött magas szintű repülési tudásának és a múltat tisztelő, tiszta lelkének együttese. Utánanéztem a neten. Így találtam rá az általa írt cikkekre. Számomra csoda volt, hogy az általános emberi értékek a Föld távoli pontjain mennyire hasonlóak azoknak, akik foglalkozásukat hivatásuknak érzik.



Tóth Eszter – Rátz Tanár Úr életműdíj, 2014 – nyugdíjas fizikatanár, de még tanít iskolában. Írt fizikatankönyveket, amelyek megjelentek kínai, japán, angol, spanyol nyelven is, volt a fizikatanárok nemzetközi egyesületének titkára, félszáz országban tartott előadást fizikatanításról. De vallja: nem ezek a dolgok hitelesítik, hanem tanítványai sikerei az OKTV, TUDOK, a KöMaL versenyeken, és elsősorban felelős, szabad Emberré válásukban.

A tanításban ezért a személyes példamutatás is nagyon fontos. A tanárnak több kötelessége van, mint joga, és az igazán jó tanár olyan ember, aki képes félelem nélkül elfogadni saját tévedését. Csak a gyenge emberek rejtőznek az elvárások mögé, és félnek beismerni, hogy hibáztak. Mint tanár minden órám után mindig eljutottam az önvizsgálat „szobájába”. Mint mindenki más, azért mentem oda, hogy megtaláljam hibáimat és tévedéseimet, és tanuljak belőlük. Ez nem gyengeség. Ez a tanári lét egyik lényege.

Az utolsó elv a szerénység és az alázat. Egyetlen tanár sem Isten. Emberi lény. A gyerekek nélkül, akiket tanítasz, nem fogsz sehová eljutni, ezért a gyerekek között kell élned, szerényen és alázatosan kell tenned a dolgod: velük és közöttük.

Minden nép története generációkon át történő egyedi utazás. Messze előrelátó tanárok „terméke”. Fiataloknak mondom: Ti vagytok az új generációnk, népünk olyan magasra fog emelkedni, amit Ti megcéloztok.

HÍREK – ESEMÉNYEK

MAGYAR SIKEREK A 2019. ÉVI ICYS-EN

Szépen szerepeltek a magyar diákok a malajziai Kuala Lumpurban, 2019. április 19. és 25. között megrendezett 26. International Conference of Young Scientists (ICYS) tanulmányi versenyen. A matematikai, fizikai, informatikai, környezet- és élettudományi angol nyelvű versenyen 7 szekcióban 27 országból jött középiskolás 150 prezentációja hangzott el, és ugyanennyi posztert mutattak be. A diákok teljesítményét nemzetközi zsűri minősítették, és éremmel, oklevéllel jutalmazták.

Az 5 tagú magyar csapat ezúttal 7 díjjal tért haza.

A magyar csapat eredménye

FIZIKA SZEKCIÓ

Stiga Viktória III. díj, bronzérem, (12. o) Budapest, Német Nemzetiségi Gimnázium és Kollégium;

Gyulai Márton III. díj, bronzérem és a „Best poster” érem, (12. o.) Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium

Penc Patrik III. díj, bronzérem, (12. o) Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Iskola

KÖRNYEZETTUDOMÁNY SZEKCIÓ

Szászi József II. díj, ezüstérem, (11. o) Kisvárd, Kisvárdai Bessenyei György Gimnázium és Kollégium

ÉLETTUDOMÁNY SZEKCIÓ

Szabó Boglárka II. díj, ezüstérem és a „Best poster” érem, (11. o) Kisvárd, Kisvárdai Bessenyei György Gimnázium és Kollégium

FELKÉSZÍTŐ ÉS KÍSÉRŐ TANÁROK

Rajkovits Zsuzsanna ny. egyetemi docens, ELTE Anyagfizikai Tanszék, kísérő, az ICYS nemzetközi szervezőbizottságának elnöke, az ICYS egyik alapítója,



A díjkiosztón: Szászi József, Szabó Boglárka, Kirchkeszner Csaba, Rajkovits Zsuzsanna, Penc Patrik, Stiga Viktória, Gyulai Márton.

Illy Judit ny. egyetemi adjunktus, ELTE, Anyagfizikai Tanszék, ezúttal csak a hazai készüléskor segített, *Kirchkeszner Csaba*, PhD hallgató, ELTE, Kémiai Intézet, a csapat kísérője, a nemzetközi zsűri tagja,

Bényei Éva, orvostanhallgató, SOTE, kísérő, nagyon sikeres volt versenyző diákunk, a nemzetközi Poster zsűri elnöke.

A diákok a pályamunkával iskolájukban, illetve különböző kutatóhelyeken készültek. Az előadások és poszterek az ELTE Anyagfizikai Tanszékén az említett felkészítők közreműködésével, többnapos foglalkozások során öltöttek olyan formát, amellyel diákjaink a nemzetközi versenyen sikeresen szerepelhettek.

Ezúton mondunk köszönetet az Emberi Erőforrások Minisztériuma részvételünket lehetővé tevő támogatásért.

Magyar Fizikus Vándorgyűlés 2019

Kedves Kollégák!

A hagyományokat folytatva ez év augusztus 21. és 24. között rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a magyar fizikusok és fizikatanárok legnagyobb, háromévenként szervezett hazai találkozóját, a

Magyar Fizikus Vándorgyűlést.

A találkozó helyszíne Sopron, a Soproni Egyetem Lővérekben fekvő kampusza. Sopron nemcsak szubalpin klímájáról és látnivalóiról nevezetes, hanem iskoláiról és a fizika történetében játszott szerepéről is. A soproni líceum diákja volt Mikola Sándor, Rátz László és Vermes Miklós. A soproni egyetem jogelődjének, a selmecebányai akadémiának volt tanára Christian Doppler, Simonyi Károly Sopronban építette meg első részecskegyorsítóját.

A plenáris és a szekciókban elhangzó előadásokban, valamint a kiállított posztereken első kézből tájékozódhat az itthon és külföldön dolgozó magyar fizikusok elmúlt három évben elért kiemelkedő kutatási eredményeiről.

A magyar fizikus közösség számára különösen fontos, hogy ebben az évben emlékezünk meg Eötvös Loránd halálának 100. évfordulójáról. A Vándorgyűlésen is hangsúlyosan fog megjelenni Eötvös munkásságának aktualitása.

További információ található a Fizikus Vándorgyűlés <http://elft.hu/fizikusvandorgyules> címen megnyíló honlapján.

Üdvözlettel:
Sólyom Jenő



1EÖTVÖS
www.eotvos100.hu



Eötvös Loránd (1848–1919)
fizikus, geofizikus és
a felsőoktatás megújítójának
100. évfordulója
Az UNESCO-val közösen emlékezzük



NEMZETI KUTATÁSI FELHÍZTÁSI
ÉS INNOVÁCIÓS HÍVATAL
AZ NKFI ALAPBÓL
MEGVALÓSULÓ
PROJEKT

