

fizikai szemle



2021/7-8

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:
Lendvai János

Szerkesztőbizottság:
Biró László Péter, Bokor Nándor, Czitrovsky Aladár, Füstöss László, Gyürky György, Hebling János, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Ormos Pál, Papp Katalin, Simon Ferenc, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Takács Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Műszaki szerkesztő:
Kármán Tamás

A folyóirat e-mailcíme:
szerkesztok@fizikaiszemle.hu
A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:
http://www.fizikaiszemle.hu



A címlapon:

**A Nap járását követő napraforgó, háttérben a virágképzés után állandóan keletre fordult társaival (fotó: Horváth Gábor).
Lásd az írást a 226–234. oldalakon.**

TARTALOM

<i>Bebesi Zsófia, Jubász Antal:</i> A folyékony víz nyomában a Naprendszerben	217
<i>Horváth Gábor, Virágh Balázs, Horváth Dániel, Slíz-Balogh Judit, Horváth Ákos, Egri Ádám, Jánosi Imre:</i> Miért keletre néz a Napot már nem követő napraforgók (<i>Helianthus annuus</i>) virágzata? – 1. rész	226
<i>Kálmán Péter, Keszthelyi Tamás:</i> Anomáliák a magfizikában	234
<i>Bognár Gergely:</i> Megoldotta-e a fizika Zénón paradoxonjait?	238
<i>Pálfalvi László, Kovács Vivien:</i> A Green-féle reciprocitási tétel és néhány folyománya – 1. rész	241
<i>Molnár János Albert:</i> Egy kéttáblás siófoki napóra	245

A FIZIKA TANÍTÁSA

<i>Simon Tamás, Dálya Gergely, Hömöstrei Mibály:</i> A bolygók körüli holdak számának meghatározásáról	246
<i>Jaloveczki Gábor, Jaloveczki József, Renkus Tibor:</i> Egy kevésbé ismert biliárdjáték, a mülökés – 1. rész	254
<i>Szeidemann Ákos, Gróf Andrea, Tél Tamás:</i> Mozgás a forgó Földön: a ciklonoktól az Eötvös-mérlegig	258
<i>Stonawski Tamás:</i> Az aranyetszés és más arányok	262
<i>Bartos-Elekes István:</i> Kísérletek nemlineáris mágneses anyagokkal a nagyváradai Ady Endre Líceum fizikumában	267
<i>Tóthné Jubász Tünde:</i> Üveg megfújásával keltett hang frekvenciájának vizsgálata Audacity programmal	280
<i>Vitkóczy Fanni, Piláth Károly, Kopasz Katalin:</i> Ultrahanghullámok interferenciájának demonstrálása Arduinóval	284
<i>Farkas László:</i> Újra lengett a keszthelyi Fő téri templomban Kunc Adolf Foucault-ingája	288

SZÓRAKOZTATÓ FIZIKA

<i>Horváth Dezső:</i> Humor a tudományban, tudomány a humorban	291
--	-----

Zs. Bebési, A. Jubász: Searching for liquid water in the Solar System
G. Horváth, B. Virágh, D. Horváth, J. Slíz-Balogh, Á. Horváth, Á. Egri, I. Jánosi: Why do the inflorescences of sunflowers (*Helianthus annuus*) that no longer follow the sun face east? – Part 1
P. Kálmán, T. Keszthelyi: Anomalies in nuclear physics
G. Bognár: Did Physics solve the paradoxes of Zeno?
L. Pálfalvi, V. Kovács: Green's reciprocity theorem and some of its corollaries – Part 1
J. A. Molnár: A two-panel sundial in Siófok

TEACHING PHYSICS

T. Simon, G. Dálya, M. Hömöstrei: Determining the number of moons around the planets
G. Jaloveczki, J. Jaloveczki, T. Renkus: A little-known billiards game, the artistic shot – Part 1
Á. Szeidemann, A. Gróf, T. Tél: Motion on the rotating Earth: from cyclones to the Eötvös scale
T. Stonawski: The golden section and other ratios
I. Bartos-Elekes: Experiments with nonlinear magnetic materials at the physicum of the Ady Endre lyceum in Oradea
T. Tóth-Jubász: Investigating the frequency of sound produced by blowing on glass with the Audacity software
F. Vitkóczy, K. Piláth, K. Kopasz: Demonstrating the interference of ultrasound waves with Arduino
L. Farkas: The Foucault pendulum swung again in the church on the Main Square of Keszthely

FUN PHYSICS

D. Horváth: Humor in science, science in humor

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését támogatják:



A FOLYÉKONY VÍZ NYOMÁBAN A NAPRENDSZERBEN

– a primitív élet feltételeinek kutatása űrszondákkal

Bebesi Zsófia, Juhász Antal
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest

Az emberiséget a tudomány hajnala óta foglalkoztatja annak kérdése, hogy létezhet-e élet bolygónkon kívül. És bár egyelőre nem született erre utaló felfedezés, napjainkban, amikor Naprendszerünk bolygóit és azok holdjait már közvetlen közlőről is megvizsgálhatjuk, több esetben felmerült, hogy a megfelelő fizikai és kémiai feltételek együttállása esetleg lehetővé teszi a primitív létformák kialakulását bizonyos égitesteken, akár itt, a közvetlen kozmikus környezetünkben is. A mérnökök és kutatók jelenleg is folyamatosan dolgoznak a primitív élet, vagy akár a későbbi emberes űrrepülések feltételeinek vizsgálatára tervezett űrmissziók létrehozásán, amelyek közül némelyik még ebben az évtizedben újtára indulhat. Természetesen nem felejtkezhetünk meg az elmúlt évtizedek eredményeiről sem, amikor például a Mars felszínén, a kőzetekben, a talajban kerestük az élet nyomait, de jelen tanulmányban – a téma terjedelmére tekintettel – a Marssal nem foglalkozunk, ehelyett kifejezetten azokra az égitestekre összpontosítunk, amelyeket közelebbről csak a közelmúltban tudtunk alaposan megvizsgálni.

Az elmúlt évtizedek űrszondás mérései lehetővé tették, hogy részletesen megismerjük a Jupitert és a Szaturnuszt, valamint holdjaikat, illetve eljutottunk az aszteroidaöv legnagyobb égitesteihez és a Kuiper-övbé is. A Jupiter esetében a Galileo (1995–2003) és a Juno (2016–), a Szaturnusznál pedig a Cassini-Huygens (2004–2017) űrmissziók révén tanulmányozhatuk ezen bolygók nagyobb holdjait, a környezetükben zajló fizikai folyamatokat, és számos érdekes új felfe-

dezés is született. Ezek egyike a Szaturnusz Enceladus holdjának napjainkban is zajló aktivitása, az űrmisszió egyik legérdekesebb megfigyelése. A Jupiter Europa holdjáról már korábban is tudtuk (földi és űrszondás megfigyelésekből), hogy felszíne jéggel borított, aránylag fiatal, valamint feltételezték, hogy kiterjedt kerge alatt óceáni réteg található. A két említett holdon kívül a folyékony víz hordozására vonatkozóan további jelölteknek tekintik például a Jupiter Ganymede holdját, a Ceres törpebolygót, de ide sorolható a több szempontból is kivételes Szaturnusz-hold, a Titan is, bár ott az eddigi mérések globális felszín alatti óceán helyett inkább rétegesen elhelyezkedő víztározókra utalnak. Folyamatosan zajlanak kutatások arra is, hogy a Mars felszín alatti tartományaiban esetleg napjainkban is találhatunk-e folyékony vizet tartalmazó rétegeket.

A felszín alatti tartomány kutatása nem triviális feladat, jelenleg több űrmissziót készítenek elő, elsősorban az Europa újbóli meglátogatására, de az Enceladus további vizsgálata is napirenden van. Mindkét hold esetében a kiáramló vízjég összetételét elemezve megfigyelhetjük azokat az összetevőket (só és ásványi anyagok), amelyek révén ezek az égitestek lehetségessé válhattak a primitív életformák létrejöttének támogatására, hordozására, azonban konkrét létezésükre egyelőre nincs közvetlen bizonyítékunk. Ennek felderítése a következő évtizedek feladata lesz.

Vizet tartalmazó égitestek a Naprendszerben, valamint a felszín alatti óceánra utaló jelek

Bár Naprendszerünk égitestjeinek többségén jelen van a víz (vagy összetevői), de általában fagyott állapotban. Folyékony vizet mostanáig közvetlenül csak Földünk felszínén figyelhetünk meg, azonban számos közvetett bizonyíték utal arra, hogy a Jupiter és a Szaturnusz némelyik holdján, a Marson, valamint egyes aszteroidákon is vagy állandó jelleggel, vagy időről időre cseppfolyós halmazállapotú vizet találhatunk.

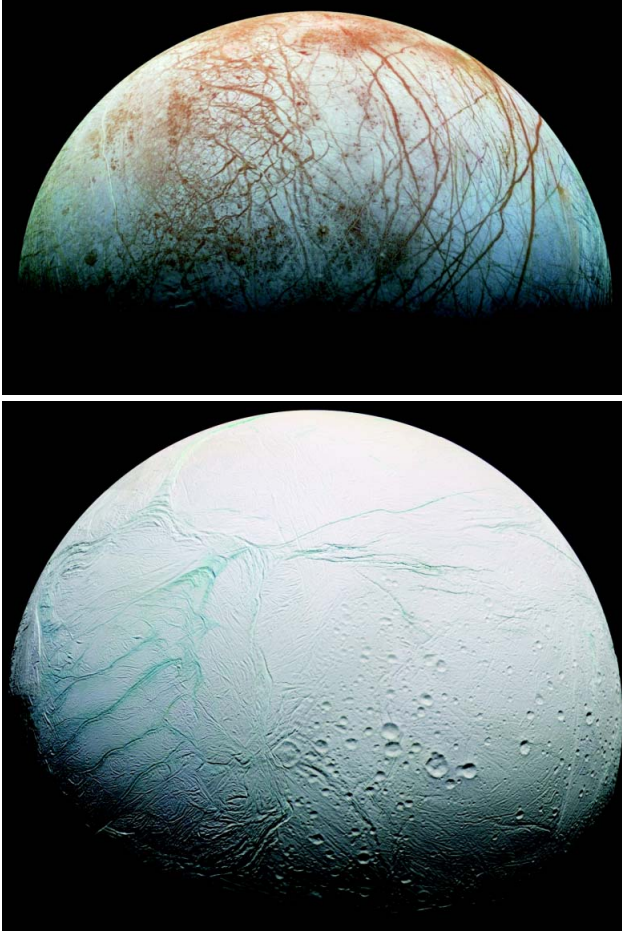
A Földön kívüli folyékony víz előfordulásának két elsődleges jelöltje a Jupiter körül keringő Europa, valamint a Szaturnusz Enceladus holdja (1. ábra). Számos jel utal arra, hogy e két hold felszínét borító jégpáncél alatt akár globális, folyékony vízóceán húzódhat. Ezek mellett felmerült még, hogy a Jupiter Ganymede holdjának, valamint a Szaturnusz Titan holdjának felszíne alatt is lehet folyékony víz. Fagyott állapotban kimutatták már a vizet a Mars és a Plútó mellett a Ceres nevű törpebolygón, valamint a Jupiter Callisto holdján és a Szaturnusz Dione holdján is. A



Bebesi Zsófia okleveles csillagász (2003) és fizikus (2005) – Szegei Tudományegyetem, Ph.D. (2008, ELTE). 2003 óta az MTA KFKI RMKI munkatársa, 2012-től a Wigner FK Űrfizikai és Űrtechnikai Osztályának tudományos főmunkatársa. Elemezte a Cassini és a Venus Express űrszondák adatait. Kutatói érdeklődése a bolygók mágneses tere és a napszél, illetve az interplanetáris mágneses tér közötti kölcsönhatás, a Titán plazmakörnyezetének és felső atmoszférája ionizációs folyamatainak vizsgálata.



Juhász Antal 1988-ban végzett az ELTE fizikus szakán, 1989 óta dolgozik a KFKI Űrfizikai osztályán. Doktori fokozatát 1993-ban szerezte meg. Jelenleg a Wigner FK Rézszecke és Magfizikai Intézetének tudományos főmunkatársa. Szakterülete a Naprendszerben található kozmikus por (bolygóközi, bolygók, holdak, üstökösök körüli por-plazma-elektromágneses tér kölcsönhatása) dinamikájának, térbeli eloszlásának modellezése a különböző űrszondák poméréseinek értelmezéséhez, előrejelzéséhez.



1. ábra. A Jupiter Europa holdja (föül), valamint a Szaturnusz körül keringő Enceladus (alul) esetében is számos bizonyíték utal arra, hogy a felszínük alatt globális óceán van.

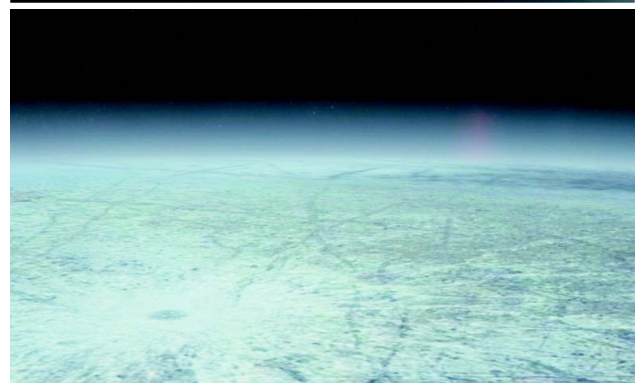
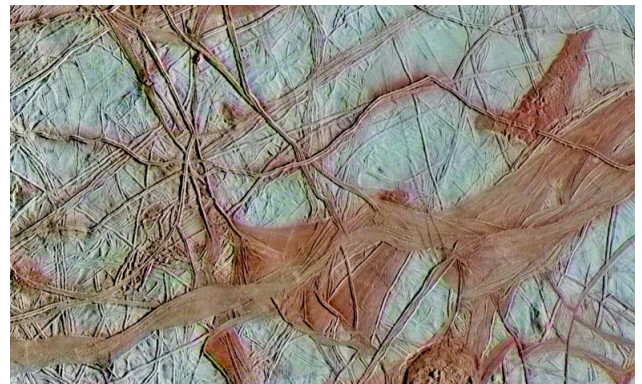
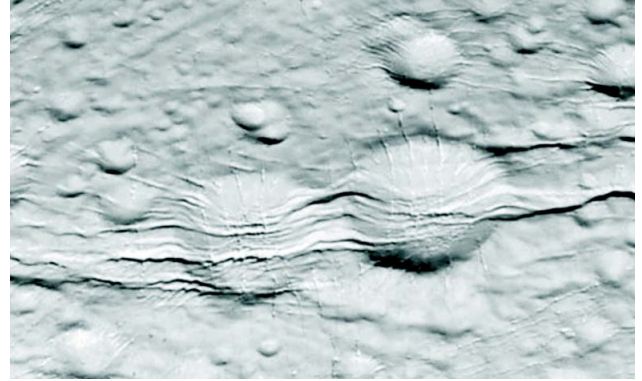
Szaturnusz további jeges holdjai, a Mimas, a Tethys és a Rhea szintén tartalmaznak vízjeget, és az a különleges Iapetus holdon is megtalálható.

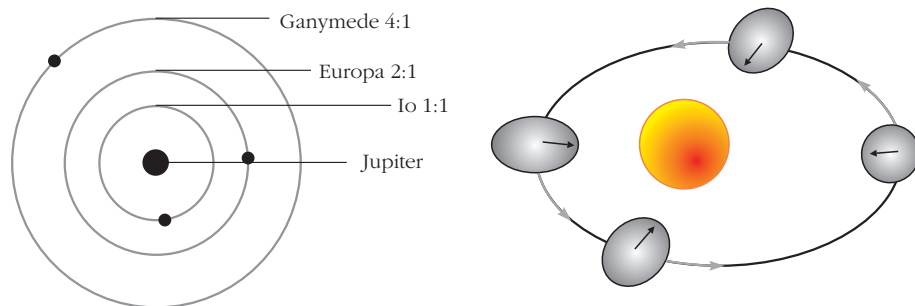
Számottevő atmoszféra nélküli égitestek esetében a felszín alatt található folyékony víztömeg jelenlétére utal a kráterek hiánya vagy a szórványos kráterezettség, mivel a felszínre a folyamatosan újabb és újabb rétegek rakódnak le a gejzírek formájában távozó vízjégből (2. ábra). A felszín tehát „fiatalnak” tűnik, holott a belső folyamatok hiányában sűrűn borítanak a becsapódási kráterek. Az aktív vízkiáramlást mutató égitestek felszínén, mint például a Jupiter Europa holdján, találhatunk ugyan krátereket, mivel a gejzírek esetenként egy adott régióra korlátozódnak, azonban gyakran megfigyelhető a kráterek peremének elmosódottsága, amit szintén a lerakódott jég okoz. Az Európának mindössze 41 nevesített kráttere van, ezek is többnyire kis méretűek, és átmérőjük általában nem éri el a 40 km-t.

A felszínen húzódó repedések, törésvonalak szintén utalhatnak a jégkéreg alatti óceánra, amelyek például egy hold esetében a bolygó körüli ellipszispályán való keringés során fellépő árapályhatás következtében jönnek létre. Az Europa esetében szinte a teljes felszínen megtalálhatók, míg az Enceladuson a repedések elsősorban a hold déli pólusának közelében koncent-

rálódnak, ahol a Cassini űrmisszió kamerái és detektorai számtalan gejzirt azonosítottak. Ehhez hasonló aktivitást korábban egyetlen naprendszerbeli égitestnél sem figyelhetünk meg. Az Enceladus esetében szintén feltételezik, hogy az óceán felszín alatti tömegeloszlá-

2. ábra. Felszín alatti óceánra utaló jelek (föül: elmosódott szegélyű kráterek; lejjeb: repedések a felszínen, anyaglerakódás; még lejjeb: gejzírek; legalul: híg atmoszféra).





3. ábra. A belső Galilei-holdak keringési rezonanciái (balra). A keringés során fellépő deformációk (jobbira) – árapályhatás – következtében keletkező sűrűlódás által termelt hő tarthatja folyékonyan a jégkéreg alatt található vizet.

sa nem egyenletes, azaz a déli pólus környezetében a vízréteg mélyebb és kiterjedtebb lehet.

Az Europa esetében nagyon ritka atmoszférát is megfigyelhetünk, amelynek forrása szintén a kéreg alól, a repedések mentén kiáramló vízjég, illetve az abból keletkező pára. A mérések azt is megerősítették, hogy a vízben különböző sók és ásványi anyagok is megtalálhatók, amelyek nem különböznek lényegesen a földi tengervízben is kimutatható összetevőktől. Feltehetően ezek lerakódásai láthatók a hold felszínén is.

Folyékony víz keresése a Jupiter holdjain

A Jupiter körül keringő holdak közül elsősorban az Europa és a Ganymede felszíne alatt egybefüggő óceán lehet. A közeljövőben a Jupiterhez induló űrmissziók is főleg ezt a két holdat veszik célba, és elsődleges kutatási céljuk a folyékony víz kimutatása, a vízréteg fizikai tulajdonságainak vizsgálata, valamint annak megválaszolása, hogy alkalmasak lehetnek-e az élet valamilyen formájának hordozására. Ez utóbbi nem elképzelhetetlen, mivel a holdak felszínét borító jégkéreg megvédené az óceánban fellelhető létformákat a sugárzástól, és az óceáni tartományok a gejzírek formájában kiáramló vízben kimutatott ásványi anyagok és kémiai összetevőik révén alkalmasak lehetnek a primitív élet hordozására.

A Jupitert korábban a NASA Galileo nevű keringő egysége vizsgálta behatóan (1995 és 2003 között), illetve 2016 óta jelenleg is ott kering (előreláthatólag 2021-ig) a Juno (szintén a NASA űrszondája).

Europa

A Jupiter bolygóhoz második legközelebb keringő Galilei-hold (a vulkanikusan aktív Io után) az Europa. Átlagos pályasugara $9,38 R_J$ (ahol R_J a Jupiter átlagos sugara, 71 492 km), keringési ideje pedig 3,55 nap. A 3121 km átmérőjű Europa felszínét elsősorban szilikátok alkotják, vastag, repedésekkel tarkított vízjégkéreggel, belsejében pedig valószínűleg vas-nikkel mag található. Atmoszférája nagyon ritka, és fő összetevője az oxigén. Keringése gravitációsan kötött, tehát az Europa egyik féltekéje folyamatosan a Jupiter felé néz, bár egyes mérések szerint keringési idejénél kissé gyorsabban forog. Ez belső aszimmetriára utalhat, va-

lamint alátámaszthatja azt a feltételezést is, miszerint a kéreg és a belső kőzetrétegek között egy felszín alatti folyadék réteg található.

Ellipszispálya esetén az égitest deformációjának mértéke a pálya mentén változik, belső sűrűlódást generál, ami hőt termel, ez az árapályfűtés folyamata. Az ideális kétest-problémában az ellipszispálya idővel a körpálya felé tendál,

azonban az árapályfűtés fennmarad, amennyiben további gravitációs hatásokkal is kell számolni, amelyek megakadályozzák a pálya „körösödését”. Erre jó példa az Io hold, amelynek pályaeccentricitását a közte, valamint az Europa és a Ganymede közötti rezonancia tartja fenn.

Ez a mechanizmus döntő fontosságú lehet az Europa óceánjának fenntartásában is, azonban az Europa nagyobb távolsága a Jupitertől jelentősen mérsékli az itt ható erőket (körülbelül negyedakkora az árapályhatás, mint az Io esetében). Az árapálysűrűlódás következtében felszabaduló hő biztosítja a felszín alatti réteg folyékony állapotának fenntartását és aktív geológiai folyamatokat is indukál (3. és 4. ábra).

Az Europa felszínét folyamatosan bombázzák a Jupiter magnetoszférájában áramló, nagy energiájú töltött részecskék, valamint jelentős ionizáló hatása van a Nap extrém ultravioleta (EUV) sugárzásának is. Mindezek részt vesznek az óceánból a gejzírek által a felszínre kerülő szerves molekulák lebontásában, így elpusztíthatják azokat a bio- és kémiai szignatúrákat is, amelyek esetleges primitív élet jelenlétére utalhatnak. Kérdés, hogy a hold felszínének melyik részét éri a legintenzívebben a sugárzás? Milyen mélyre hatolnak be a nagy energiájú részecskék? Milyen formában változtatja meg a sugárzás a frissen felszínre került anyagokat? Az elsődleges becslések szerint a jégkéreg felszínének felső 3 cm-es rétegében a nagyenergiás sugárzás minden szerves anyagot lebont, de feltehetőleg ~1 méteres mélységben már érdemes lenne az élet összetevői után kutatni. Mindezeket figyelembe kell venni az elkövetkező űrmissziók megtervezésekor. A napsugárzás, valamint a Jupiter mágneses terében lévő nagy energiájú részecskék által közvetített sugárdózis értéke ~5400 mSv, ami 24 óra alatt megölné egy védőfelszerelés nélküli embert.

Az Europa felszíne különféle sókban (főleg magnézium-szulfátban) gazdag, ezek a sók a felszín alatti víztömegből származnak. Azonban spektrográfiai mérések szerint ezek színtelenek vagy fehérek, ezért a felszínen észlelt vöröses szín kapcsán a kén is szóba jöhet, és az sem kizárt, hogy az Europa felszíni elszíneződéseinek egyik forrása az Io holdról származó, lerakódott nanopor. Egy másik elmélet szerint az elszíneződött területeket szerves vegyületek, tholinok borítják. Még kérdéses, hogy ezek milyen folyamatok révén jönnek létre, mindenesetre asztrobiológiai

szempontból nagyon jelentős lehetnek, mivel alapvető szerepet játszhatnak a prebiotikus kémiában és végül a primitív létformák létrejöttében. Korábban a Hubble-űrteleszkóppal végzett megfigyelések során a NaCl jelenlétét is kimutatták már az Európán.

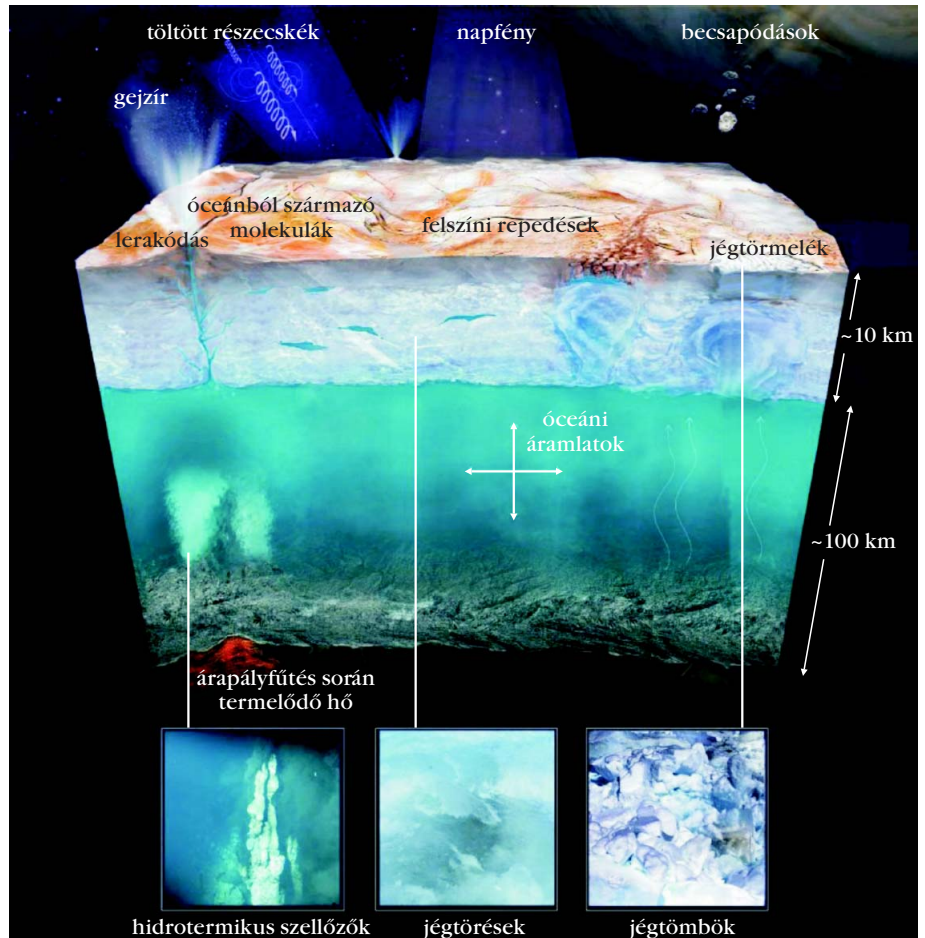
A jelenlegi modellek és elméletek szerint az Európán található teljes víz mennyisége nagyobb, mint a földi óceánokban található víz összessége. A holdat ritka atmoszféra is burkolja, amely főleg molekuláris oxigénből áll, azonban az atmoszférikus nyomás mindössze $0,1 \mu\text{Pa}$. Az oxigén feltehetőleg a víz napsugárzás által történő bomlásából származik.

A Galileo mérései alapján felfedezték az Europa indukált mágneses terét is, amely a Jupiterrel való kölcsönhatása révén, egy felszín alatti vezető réteg közreműködésével jött létre. Már akkor valószínűsítették, hogy ez a réteg egy sós vízből álló óceán lehet. A Galileo mérései szerint az Europa gyenge indukált mágneses terének télerőssége a mágneses egyenlítőnél $\sim 120 \text{ nT}$ (ez $\sim 1/6$ -a a Ganymede-nél, illetve ~ 6 -szorosa a Callistónál mért értéknek).

Ganymede

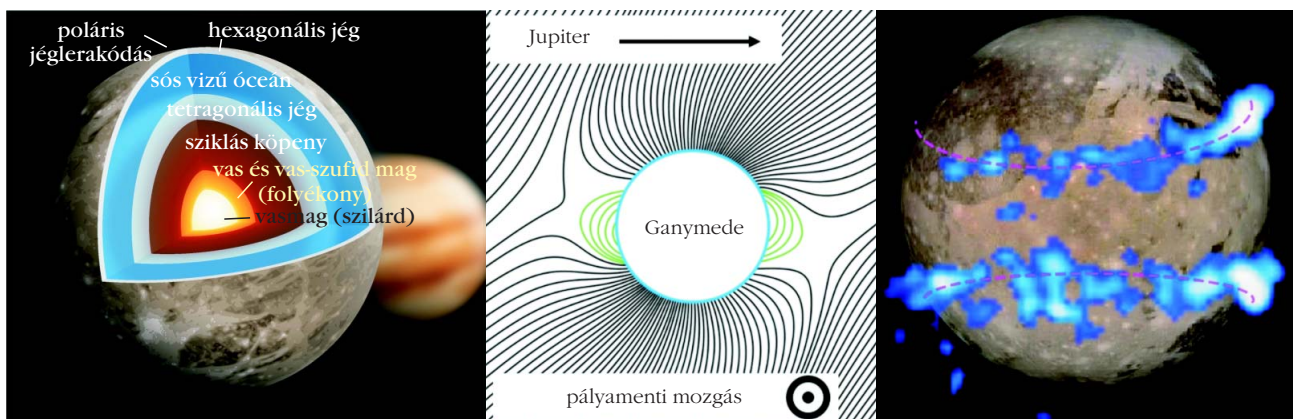
A Ganymede a Naprendszer legnagyobb holdja (átmérője 5268 km), még a Merkúr bolygónál is kiterjedtebb, azonban tömege annak mindössze 45% -a. A jelenlegi feltételezések szerint fémmagja van, és ez az

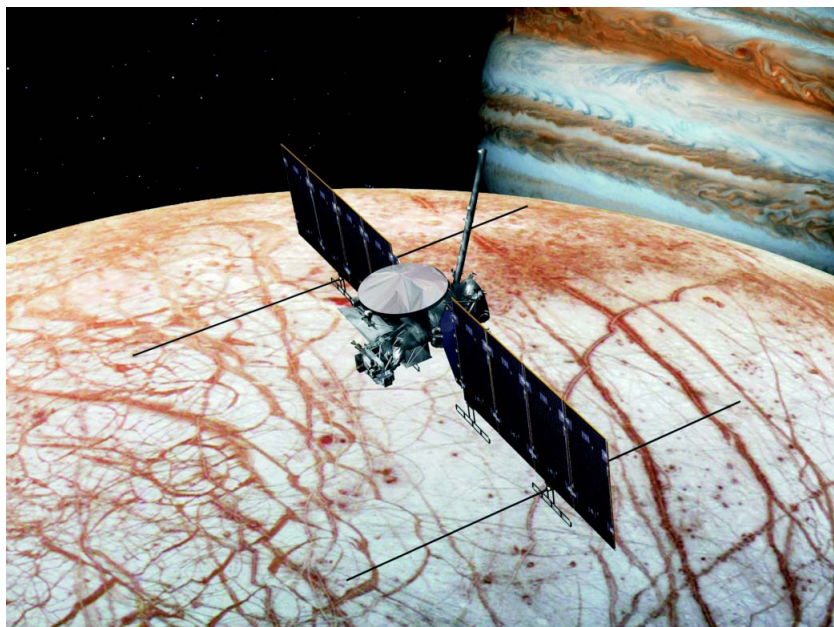
egyetlen ismert hold a Naprendszerben saját mágneses térrel, amelyet valószínűleg a vasmag fölötti folyékony fémrétegben zajló konvekció tart fenn. Globálisan nézve nagyjából azonos mennyiségben tartalmaz szilikátot és vízjeget. Az Európához hasonlóan vékony oxigénatmoszféra borítja, amely feltehetőleg ózont is tartalmaz. Belső szerkezete valószínűleg jól differenciált, és külső jégkérgé alatt kiterjedt óceán található (5. ábra). A Ganymede esetében is látha-



4. ábra. Az Europa felszín alatti óceánjának kiterjedése, szerkezete, valamint a környezetében zajló (külső és belső) fizikai folyamatok.

5. ábra. A Ganymede belső szerkezete (balra), belső mágneses tere erővonalainak kölcsönhatása a Jupiter mágneses erővonalával (középen), valamint az észlelt auróra (jobbra).





6. ábra. Az Europa Clipper űrmisszió.

alatt van. A dipóltér erőssége az egyenlítőnél ~ 719 nT (a pólusoknál ennek kétszerese), ami jóval magasabb, mint a Jupiter magnetoszférájának télerőssége a Ganymede pályája mentén (~ 120 nT). A Ganymede egyenlítői tartományában a mágneses tér ellentétes irányú a Jupiter mágneses terével, tehát lehetségessé válik a rekonnektió, azaz a mágneses erővonalak összekapcsolódása. A hold magnetoszférájának átmérője 4-5 Ganymede-sugárra terjed ki. A zárt erővonalak 30° -os szélesség alatt helyezkednek el, ahol a töltött részecskék csapdába esnek, és egyfajta sugárzási övet hoznak létre. A Hubble-űrteleszkóppal vizsgálták a Ganymede auroráját, amelynek különleges mozgásából szintén arra következtettek, hogy ennek a holdnak hatalmas, kiterjedt, sós vízrétege lehet.

tunk a felszínen párhuzamos repedéseket, rianásokat, azonban az árapálysúrlódás itt a belső Galilei-holdakéhoz képest már kevésbé jelentős.

A Ganymede felszínének vizsgálata során vízjégen kívül CO_2 , SO_2 , dición, hidrogén-szulfát és szerves molekulák nyomát is észlelték. A Galileo által kimutatott magnézium-szulfát és a nátrium-szulfát valószínűleg a felszín alatti óceánból származik.

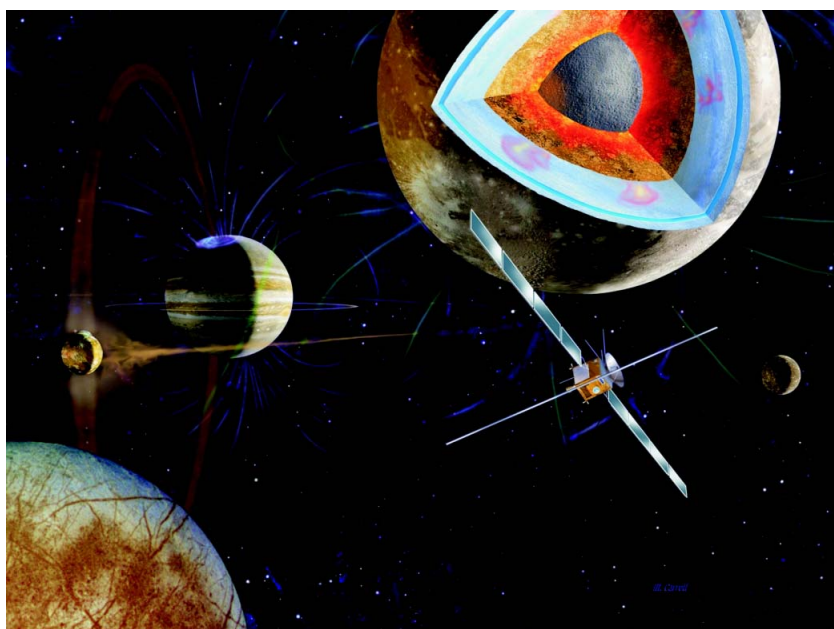
A Ganymede mágneses tere némiképp védelmet nyújt a felszínen lévő szerves vegyületek részére a Jupiter nagy energiájú töltött részecskéivel szemben. A hold mágneses momentuma a Merkúrénak körülbelül a háromszorosa. A mágneses dipól a hold forgástengelyével 176° -os szöget zár be, tehát az északi pólus a pályasík

A Jupiter holdjaihoz a közeljövőben tervezett űrmissziók

A NASA *Europa Clipper* szondájának (6. ábra) tudományos céljai között szerepel az Europa környezetében mérhető mágneses tér vizsgálata (amiből következtetni lehet az óceán mélységére és sötartalmára), a felszín alatti víztömegekre utaló fizikai folyamatok kutatása, aktív geozírek keresése a hold felszínén, valamint radaros mérések elvégzése a jégvastagság megállapítása céljából. A jelenlegi tervek szerint 2025-ben indítandó szonda 2030-2031 körül áll pályára az Europa körül. A Clipper 45 alkalommal közelítené majd meg az Európát, ezek során a felszín feletti 25 és 2700 km közötti magasságtartományban repülne el.

Az ESA *JUICE* (Jupiter Icy Moon Explorer) űrszondájának indítását 2022-re tervezik. A szonda előreláthatólag 2029 októberében érkezik meg a Jupiterhez, majd legalább három éven keresztül vizsgálja az óriásbolygót, valamint a Ganymede, a Callisto és az Europa holdakat (7. ábra). Ezt követően 2032-ben állítják véglegesen pályára a Ganymede körül. A kutatás egyik legfőbb célja a holdak felszíne alatt feltételezett óceánok közvetett vizsgálata, valamint annak megállapítása, hogy adottak lehetnek-e valamilyen formában a kezdetleges élet feltételei. A *JUICE* fedélzeti berendezései között található rádió- és plazmahullámmérő, töltött részecskedetektor, magnetométer, radar, lézeres magasságmérő, valamint képalkotó berendezések is.

7. ábra. A JUICE űrmisszió.



Folyékony víz keresése a Szaturnusz holdjain

A Szaturnusz holdrendszerében mostanáig két olyan jelöltet találtunk, amelyek felszíne alatt feltételezhetően nagyobb mennyiségű folyékony víz található. Ezek egyike az apró Enceladus, amelynek figyelemre méltó aktivitására a Cassini űrszonda vizsgálatai derítettek fényt. Már a Voyager-1 Szaturnusznál tett 1980-as látogatása alkalmával feltűnt a

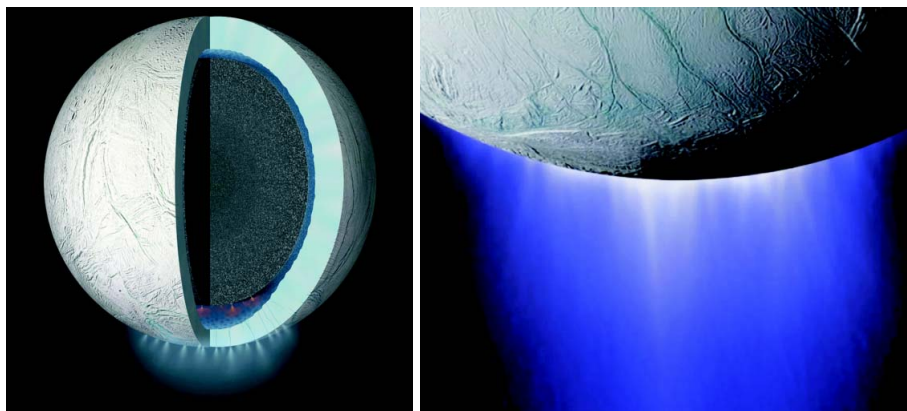
kutatóknak, hogy az Enceladus felszíne alig kráterezett, „fiatal”, bár ekkor a kiáramló vízgejzíreket még nem tudták megfigyelni. A jelenlegi feltételezések szerint az Enceladus felszíne alatti óceán globális is lehet, de a víztömeg nagyobb mennyiségben elsősorban a hold déli pólusának közelében összpontosul.

A másik Szaturnusz-hold, ahol érdemes a primordiális élet feltételei után kutatni, a Titan. A Titant kezdetől fogva a korai Földhöz hasonlították, és erre számos fizikai bizonyítékot találtunk. Például a felszínen zajló folyadékkörforgásban fő szerepet ellátó metán mellett a víz is megtalálható a Titanon, és a mérések arra utalnak, hogy a felszín alatt kiterjedt rétegekben raktározódik. Tehát a Titan esetében egybefüggő vízóceán valószínűleg nem lehet, azonban a fennálló fizikai és a kémiai feltételek mégis alkalmassá tehetik ezt a holdat is az élet bizonyos formáinak hordozására.

Enceladus

A Cassini űrmisszió egyik legnagyobb felfedezése volt az Enceladus jelenleg is megfigyelhető aktivitása. Az apró, mindössze 505 km átmérőjű holdat a Cassini keringőegység összesen 22 alkalommal közelítette meg.

Az Enceladus felszínén alig találhatunk becsapódási krátereket, ami arra utal, hogy a felszínt borító jégnek van utánpótlása. A déli pólus közelében található repedésekből folyamatosan áramlik az anyag, látványos gejzírek formájában tör fel a felszín alatti folyékony víz (8. ábra). Ez természetesen azonnal meg-

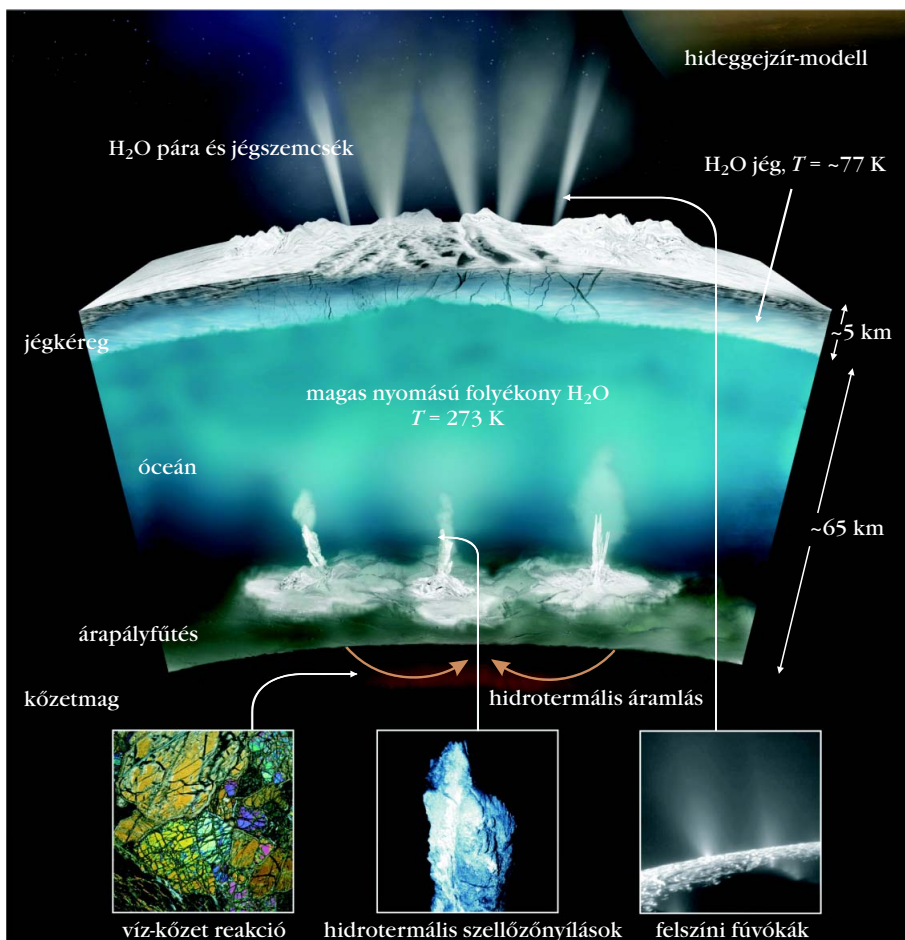


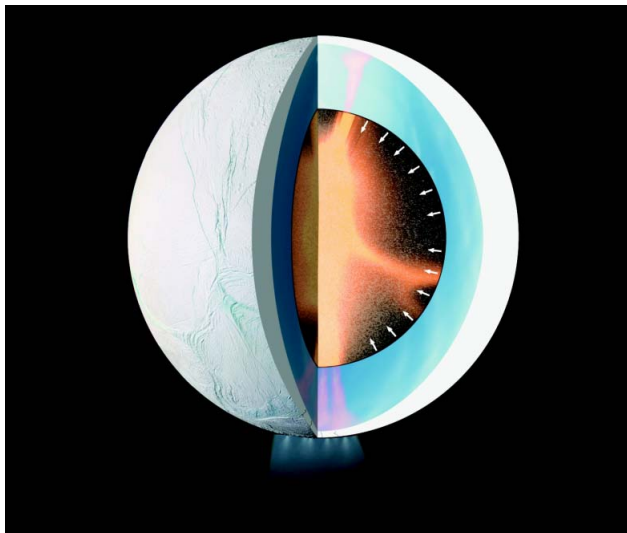
8. ábra. Az Enceladus feltételezett belső szerkezete, a déli pólus közelében észlelt gejzírekkel (forrás: NASA/JPL-Caltech).

fagy, és vagy eltávozik a hold környezetéből – létrehozva ezzel az E-gyűrűt –, vagy lerakódik a felszínen. A gejzírek összetételének vizsgálata során vízjég mellett CO_2 , metán és további gázok kiáramlása figyelhető meg [1]. Azonban a kilöködő jégzemcsék későbbi vizsgálata során 200 atomtömegegységnél nagyobb tömegű, komplex makromolekuláris vegyületek jelenlétére is fény derült [2].

Az Enceladus felszín alatti vízrétegének árapályfűtését az Enceladus és a Dione között fennálló 2:1-es pályarezonancia biztosítja. A jelenlegi mérések alap-

9. ábra. Az Enceladus óceánjának feltételezett struktúrája és fűtési mechanizmusa.





10. ábra. Anyag- és hőtranszport a nem megszilárdult kőzetmag modellje szerint.

ján azt feltételezzük, hogy az Enceladus óceánja helyenként az 50-60 km-es mélységet is elérheti (9. ábra), és a felszín érő hatásoktól egy ~5 km-es vastagságú jégkéreg védi. Az árapálysúrlódás az óceáni alapzat kürtőin keresztül hőt közöl a közel 0 °C-os vízzel, ennek következtében a víz nyomása is megnő, és a feláramló melegebb víztömeg végül utat tör magának, és a felszín repedései mentén kijut a hold felszínére és a Szaturnusz magnetoszférájának belsejébe. Természetesen azonnal meg is fagy, és mivel a kipermetezett jégzemcsék egy része visszahullik a felszínre, idővel elfedik a korábbi becsapódási kráterek nyomait. Ez a „hideg gejzír modell”.

További érdekességeket is megfigyeltek az Enceladussal kapcsolatosan. Ezek egyike azt sugallja, hogy a felszín alatti óceán talán mégsem globális, mint a Jupiter Europa holdjának esetében, hanem főként egy térségre, a déli pólus környezetére korlátozódik. Erre a pálya és a hold kismértékű „imbolygásából” következtettek, ami nagy valószínűséggel az aszimmetrikusan elterülő óceáni rétegre ható árapály következménye.

Ugyancsak kivételesen érdekes volt az E-gyűrű részletesebb vizsgálata, amely egyrészt igazolta, hogy a gyűrű valóban apró vízjégkristályokból áll, de eze-

ken kívül különös nanorészecskéket is detektáltak. A Cassini űrszonda mérései alapján ezek szilícium-dioxid nanokristályok voltak, amelyek tipikusan abban az esetben jönnek létre, amikor a folyékony víz és a szikla 90 °C feletti hőmérsékleten lép egymással kölcsönhatásba. A nanoszilika fagyás után mátrixszerűen beágyazódik a vízjégbe, majd kikerül a Szaturnusz magnetoszférájába. A magnetoszférában a sputtering effektus (amikor energikus atomok, ionok becsapódnak a jégporszemcsé felszínére, és onnan atomokat, molekulákat löknek ki) hatására a szemcsék mérete (tömege) idővel folyamatosan csökken. Ennek során a beágyazódott nanoszilika végül képes kiszakadni az erodálódó jégzemcsé belsejéből [3]. Mindezek tovább erősítik azt a feltevést, amely szerint az Enceladus jégpáncélja alatt valódi hidrotermális kürtők üzemelnek, amelyek a földi óceánok fenekén megfigyeltékhez hasonlóan melegen tartják a környező víztömegeket.

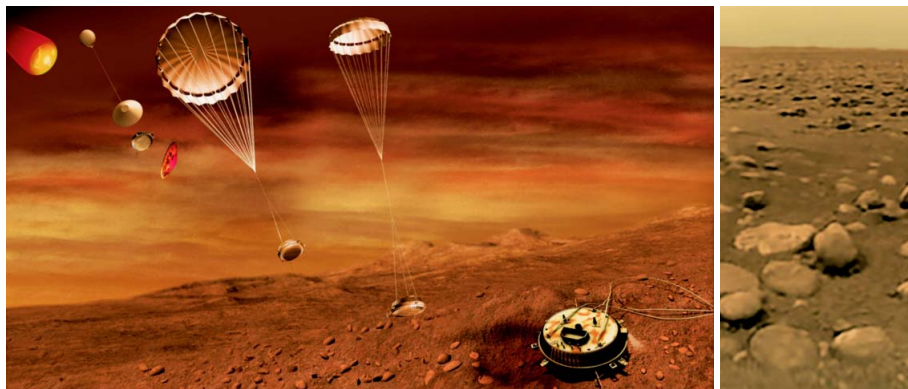
Az Enceladus vízrétegének melegen tartására az árapályfűtés mellett más mechanizmusokat is felvetettek. Ezek egyike a nem megszilárdult kőzetmag modellje (10. ábra), ugyanis a számítások szerint egy nem szilárd mag esetében az árapálysúrlódás sokkal több hőt termelhet, mint a korábban vázolt elmélet szerint. Ebben az esetben a hideg sós víz leszivárog a porózus kőzetmagba, ahol felmelegszik, majd keskeny pórusokon átjutva újra felemelkedik, és forró foltokat hoz létre az óceáni réteg aljzatán. A folyékony óceáni rétegen keresztül hő- és anyagtranszport zajlik a felszín irányába, ahol szintén lokalizált fűtés révén a jégkéreg helyenként megolvad, és a nagy nyomású, különféle ásványi anyagokat tartalmazó víz gejzírek formájában távozik.

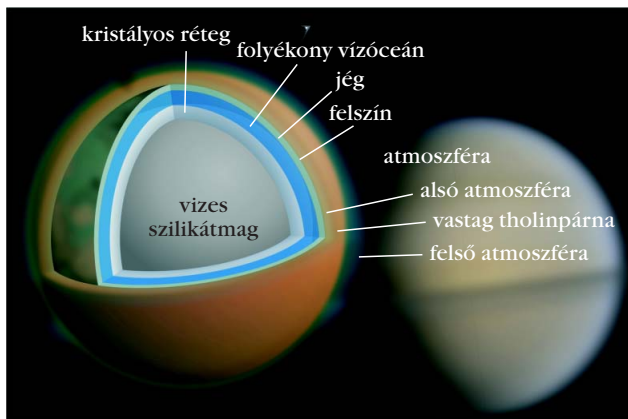
Titan

A Titan a Szaturnusz legnagyobb holdja, 5150 km átmérőjű, tehát az Enceladus méretének tízszerese, sőt nagyobb a Merkúr bolygónál is. A Titan mint égitest fele-fele arányban vízjégből és szilikátokból épül fel, valamint ez az egyetlen hold a Naprendszerben, amelynek sűrű atmoszférája van. A Titan már a Voyager-2 látogatása óta foglalkoztatta a kutatókat, mert akkor még

nem sikerült bepillantani a hold vastag, narancssárga atmoszférikus rétegei alá. 2004 nyarán a Cassini–Huygens szondapár már többek között fejlett radarberendezéssel, infravörös és egyéb hullámhossztartományokban működő kamerákkal és részecskedetektorokkal érkezett meg a Szaturnuszhoz, és a Titan vizsgálata az űrmisszió elsődleges tudományos céljai között szerepelt. A Cassini keringő egység az ott töltött 13 év alatt összesen 127 alkalommal közelítette meg a

11. ábra. A Huygens leszállóegység történelmi jelentőségű landolása a Titanon, valamint a Huygens által a leszállóhely közvetlen környezetéről készített fotó.





12. ábra. A Titan hold feltételezett belső felépítése és összetétele.

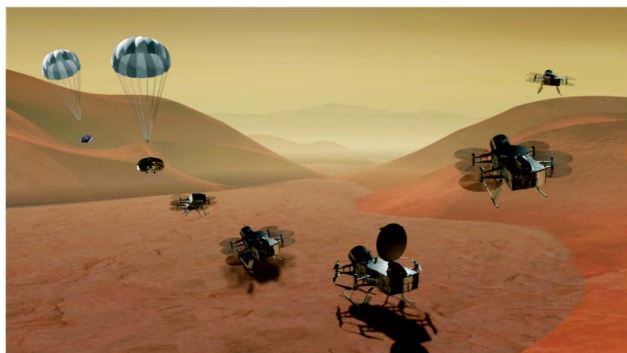
Titant, valamint 2005. január 14-én a Huygens leszállóegység sikeresen végrehajtott történelmi landolását a hold felszínén (11. ábra).

A Titan kiterjedt atmoszférája miatt megfigyelhetünk a holdon egyfajta évszakos ciklikusságot, valamint az atmoszférikus metán komplex körforgását (csapadék-képződés, tavak, folyók) is. Nem kizárt, hogy az élet lehetőségének több tényezője is jelen van a Titanon. A metán atmoszférikus cirkulációja mellett a felszínen kriovulkanizmusra (jégvulkánok jelenlétére) utaló jeleket is találtunk, ami arra utal, hogy a felszín alatt – ha nem is globálisan, de – lehetnek folyékony vizet tartalmazó rétegek. Elméletileg 50-100 km-es mélységben lehetnek kedvezők a feltételek ehhez.

A kőzetekből álló magot valószínűleg több rétegből álló, kristályos jég veszi körül (12. ábra). Elméletileg a Titan korai összehúzódásából visszamaradt belső hő még mindig elegendő lehet ahhoz, hogy a hold belsejében fenntartsion egy vízből és ammóniából álló, folyékony, magmaszerű keveréket. Ebben a közegben az ammónia jelenléte lehetővé teszi, hogy a víz rendkívül alacsony hőmérsékleten (akár $-97\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on) is folyékony maradjon.

Mindezeket konkrét űrszondás mérések is alátámasztják. A Cassini műszereivel az extrém alacsony frekvenciájú rádiótartományban végzett vizsgálatok alapján a Titan felszíne alatt réteges szerkezet képe rajzolódott ki. Mivel a hold közvetlen felszíne ezeket a rádióhullámokat nagyon gyengén veri vissza, valószínű-

13. ábra. A Dragonfly robothelikopter landolása és vizsgálódásai a Titanon (forrás: NASA).



síthető, hogy azok inkább a felszín alól, a folyékony és a fagyott tartomány határfelületéről verődtek vissza.

A Titan sok szempontból hasonlít korai Földünkre, és amellett, hogy különféle szerves vegyületekben rendkívül gazdag, még vizet, sőt reményeink szerint bizonyos tartományaiban folyékony vizet is tartalmaz, ezért előkelő helyre került Naprendszerünk azon égitestjei között, amelyek feltehetőleg alkalmasak lehetnek a primitív élet hordozására.

Dragonfly űrmisszió a Titanhoz

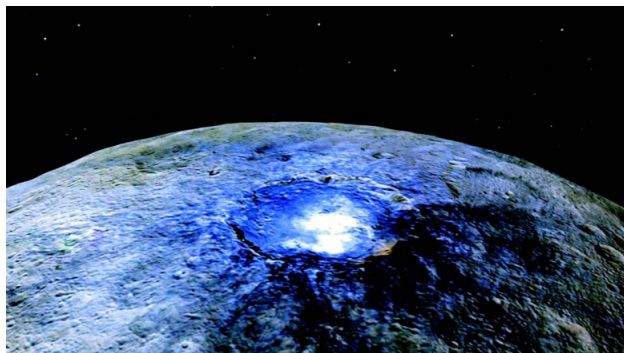
A Titanon feltételezett szerves élet feltételeinek felkutatására a NASA előreláthatólag 2026 áprilisában egy különleges, mobil űreszközt indít útjára. A Dragonfly missziót 2017-ben a Johns Hopkins Applied Physics Laboratory javasolta a NASA New Frontiers programjának keretében, ekkor az első két kiválasztott projekt egyike lett, jelenleg fejlesztés alatt áll. A Dragonfly (13. ábra) asztrobiológiai misszió egy propelleres leszállóegység, amely képes lesz navigálni, valamint különféle kijelölt célpontokat megközelíteni és megvizsgálni a hold felszínén. A propellerrel történő helyváltoztatás a Titan esetében ideális megoldás a hold sűrű atmoszférájában, valamint képessé teszi az űreszközt a függőleges fel- és leszállásra. A Titan az élet eredetének tanulmányozására kivételes helyszín.

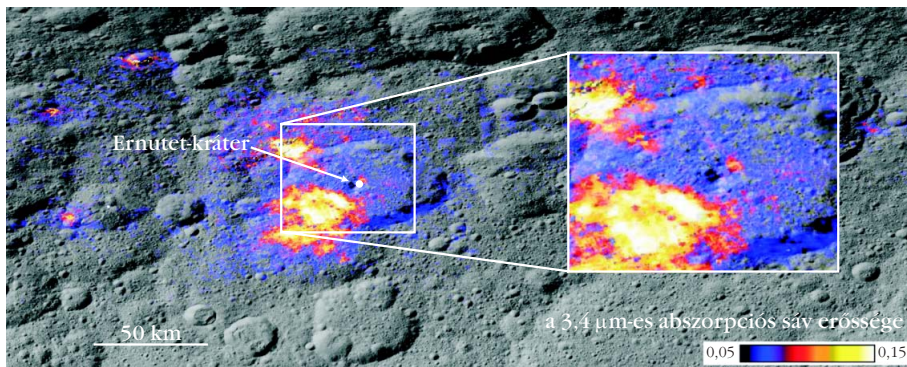
Egy különleges égitest, a Ceres

Végül megemlítünk egy különleges jelöltet a Mars és Jupiter között húzódó aszteroidaövből is. A NASA a Dawn missziót (2007–2018) két speciális égitest, a Vesta kisbolygó és a Ceres törpebolygó felkutatására fejlesztette ki. A Dawn 2015 márciusában állt pályára a Ceres körül (sugara 467,2 km). A 2006-ban a kisbolygók közül a törpebolygók közé átsorolt Ceresben egyesül a kisbolygóöv teljes tömegének $\sim 35\%$ -a.

A Ceres felszínén már nagyobb távolságból is megfigyelhető volt az Occator nevű becsapódási kráter aljzatán kirajzolódó két, a környezetéhez képes kiemelkedően nagy fényvisszaverő képességű folt (később kiderült, hogy az egyik inkább kisebb foltok csoportja) (14. ábra).

14. ábra. A Ceres törpebolygó szerves vegyületeket tartalmazó fehér foltjai (forrás: NASA).





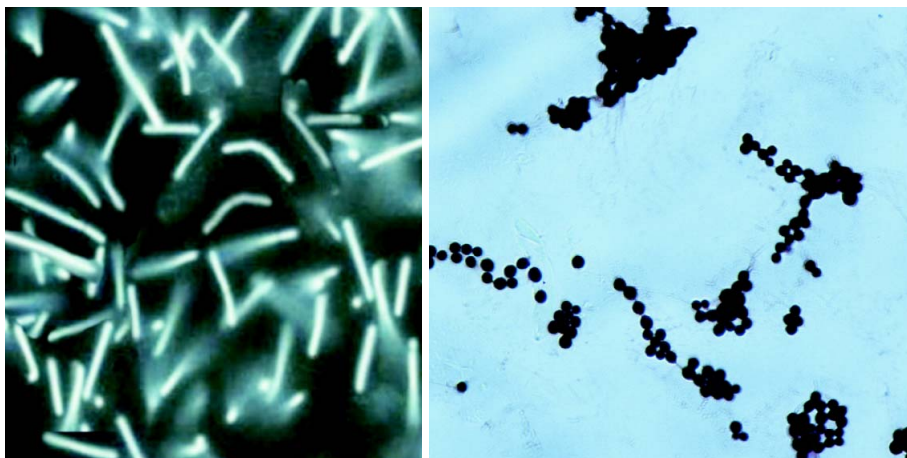
15. ábra. Szervesanyag-lerakódás a Ceres felszínén, az Ernutet-kráter környezetében (forrás: NASA).

A foltokat közelebről megvizsgálva úgy találták, hogy azok szénvegyületeket, valamint egyéb sólerakódásokat tartalmazhatnak. A sóösszetevő esetében leginkább a magnézium-szulfát tűnik jelentősnek, de a foltok kapcsolatba hozhatók egy ammóniában gazdag, agyagos jellegű talajszerkezettel is [4]. A kutatók szerint a fényes foltokra vonatkozóan a Ceres felszíne alól korábban feltört sóval telített, és a felszínre érkezést követően azonnal szublimált víz modellje a legelfogadhatóbb magyarázat, és a szublimációt követően csak a sólerakódás maradt hátra [5]. A fényes felületek közeli infravörös hullámhossztartományban végzett vizsgálatai nagy mennyiségű nátrium-karbonátra és kisebb mennyiségben ammónium-kloridra vagy ammónium-bikarbonátra utalnak, amelyek a szublimációt követően maradhattak vissza a felszínen.

2020 nyarán a NASA megerősítette, hogy az adatok elemzése során kapott részletes eredmények arra utalnak, hogy a Ceres vízben gazdag égitest, amelynek a felszín alatti mélyebb rétegeiben sóval telített víz található, ami különféle csatornákon keresztül (az Occator-kráter belsejében észleltékhez hasonlóan) helyenként a felszínre szivárog [6].

A Ceres felszínén az előbbieken tárgyalt felszíni sajátosságok mentén a Dawn űrszonda Visible and Infrared Mapping Spectrometer (VIR) műszerének adatait elemezve egy további érdekes területet találtak, ahol szerves anyag maradványait fedezték fel a törpe-

16. ábra. Extrém melegtűrő (hipertermofil) Archea (balra), valamint a csernobili atomreaktor falán felfedezett sugárzástűrő gombafaj (jobbra).



bolygó felszínén. A vöröses anyaglerakódás $\sim 1036 \text{ km}^2$ nagyságú területet fed le, az északi féltekén található Ernutet-kráter környezetében (15. ábra). A kutatók szerint a vöröses anyag magáról a Ceresről származik, eloszlása és környezete alapján nem valószínű, hogy meteorok vagy kisebb méretű aszteroidák becsapódása által került oda.

A Ceres tehát a mai napig aktív égitest, amelynek felszíne alatt különféle sókkal telített, ásványi és szerves anyagokban gazdag folyékony víz található, azaz a Ceresen is megtalálhatók az élet alkotóelemei.

Példák extrém körülmények között létező élőlényekre

A következőkben a teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány extrém körülmények között is életképes organizmust, amelyekkel egyelőre csak bolygónkon találkoztunk, de talán az űrben folytatott mérések finomodásával Naprendszerünk más égitestjein is felfedezhetünk hozzájuk hasonlókat [7].

Egyrészt ismerünk olyan egysejtű, fotoszintetizáló zöld algákat, amelyek savas környezetben is életben maradnak (például *Dunaliella acidophila*, *Chlamydomonas acidophila*), de ide sorolható egy vörös algafaj is (*Cyanidium caldarium*), amely hőforrásokban él, és 2–4 pH-értékű tartományban képes szaporodni. Bizonyos lila és zöld cianobaktériumok (*Thiobacillus*, *Thermococcus archaea*) számára az optimális hőmérsékleti tartomány az 50–70 °C (termofilek), és elsősorban hőforrásokban, vagy a mélytengeri és óceáni hidrotermális kúrtók környezetében élnek (16. ábra). A hőmérsékleti skála másik oldalán helyezkednek el az extrém hidegtűrő élőlények (kriofilek), amelyek jelen vannak az alpesi és sarki jéggel borított tal-

lajban, jeges gleccserekben, és mélytengeri vizekben, továbbá az Antarktiszon is. Az antarktiszi Vosztoz-tóban például több mint 3500-féle létformát találtak. Az óceánok mélyvizeiben élők nagy nyomást, a tengeri jégben élők nagy sókoncentrációt is tolerálnak. Az antarktiszi száraz területek közeteiben élőknek pedig nagyon kicsi a víz- és tápanyagszükséglete. Megemlítendő a Mariana-árok legmélyén élő és szaporodó *Gromia sphaerica* amőbák is. A felsorolásnak ugyancsak kivételes tagja egy, a csernobili

atomerőműben, extrém magas radioaktív sugárzási környezetben a reaktor falán megtelepedett gombafaj (16. ábra). A gomba fekete színű, mivel nagy mennyiségű melanint termel, amivel a magas háttérsugárzás ellen védekezik. A különleges gombát a Nemzetközi Űrállomáson tanulmányozzák tovább.

Legvégül megemlítjük egy nemrégiben publikált kutatás eredményeit [8], amelyben kifejezetten egy, az Enceladus óceánjáról mostanáig kialakított modell ismeretében potenciálisan életképes mikroorganizmus vizsgálatára összpontosítottak. Ez a metanogén (oxigénmentes környezetben az anyagcsere-folyamatai révén metánt termelő) és az archeák (prokarióta egysejtűek) csoportjába tartozó *Methanothermococcus okinawensis*, amely anyagcsereje során a molekuláris hidrogént és a szén-dioxidot metánná konvertálja. Ezek közül mindegyik összetevő megtalálható az Enceladus gejzírjeiből kiáramló anyagban. Földünkön ezek az organizmusok a japán partok mentén található mélytengeri hidrotermális kúrtók közvetlen környezetében élnek. Az egysejtűt vizsgáló kutatócsoport több metanogén szerkezetet is megvizsgált, de kísérleti körülmények között egyedül a *Methanococcus okinawensis* bizonyult túlélőnek, kiváltképp amikor az Enceladus gejzírjeiből kimutatott formaldehidet, szén-dioxidot és ammóniát is hozzáadták a mesterséges közegehez. Elméletileg tehát elég valószínű, hogy ha a jövőben *M. okinawensist* juttatnánk az Enceladus óceáni

kürtőinek közelébe, akkor ez a mikroorganizmus nagy valószínűséggel képes lenne ott megtelepedni.

Irodalom

1. J. H. Waite Jr, et al: Liquid water on Enceladus from observations of ammonia and ^{40}Ar in the plume. *Nature* 460 (2009) 487–490.
2. F. Postberg, N. Khawaja, B. Abel, G. Choblet, C. R. Glein, M. S. Gudipati, B. L. Henderson, H.-W. Hsu, S. Kempf, F. Klenner, G. Moragas-Klostermeyer, B. Magee, L. Nölle, M. Perry, R. Reviol, J. Schmidt, R. Srama, F. Stolz, G. Tobie, M. Trierloff, J. H. Waite: Macromolecular organic compounds from the depths of Enceladus. *Nature* 558 (2018) 564–568.
3. H.-W. Hsu, F. Postberg, Y. Sekine, T. Shibuya, S. Kempf, M. Horányi, A. Juhász, N. Altobelli, K. Suzuki, Y. Masaki, T. Kuwatani, S. Tachibana, S. Sirono, G. Moragas-Klostermeyer, R. Srama, Ongoing hydrothermal activities within Enceladus. *Nature* 519 (2015) 207–210.
4. E. Landau: *New Clues to Ceres' Bright Spots and Origins*. NASA, 2015.
5. M. Neveu, S. J. Desch: Geochemistry, thermal evolution, and cryovolcanism on Ceres with a muddy ice mantle. *Geophys. Res. Lett.* 42/10, (2015) 197–206.
6. G. McCartney, G. Hautaluoma, A. Johnson: *Mystery Solved: Bright Areas on Ceres Come From Salty Water Below*. NASA, (2020)
7. Pálinskás G.: Túlélők kerestetnek! Élet extrém körülmények között. *Kémiai Panoráma* 2017/17
8. R.-S. Taubner, P. Pappenreiter, J. Zwicker, D. Smrzka, C. Pruckner, P. Kolar, S. Bernacchi, A. H. Seifert, A. Krajete, W. Bach, J. Peckmann, C. Paulik, M. G. Firneis, C. Schleper, S. K.-M. R. Rittmann: Biological methane production under putative Enceladus-like conditions *Nature Communications* 9 (2018) Article number: 748.

MIÉRT KELETRE NÉZ A NAPOT MÁR NEM KÖVETŐ NAPRAFORGÓK (*HELIANTHUS ANNUUS*) VIRÁGZATA?

1. rész: környezetoptikai számítások és biológiai mérések

Horváth Gábor, Virágh Balázs, Horváth Dániel

ELTE Biológiai Fizika Tanszék, Környezetoptika Laboratórium, Budapest

Slíz-Balogh Judit

ELTE Csillagászati Tanszék, Budapest

Horváth Ákos

Hamburgi Egyetem, Meteorológiai Intézet, Hamburg

Egri Ádám

Ökológiai Kutatóközpont, Vízi Ökológiai Intézet, Budapest

Jánosi Imre

Nemzeti Közszolgálati Egyetem, Víz- és Környezetpolitika Tanszék, Budapest

A napraforgó (*Helianthus annuus*) virágzata a virágképzés után állandóan kelet felé néz, s ettől kezdve már nem követi a Napot. Habár e *Charles Darwint* és botanikus fiát [1] is izgató jelenség lehet-

séges okaira korábban számos magyarázatot is javasoltak, eddig még egyiket sem ellenőrizték kísérletileg. Cikkünkben a napraforgó-virágzat keleti irányulásának környezetoptikai magyarázatát adjuk [2]. A Nap égi mozgása csillagászati adatainak, az amerikai Boone County (aminek környékéről származik a házasított napraforgó), Közép-Olaszország, Közép-Magyarország és Dél-Svédország felhőzottségi adatainak, a Napot már nem követő, érett napraforgófej

Köszönjük *Érdei Báltint* emeritusz professzornak (ELTE Csillagászati Tanszék) a Nap égi pályájának számításában használt matematikai képleteket. Hálásak vagyunk *Pereszlényi Ádámnak* (ELTE Biológiai Fizika Tanszék) a napraforgó biológiájáról folytatott beszélgetésekért.

időfüggő dőlésszögének, valamint a napraforgófej virágzata és hátoldala fényelnyelési spektrumainak felhasználásával kiszámítottuk a virágzat és a fejhát által elnyelt fényenergiát a virágképzés kezdete (a napkövetés leállása) és a magok teljes érése között. Megállapítottuk, hogy ha a délutánok felhősebbek a délelőttöknél, akkor a keletre néző napraforgó-virágzat nyeli el a legtöbb fényenergiát, ami előnyt jelent a magfejlődés és magérés szempontjából, továbbá a virágzat nyugati orientációja előnyösebb lenne, mint a déli. Mindennek fő oka, hogy a napraforgó eredeti háziasítási és későbbi fő termesztési területein délután nagyobb az átlagos felhővalószínűség, mint délelőtt. Mivel a napraforgófej fotoszintetizáló zöld háta akkor nyelné el a legtöbb fényenergiát, amikor a virágzat nyugatra nézne, a zöld fejhát által elnyelt fényenergia maximalizálása nem magyarázhatja a virágzat keletre nézését. Ugyaneze-

ket az eredményeket kaptuk Közép-Olaszország és Közép-Magyarország esetében is, ahol a délelőttök ugyancsak kevésbé felhősek, mint a délutánok. Ezzel szemben Dél-Svédországban a délelőttök felhősebbek a délutánoknál, miáltal a nyugatra néző napraforgó-virágzat nyelné el a legtöbb fényenergiát. De a svéd napraforgók érett virágzata is keletre néz. Szerintünk a napraforgók érett virágzata genetikailag kelet felé rögzült irányának egyik oka, hogy háziasításuk egy olyan földrajzi régióban történt, ahol a délutánok felhősebbek a délelőttöknél. Cikkünk első részében a napraforgó-virágzatok keletre nézésének korábbi magyarázatairól szólnunk, majd a környezetoptikai számítási és biológiai mérési módszereinket írjuk le, a második részben pedig eredményeinket ismertetjük és elemezzük [2].

Bevezetés

A napraforgó (*Helianthus annuus*, Linnaeus 1753) fejlődő virágzatot tartalmazó fiatal, még éretlen feje és a levelei egy darabig folyamatosan úgy változtatják irányukat, hogy felületük mindig közelítőleg a Nap felé irányuljon [1]. Napnyugtakor a napkövető, fiatal fej normálvektorának azimutiránya közel nyugatra mutat, éjjel pedig már jóval napkelte előtt visszafordul keletre. E jelenség neve heliotropizmus



Horváth Gábor fizikus, az MTA doktora, egyetemi tanár, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumának vezetője. A vizuális környezet optikai sajátosságait és az állatok látását tanulmányozza, továbbá biomechanikai kutatásokat folytat. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa. Évtizedek óta aktív tudományos ismeretterjesztői munkát is folytat előadások és cikkek formájában.



Virágh Balázs Péter az ELTE-n 2021-ben szerezte meg fizika BSc fokozatát a biofizikus szakirányon. „A napraforgóvirágzat (*Helianthus annuus*) állandó keleti irányának környezetoptikai magyarázata” című diplomamunkáját a Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumában írta Horváth Gábor témavezetésével. Az indiai klasszikus zenét előadói szinten műveli. A budapesti Ganapati Pakhawaj Zeneiskola alapítója, Pakhawaj és a klasszikus indiai zene művészetének terjesztője.



Horváth Dániel szabadúszó autodidakta informatikus.



Slíz-Balogh Judit a BME-n végzett matematikus-mérnökként, majd menedzserként dolgozott a Graphisoft SE szoftverfejlesztő cégnél. A Pázmány Péter Katolikus Egyetem Hittudományi szakán hittanári, majd az ELTE-n csillagász diplomát szerzett, ahol 2020 őszén doktorált a Fizika Doktori Iskola Részecskefizika és Csillagászat programjában. Fő kutatási területe az égi mechanika, azon belül a Naprendszer Lagrange-pontjainak kaotikus dinamikája és képalakító polarimetriája.



Horváth Ákos az ELTE-n végzett meteorológusként, majd az Arizonai Egyetemen (Tucson) szerzett MSc és PhD fokozatot légkörtudományból. Utána évekig a NASA Sugárhajtóművek Laboratóriumában (Pasadena) és a Miami Egyetemen volt vendégkutató. Fő kutatási területe a meteorológiai és vulkáni felhők műholdas távérzékelése a látható és infravörös hullámhossztartományban. Jelenleg a Hamburgi Egyetem Meteorológiai Intézetének Sugárzási és Távérzékelési csoportjában kutat.



Egri Ádám az ELTE-n végzett biofizikusként, majd ott szerezte meg a PhD fokozatot a Biológiai Fizika Tanszék Környezetoptika Laboratóriumában. Jelenleg az Ökológiai Kutatóközpont Vízi Ökológiai Intézetének tudományos munkatársa. Elsősorban izeltlábuak vizuális ökológiájával foglalkozik, különös tekintettel a látórendszerük spektrális és polarizációs érzékenységre.



János Imre Miklós fizikus, az MTA doktora, az MTA Statisztikai Fizikai Tudományos Bizottság elnöke. 2021 elejétől a drezdai Max Planck Institut für Physik Komplexer Systeme vendégkutatója volt. 2021 szeptemberétől a Nemzeti Köszolgálati Egyetem Víz-tudományi Karán a Víz- és Környezetpolitikai Tanszék vezetőjeként folytatja korábbi, több évtizedes ELTE-s pályáját.

(napkövetés). A levelek és a fej azimutiránya körülbelül 12° -kal lemarad a Nap azimutjától, ami közel 48 perc késésnek felel meg. Felhős napokon a fiatal napraforgófej azimutjának kelet-nyugati oszcillációja leáll és a fej normálvektora végig közel függőleges marad, de felhős időben az idősebb fej egy belső bioritmus miatt mindaddig oszcillál, amíg a szár még növekszik. Az optimális szint alatti vagy fölötti talajnedvesség megakadályozza a napkövetést még tiszta ég alatt is.

A vad és háziasított *Helianthus annuus* napraforgók mellett néhány vad rokonfajnál is megfigyelhető heliotropizmus. Számos más taxon is hasonlóságot mutat a virág(zat)ok napkövetésében: ilyen például a *Chrozophora tinctoria* (Euphobiaceae), *Xanthium strumarium* (Asteraceae), valamint számos sarkvidéki és alpesi faj [3].

A napraforgó tenyészidőszakában (földrajzi helytől függően márciustól szeptemberig) csak a tavaszi napéjegyenlőségkor (március 21-én vagy 22-én) kel és nyugszik a Nap pontosan a földrajzi keleti, illetve nyugati irányban. A tavaszi napéjegyenlőség előtt/után a Nap délkeleten/északkeleten kel és délnyugaton/északnyugaton nyugszik. A napraforgó virágképzése (a virágzás időszaka, különösen a porzók érése) körülbelül a vetés utáni 60. napon kezdődik [4]. E fejlődési szakaszban kezd a sok apró virágocskából álló éretlen virágzat nyíltni, ami már nem követi a Napot, és normálvektorának azimutja állandóan keletre néz. Virágképzéskor a levelek fejlődése leáll, és a napraforgó erőforrásait a magtermelésre fordítja.

A napkövető, fiatal napraforgó leveleinek és fejének éjszakai mozgását nem a fény vezérli. Éjszaka a fej azimutjának nyugat-keleti szögsebessége $26^\circ/\text{óra}$, nappal pedig a kelet-nyugati elfordulása $13^\circ/\text{óra}$ [5]. Az éjszakai elfordulás mechanizmusának kétszer nagyobb szögsebessége egy belső „rugószerkezetben” nappal felgyűlt energia felszabadulásának eredménye lehet oly módon, hogy a szár, mint rugó napközbeni aktív elfordulásába fektetett energia napnyugta után spontán visszafordulást eredményez [5].

A fiatal napraforgófej napkövetése egy feltételezett molekuláris jel és/vagy szerkezeti változás következtében lelassul, majd a virágképzés kezdetétől megáll [6]. Ezután a virágzat normálvektora végig keletre néz, amit csak a heves szelek és bőséges esők módosíthatnak [4]. A napot már nem követő, érett fej közel 25%-kal járul hozzá az egész napraforgó fényelnyeléséhez. A virágképzés után a virágzat normálvektora fokozatosan egyre lejjebb hajlik a fej növekvő súlya miatt, a levelek napkövetése pedig egyre csökkenő amplitúdóval folytatódik.

A napraforgószár irányított növekedése és napszaki (cirkadián) szabályozása a fiatal napraforgófej napkövetését és éjszakai reorientációját keleti irányba tolja el [7]. E heliotróp mozgás és az érett napraforgófej napkövetésének leállása nagyobb biomasszához és a virágzat rovarok általi hatékonyabb beporzásához vezethet. A napkövetésért a szár keleti és nyugati oldalának ellentétes fázisú növekedési mintázatai fele-

lősek. A fénykövető (fototróp) növekedés szabályozásában szerepet játszó gének (az óragének kivételével) eltérően fejeződnek ki a napkövető száruk ellentétes oldalain. A szakirodalomban az egymást kölcsönösen nem feltétlenül kizáró következő hipotetikus/spekulatív magyarázatok találhatók arra, hogy miért keletre néznek az érett napraforgó-virágzatok:

1. Az érett napraforgó-virágzat egy adott égtáj (azimut) felé való irányulása az égre nézés helyett hasznos lehet, mert ha keskenyebb az a sáv, ahol a magévő madarak megkapaszkodhatnak a napraforgófejen, akkor csökkenhet az általuk okozott magvesztés [8]. Ez azonban igaz a napraforgó-virágzat bármely azimutirányára is, miáltal nem magyarázza a keletre rögzült irányt.

2. A Napot már nem követő napraforgó-virágzat keletre nézésének az lehet az előnye, hogy a déli órákban csökkentheti a hőterhelést [4, 5]. Azonban szimmetriaokból kifolyólag, a nyugatra nézésnek is ugyanez lenne a termikus előnye.

3. Az érett napraforgó-virágzat keletre nézése lehetővé teszi, hogy több fényenergiát nyelhessen el a kora reggeli órákban, ami felgyorsíthatja a virágzatra lecsapódott harmat napkelte utáni felszáradását, miáltal csökkenhet a gombásodás veszélye [4]. Ezt az elképzelést kísérletileg még nem ellenőrizték.

4. Az érett napraforgó-virágzatok keleti irányultsága vonzóbbá teheti őket a beporzó rovarok számára, mivel így több napfényt nyelnek el reggel, amely időszak egybeesik a portokbeli virágpor megjelenésével [9]. Terepkísérletekben kimutatták, hogy a napraforgó-virágzat hőmérséklete hozzájárul, de nem kizárólagosan határozza meg a természetesen keletre néző és a mesterségesen nyugatra fordított napraforgó-virágzatok beporzókra kifejtett eltérő vonzerejét [7].

5. A Napot már nem követő napraforgó-virágzat keletre nézése csökkentheti a hőterhelést, különösen a délután magas besugárzású időszakában [8]. A hűvösebb virágzat, a virágpor életképességének és termékenységének javítása által, növelheti a termés hozamot, mert a pollen sterilitása 30°C fölött a hőmérséklettel nő [8, 10]. Azonban a napraforgó elterjedési régióiban délután a napsugárzás intenzitása helyett a léghőmérséklet a magasabb, így az általában több délutáni felhő miatt az összbesugárzás többnyire kisebb, mint délelőtt.

6. A napraforgófej magasabb hőmérséklete a mag gyorsabb éréséhez, de csökkent magtömeghez vezet [10]. A kelet felé néző napraforgófejek felületi hőmérséklete $3-8^\circ\text{C}$ -kal alacsonyabb, mint azoké, amelyeket a déli órákban mesterségesen az ég felé irányítottak [4, 9]. Azonban szimmetriaokból ugyanez igaz a mesterségesen nyugat felé irányított napraforgófejekre is.

Bár a fiatal napraforgófej napkövetésének és éjszakai visszafordulásának már számos élettani részletére fény derült [6, 7], a Napot nem követő, érett napraforgó-virágzat keletre nézésének környezeti és/vagy növényfiziológiai okaira és ökológiai szerepeire még

mindig nincs kielégítő magyarázat. Cikkünkben az érett napraforgó-virágzat állandó keleti orientációjának környezetoptikai magyarázatát ismertetjük [2]. Eszerint, ha a délutánok felhősebbek a délelőttöknél, akkor a virágzat keletre nézése maximalizálja az általa elnyelt fényenergiát, ami előnyt jelent a magfejlődés és magérés szempontjából. Csillagászati (a Nap égi mozgása), meteorológiai (a felhőzet napi átlagos óránkénti változása) és növényfiziológiai (a napraforgófej időfüggő dőlésszöge és elnyelési spektrumai) adatok felhasználásával végzett számításainkkal megmutatjuk, hogy abban a földrajzi régióban, ahonnan a házasított napraforgó származik – például az Észak-Amerika keleti részén fekvő Boone County-ban [11], nem pedig Mexikóban, amint korábban feltételezték –, a kelet felé (és nem nyugatra vagy délre) néző napraforgó-virágzat nyel el maximális fényenergiát, mivel ott a délutánok általában felhősebbek a délelőttöknél. E magyarázat nem zárja ki néhány korábbi hipotézis érvényességét, amelyek az érett napraforgó-virágzatok keleti orientációjának ökológiai jelentőségét próbálták magyarázni.

Számítási módszerek

A napraforgó-virágzat által elnyelt fényenergia

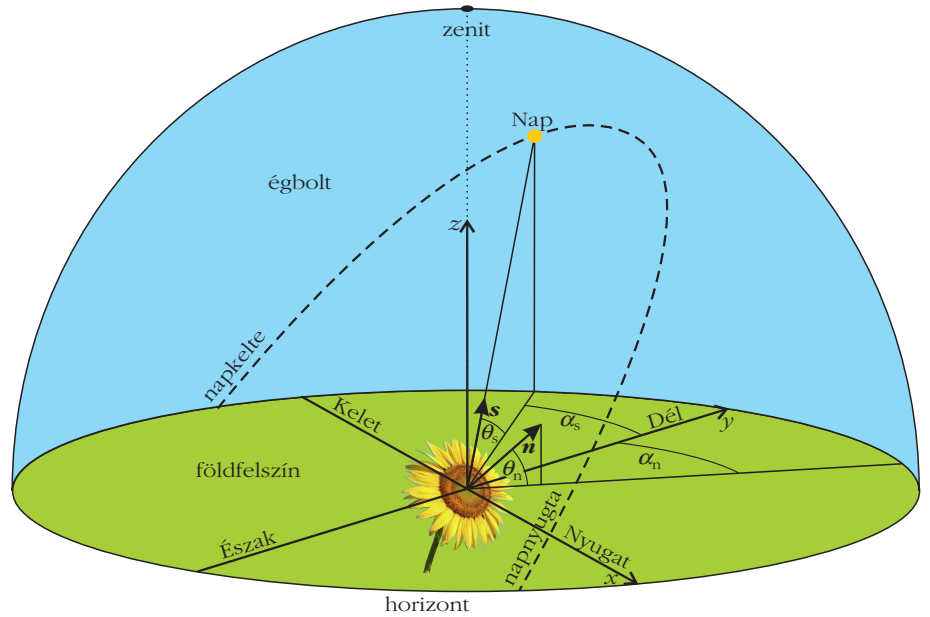
Az 1. ábra x - y - z koordináta-rendszerében legyen a napraforgó-virágzat felületének normálvektora

$$\mathbf{n} = (\cos\theta_n \sin\alpha_n, \cos\theta_n \cos\alpha_n, \sin\theta_n), \quad (1)$$

ahol az x és y tengelyek rendre nyugati és déli irányúak, a z tengely pedig függőlegesen fölfelé mutat, a normálvektor $-90^\circ \leq \theta_n \leq +90^\circ$ elevációs szögét a vízszintestől mérjük ($\theta_n > 0^\circ$ a horizont fölött és $\theta_n < 0^\circ$ a horizont alatt), és az α_n azimutszöget az óramutató járásával megegyező irányban mérjük az y tengelytől. Modellünkben a napraforgó virágképzése után az α_n szög állandó, mivel a fej már nem követi tovább a Nap mozgását az égen, és a $\theta_n(t)$ szög t idő szerinti változását (a fej fokozatosan növekvő súlya miatti csökkenését) a terepen mértük (lásd cikkünk 2. részében). A Nap felé mutató egységvektor:

$$\mathbf{s} = (\cos\theta_s \sin\alpha_s, \cos\theta_s \cos\alpha_s, \sin\theta_s), \quad (2)$$

ahol θ_s és α_s rendre az \mathbf{s} elevációs szöge és azimutszöge (1. ábra). Ha $\theta_n = 0^\circ$ és $\theta_s = 0^\circ$, akkor a virágzat füg-



1. ábra. Az égbolt gömbi geometriája a napraforgó-virágzat síkjának \mathbf{n} normálvektorával és a Nap irányába mutató \mathbf{s} egységvektorral.

gőleges és a Nap a horizonton van, míg $\theta_n = +90^\circ$ esetén a vízszintes virágzat a zenitre néz. A Nap június 21-én tetőzik (kulminál) $\theta_s = 74.5^\circ$ elevációs szöggel Boone County (Kentucky, USA, $39,0^\circ$ É, $-84,75^\circ$ K) szélességén, amely régióból származik a házasított napraforgó [11]. $\alpha_n = -90^\circ, 0^\circ$ és $+90^\circ$ esetén a virágzat rendre keletre, délre és nyugatra néz. Az északkeletre, délkeletre, délnyugatra és északnyugatra néző virágzatokat rendre a $-180^\circ < \alpha_n < -90^\circ, -90^\circ < \alpha_n < 0^\circ, 0^\circ < \alpha_n < +90^\circ$ és $+90^\circ < \alpha_n < +180^\circ$ azimutszögek jellemzik.

Az égboltról egy vízszintes felület által kapott teljes (globális) fénysugárzási intenzitás a direkt (közvetlen) és diffúz (szórt) sugárzások összege:

$$I_{\text{teljes}} = I_{\text{direkt}} + I_{\text{diffúz}}. \quad (3)$$

$$I_{\text{diffúz}} = D I_{\text{teljes}}, \quad (4)$$

ahol D a teljes besugárzás diffúz hányada. (3) és (4) felhasználásával kapjuk:

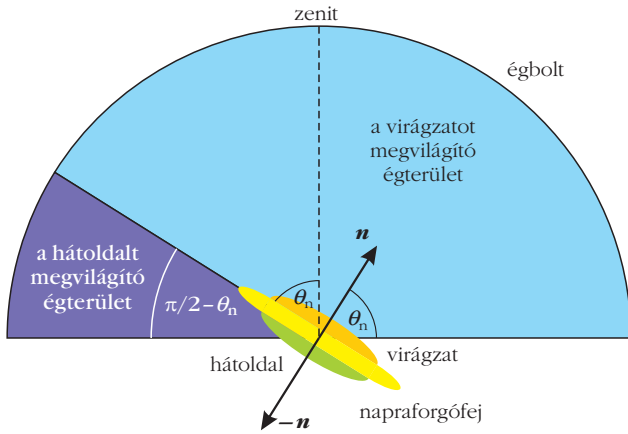
$$I_{\text{diffúz}} = I_{\text{direkt}} \frac{D}{1-D}. \quad (5)$$

A besugárzás szempontjából a következő két különböző meteorológiai helyzet a fontos:

1. A $0 \leq \sigma(t) \leq 1$ időfüggő valószínűséggel előforduló felhős helyzetben a felhők gyakran eltakarják a Napot.

2. Az $1-\sigma(t)$ valószínűséggel előforduló napos helyzetben a Napot csak ritkán takarják felhők.

A napraforgófej virágképzésének végétől számított i -edik nap napkeltéje és napnyugtája között a napraforgó-virágzat által elnyelt teljes fényenergia a direkt nap-sugárzásból elnyelt $E_{\text{nap},i}(\theta_n, \alpha_n)$ energia, a felhős idő diffúz sugárzásából elnyelt $E_{\text{diffúz},i}^{\text{felhős}}(\theta_n, \alpha_n)$ energia és a napos idő diffúz sugárzásából elnyelt $E_{\text{diffúz},i}^{\text{napos}}(\theta_n, \alpha_n)$ energia összege:



2. ábra. Az égbolt azon $(\theta_n + \pi/2)/\pi$ hányada (világoskék), ahonnan egy \mathbf{n} normálvektorú, θ_n elevációs szögű napraforgó-virágzat diffúz égfényt kap, valamint az ég azon $(\pi/2 - \theta_n)/\pi$ hányada (sötétkék), amelyből a napraforgófej $-\mathbf{n}$ normálvektorú hátoldala diffúz besugárzásban részesül.

$$E_i = E_{\text{diffúz}, i}^{\text{felhős}}(\theta_n, \alpha_n) + E_{\text{nap}, i}(\theta_n, \alpha_n) + E_{\text{diffúz}, i}^{\text{napos}}(\theta_n, \alpha_n). \quad (6)$$

A $\sigma(t)$ valószínűséggel előforduló felhős helyzet diffúz energiakomponense:

$$E_{\text{diffúz}, i}^{\text{felhős}}(\theta_n, \alpha_n) = Q \frac{\theta_n + \pi/2}{\pi} \int_{t_{\text{kelte}}}^{t_{\text{nyugta}}} \left\langle \sigma(t) \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} A_{\text{virág}}(\lambda) I_{\text{diffúz}}^{\text{felhős}}(\lambda, t) d\lambda \right\rangle dt, \quad (7)$$

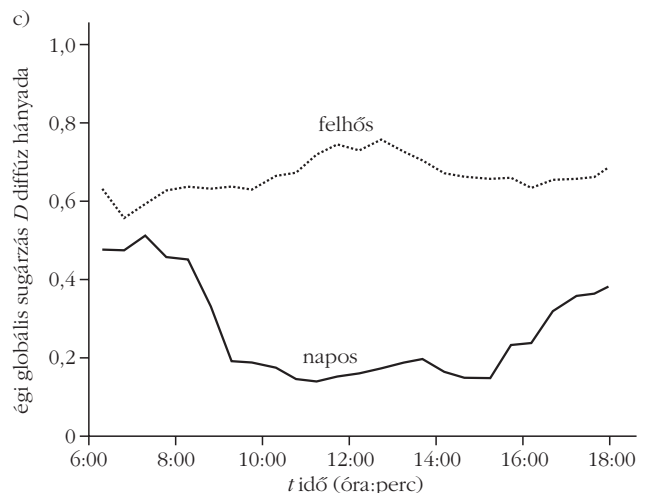
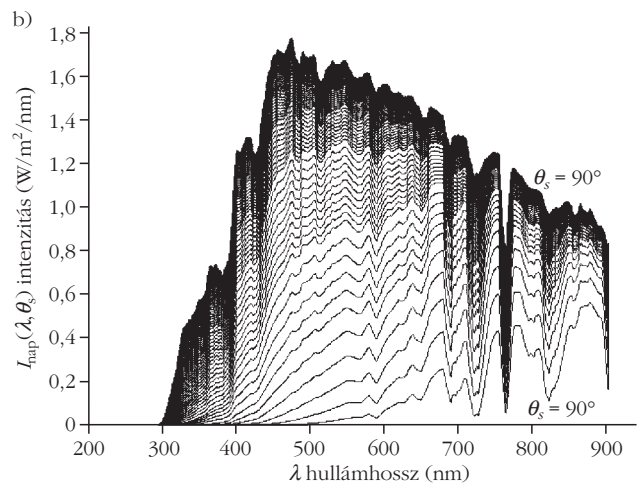
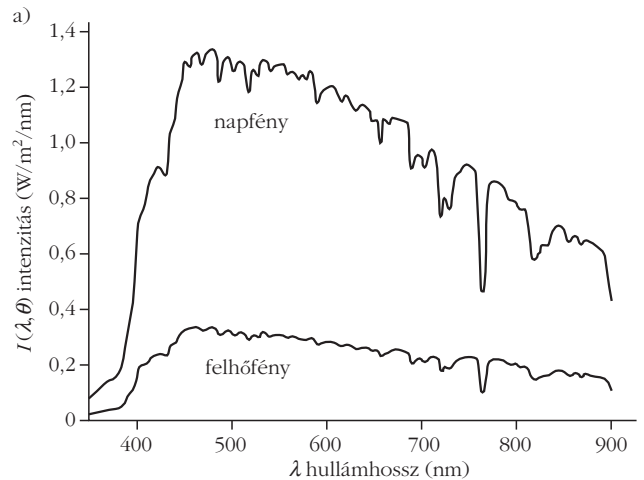
ahol Q a napraforgó-virágzat felülete, $I_{\text{diffúz}}^{\text{felhős}}(\lambda, t)$ a felhős helyzetben egy vízszintes felületre eső diffúz fényintenzitás, $\lambda_{\text{min}} = 400 \text{ nm} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{max}} = 700 \text{ nm}$ a napraforgó fényelnyelése szempontjából fiziológiailag releváns hullámhossztartomány, t_{kelte} és t_{nyugta} rendre a napkelte és napnyugta ideje az i -edik napon (az $i = 1$ naptól a fej már nem követi a Napot), $A_{\text{virág}}(\lambda)$ a virágzat elnyelési spektruma, és $(\theta_n + \pi/2)/\pi$ az égbolt azon hányada, ahonnan egy θ_n elevációs szögű normálvektorú napraforgó-virágzat diffúz égfényt kap (2. ábra).

Számításainkban a virágképzés utáni első három hétben a fiatal (virágképzés utáni 2. heti), majd az idős (virágképzés utáni 4. heti) napraforgó-virágzat $A_{\text{virág}}(\lambda)$ elnyelési spektrumát használtuk (lásd: cikkünk 2. része). A $\lambda_{\text{min}} = 400 \text{ nm} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{max}} = 700 \text{ nm}$

3. ábra. a) $\theta_s = 53,5^\circ$ elevációs szögű Nap direkt fényének felhőtlen ég esetén mért $I_{\text{nap}}(\lambda, \theta_s)$ spektruma, és $\theta_s = 53,8^\circ$ elevációs szögű Nap mellett a felhős ég fényének $I_{\text{felhős}}(\lambda, \theta_s)$ spektruma ([12] 2a ábrája alapján). b) A földfelszínre érő direkt napfény MODTRAN 3.7 modellből számolt $I_{\text{nap}}(\lambda, \theta_s)$ spektruma a Nap vízszintestől mért θ_s elevációs szöge függvényében $\theta_s = 0^\circ$ -tól (horizont, legalsó görbe) $\theta_s = 90^\circ$ -ig (zenit, legfelső görbe) 1° lépésközzel. c) Az éves átlagos diffúz és teljes (globális) sugárzás D hányadának napi változása napsütéses és felhős körülmények között 2017. júliusban Észak-Kínában ([14] 6. ábrája alapján).

spektrális tartományban, felhős időben az átlagos direkt sugárzás a direkt napsugárzás közel 20%-a (3.a ábra), amely hányad csak kis érzékenységgel az időjárás-változásra és a mérés idejére [12]. Az (5) és e 0,2 szorzótényező használatával a következőt kapjuk:

$$I_{\text{diffúz}}^{\text{felhős}}(\lambda, t) = \frac{D_{\text{felhős}}(t)}{1 - D_{\text{felhős}}(t)} 0,2 I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] \sin \theta_s^i(t), \quad (8)$$



ahol $I_{\text{nap}}(\lambda, \theta_s)$ a beesési irányra merőleges egységnyi felületre eső direkt napfény intenzitása (3.b ábra) és $D_{\text{felhős}}$ a teljes sugárzás diffúz hányada felhős helyzetben (3.c ábra). A meteorológiában az I_{teljes} , I_{direkt} és $I_{\text{diffúz}}$ intenzitásokat mindig vízszintes detektorfelülettel mérik, míg a 3.b ábra $I_{\text{nap}}(\lambda, \theta_s)$ intenzitásai a direkt napfényre merőleges felületre lettek meghatározva. Ahhoz, hogy a detektorfelület e két különböző irányát figyelembe vegyük, be kellett vezetni a (8)-beli $\sin\theta_s$ szorzótényezőt.

A MODTRAN (angolul: *MODerate resolution TRANsmittance code*) szoftver 3.7 verziójának segítségével, 1362,12 W/m² napállandó mellett és az 1976-os *US Standard Atmosphere* használatával történt a Föld felszínét érő $I_{\text{nap}}(\lambda, \theta_s)$ intenzitások számítása [13]. $I_{\text{nap}}(\lambda, \theta_s)$ az egységnyi idő alatt, a beesési irányra merőleges egységnyi felületre, egységnyi hullámhossztartományban beeső energia. A 3.b ábra az $I_{\text{nap}}(\lambda, \theta_s)$ görbéket mutatja a Nap 91 különböző elevációs szöge esetén.

A 3.c ábra az éves átlagos diffúz és teljes (globális) sugárzás D hányadának napi változását mutatja nap-sütéses és felhős körülmények között [14]. (7) és (8) felhasználásával kapjuk a felhős idő diffúz fényéből egységnyi felület által elnyelt diffúz energiát:

$$e_{\text{diffúz}, i}^{\text{felhős}}(\theta_n, \alpha_n) = \frac{E_{\text{diffúz}, i}^{\text{felhős}}(\theta_n, \alpha_n)}{Q} =$$

$$= 0,2 \frac{\theta_n + \pi/2}{\pi} \int_{t_{\text{kelte}}}^{t_{\text{nyugta}}} \left\langle \frac{\sigma(t) D_{\text{felhős}}(t) \sin\theta_s^i(t)}{1 - D_{\text{felhős}}(t)} \cdot \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} A_{\text{virág}}(\lambda) I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] d\lambda \right\rangle dt. \quad (9)$$

Ha $I_{\text{direkt}}(\lambda, \theta_s)$ [J/(s·nm·m²)] a napraforgót megvilágító direkt sugárzás, akkor a virágzat által dt elemi időintervallumban és $d\lambda$ elemi hullámhossztartományban elnyelt elemi dE direkt fényenergia:

$$dE = Q \cos\gamma I_{\text{direkt}}(\lambda, \theta_s) A_{\text{virág}}(\lambda) d\lambda dt, \quad (10)$$

ahol γ az \mathbf{n} és \mathbf{s} egységvektorok által bezárt szög, aminek koszinusza:

$$\cos\gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = \cos\theta_n \sin\alpha_n \cos\theta_s \sin\alpha_s +$$

$$+ \cos\theta_n \cos\alpha_n \cos\theta_s \cos\alpha_s + \sin\theta_n \sin\theta_s. \quad (11)$$

A napraforgó-virágzatra csak akkor esik direkt napfény, ha a következő feltétel teljesül: $-90^\circ < \gamma < +90^\circ$, $0 < \cos\gamma < 1$, vagyis

$$0 < \cos\theta_n \sin\alpha_n \cos\theta_s \sin\alpha_s +$$

$$+ \cos\theta_n \cos\alpha_n \cos\theta_s \cos\alpha_s + \sin\theta_n \sin\theta_s < 1. \quad (12)$$

(10) felhasználásával, az $1 - \sigma(t)$ valószínűséggel előforduló napos időben az egységnyi felületre eső direkt napfényből elnyelt energia:

$$e_{\text{nap}, i}(\theta_n, \alpha_n) = \frac{E_{\text{nap}, i}(\theta_n, \alpha_n)}{Q} =$$

$$= \int_{t_{\text{kelte}}}^{t_{\text{nyugta}}} \left\langle [1 - \sigma(t)] \cos\gamma(t) \cdot \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} A_{\text{virág}}(\lambda) I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] d\lambda \right\rangle dt, \quad (13)$$

$$\text{itt } \cos\gamma(t) = \cos\theta_n \sin\alpha_n \cos\theta_s^i(t) \sin\alpha_s^i(t) +$$

$$+ \cos\theta_n \cos\alpha_n \cos\theta_s^i(t) \cos\alpha_s^i(t) + \sin\theta_n \sin\theta_s^i(t) \quad (14)$$

faktor szükséges, mert a direkt napfény általában nem merőleges a napraforgó-virágzat felületére. (5) használatával, napos körülmények között egy vízszintes felületre eső diffúz sugárzás intenzitása:

$$I_{\text{diffúz}}^{\text{napos}}(\lambda, t) = \frac{D_{\text{napos}}(t)}{1 - D_{\text{napos}}(t)} I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] \sin\theta_s^i(t), \quad (15)$$

ahol a $\sin\theta_s$ szorzótényező ismét szükséges a (8) levezetésekor említett okból kifolyólag. A 3.c ábra mutatja a D_{napos} éves átlagos diffúz hányad napi változását napos helyzetben [14]. (15) alkalmazásával, az $1 - \sigma(t)$ valószínűséggel előforduló napos idő diffúz sugárzásából egységnyi felület által elnyelt energia:

$$e_{\text{diffúz}, i}^{\text{napos}}(\theta_n, \alpha_n) = \frac{E_{\text{diffúz}, i}^{\text{napos}}(\theta_n, \alpha_n)}{Q} =$$

$$= \frac{\theta_n + \pi/2}{\pi} \int_{t_{\text{kelte}}}^{t_{\text{nyugta}}} \left\langle \frac{[1 - \sigma(t)] D_{\text{napos}}(t) \sin\theta_s^i(t)}{1 - D_{\text{napos}}(t)} \cdot \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} A_{\text{virág}}(\lambda) I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] d\lambda \right\rangle dt, \quad (16)$$

ahol a $(\theta_n + \pi/2)/\pi$ szorzótényező ismét az égbolt azon hányada, ahonnan a napraforgó-virágzat diffúz fényt kap (2. ábra). Végül a napraforgó-virágzat egységnyi felülete által elnyelt teljes energia a fej napkövetésének leállása és a végső magérés közti időszakban:

$$e_{\text{teljes}} = \sum_{i=1}^m e_i = \sum_{i=1}^m \left[e_{\text{diffúz}, i}^{\text{felhős}}(\theta_n, \alpha_n) + e_{\text{nap}, i}(\theta_n, \alpha_n) + e_{\text{diffúz}, i}^{\text{napos}}(\theta_n, \alpha_n) \right], \quad (17)$$

ahol m a magérés utolsó napját jelöli.

A napraforgófej hátoldala által elnyelt fényenergia

A napraforgófej hátoldala zöld (később sárgászöld) a klorofilltartalma miatt, ami fontos szerepet játszik a fotoszintézisben. Ezért érdemes meghatározni a fejhát által elnyelt fényenergiát a virágképzés és a teljes magérés között. A fejhátat is ugyanaz a három sugárzási komponens éri, mint a virágzatot, de a fejhát és a virágzat közti három fő különbség a következő:

1. A fejhát $\mathbf{n}_{\text{hát}}$ normálvektora ellentétes irányú a virágzat \mathbf{n} normálvektorával (2. ábra): $\mathbf{n}_{\text{hát}} = -\mathbf{n}$.

2. A fejhátat az égbolt azon részéből származó diffúz fény világítja meg, ami a virágzatot diffúzan megvilágító égrész kiegészítője. Ezt a

$$\frac{\pi - 2 \theta_n(t)}{2 \pi}$$

faktorral lehet figyelembe venni, ami az éggömb azon hányada, ahonnan a $\theta_n(t)$ elevációs szöggel bíró normálvektorú fej háta diffúz sugárzást kap (2. ábra).

3. A fejhát $A_{\text{hát}}(\lambda)$ elnyelési spektruma eltér a virágzat $A_{\text{virág}}(\lambda)$ elnyelési spektrumától (lásd cikkünk 2. részét).

E különbségek figyelembe vételével, a virágképzés és a teljes magérés közti időszakban a napraforgófej hátoldalának egységnyi felülete által elnyelt teljes fényenergia:

$$e_{\text{teljes, hát}} = \sum_{i=1}^m \left\{ e_{\text{diffúz, } i, \text{ hát}}^{\text{felhős}}[\theta_n(t), \alpha_n] + e_{\text{nap, } i, \text{ hát}}[\theta_n(t), \alpha_n] + e_{\text{diffúz, } i, \text{ hát}}^{\text{napos}}[\theta_n(t), \alpha_n] \right\}, \quad (18)$$

ahol m a teljes magérés utolsó napja, és a három energiakomponens a következő:

$$e_{\text{diffúz, } i, \text{ hát}}^{\text{napos}}[\theta_n(t), \alpha_n] = \frac{\pi/2 - \theta_n(t)}{\pi} \int_{t_{\text{kelte}}}^{t_{\text{nyugta}}} \left\langle \frac{[1 - \sigma(t)] D_{\text{napos}}(t) \sin \theta_s^i(t)}{1 - D_{\text{napos}}(t)} \cdot \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} A_{\text{hát}}(\lambda) I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] d\lambda \right\rangle dt, \quad (19)$$

$$e_{\text{diffúz, } i, \text{ hát}}^{\text{felhős}}[\theta_n(t), \alpha_n] = 0,2 \frac{\pi/2 - \theta_n(t)}{\pi} \int_{t_{\text{kelte}}}^{t_{\text{nyugta}}} \left\langle \frac{\sigma(t) D_{\text{felhős}}(t) \sin \theta_s^i(t)}{1 - D_{\text{felhős}}(t)} \cdot \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} A_{\text{hát}}(\lambda) I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] d\lambda \right\rangle dt, \quad (20)$$

$$e_{\text{nap, } i, \text{ hát}}[\theta_n(t), \alpha_n] = \int_{t_{\text{kelte}}}^{t_{\text{nyugta}}} \left\langle [\sigma(t) - 1] \cos \gamma(t) \cdot \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} A_{\text{hát}}(\lambda) I_{\text{nap}}[\lambda, \theta_s^i(t)] d\lambda \right\rangle dt, \quad (21)$$

Az idő teltevel a (21)-beli $e_{\text{nap, } i, \text{ hát}}[\theta_n(t), \alpha_n]$ csak akkor nő, ha a fejhátat direkt napfény éri, aminek feltétele:

$$\begin{aligned} -1 < \cos \gamma(t) &= \\ &= \cos \theta_n \sin \alpha_n \cos \theta_s^i(t) \sin \alpha_s^i(t) + \\ &+ \cos \theta_n \cos \alpha_n \cos \theta_s^i(t) \cos \alpha_s^i(t) + \\ &+ \sin \theta_n \sin \theta_s^i(t) < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

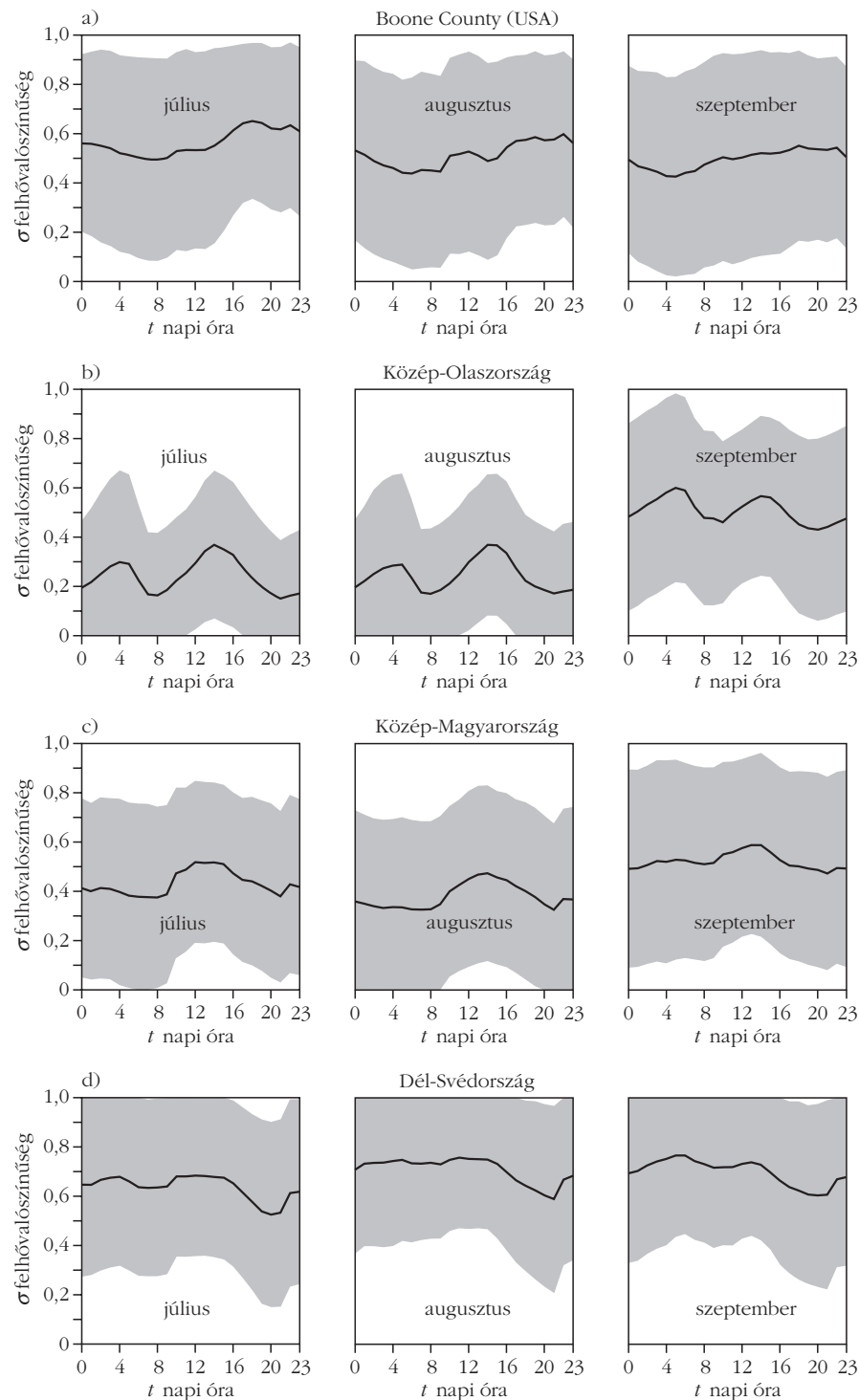
Mivel ekkor $\cos \gamma(t) < 0$, a (21)-beli $\cos \gamma(t)$ -t meg kell szorozni -1 -gyel. Számításainkban a virágképzés utáni első három hétben a fiatal (virágképzés utáni 2. heti), majd az idős (virágképzés utáni 4. heti) fejhát $A_{\text{hát}}(\lambda)$ elnyelési spektrumát használtuk.

A Nap elevációjának és azimutjának számítása az idő függvényében

A Nap vízszintestől mért $\theta_s(t)$ elevációs szögét és a földrajzi déltől mért $\alpha_s(t)$ azimut szögét (1. ábra) a t idő függvényében a VSOP 87 (*Variations Séculaires des Orbites Planétaires*) bolygóelméleten alapuló, kvázi-analitikus algoritlussal (*analytical Kepler's orbits modified with astronomical perturbations*) [15] számítottuk. E módszer az 1950–2050 közötti időszakban $0,01^\circ$ pontossággal adja meg a Nap égi helyét. Először kiszámoltuk a Nap geocentrikus ekliptikai, majd geocentrikus egyenlítői és végül geocentrikus horizontális koordinátáit, aminek eredményeként megkaptuk a $\theta_s(t)$ és $\alpha_s(t)$ szöveget.

A felhővalószínűség napi menete

A 2009. január 1. és 2018. december 31. közötti időszakra vonatkozó, 1 órás felbontású *Total Cloud Cover* (TCC: teljes ég felhőfedettsége) felhőzöttségi idősorok a *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* ERA5 mérési eredményeiből származtak [16]. A földrajzi lefedettség térbeli felbontása $0,25^\circ \times 0,25^\circ \approx 27 \text{ km} \times 27 \text{ km}$ volt. A TCC klimatológiai átlagértékeit úgy határoztuk meg, hogy a napraforgó vegetatív periódusában a szóban forgó 10 év napjainak minden órájában képeztük a felhővalószínűségek átlagát. Mivel a TCC egy dimenzió nélküli, 0 és 1 közti szám (0: tiszta ég, 1: borult ég), ezért az óránkénti klimatológiai középérték ekvivalens a felhőzöttség időfüggő $0 \leq \sigma(t) \leq 1$ valószínűségével. Meghatároztuk a $\sigma(t)$ napi valószínűségi függvényt júliusban, augusztusban és szeptemberben Boone County-ban (Kentucky,



4. ábra. Napi átlagos $\sigma(t)$ felhővalószínűség (fekete görbe) \pm szórás (szürke sáv) (a) Boone County-ban (Kentucky, USA, $39,0^\circ$ É, $84,75^\circ$ K), (b) Közép-Olaszországban ($41,0^\circ$ É, $15,0^\circ$ K), (c) Közép-Magyarországon ($47,0^\circ$ É, $19,0^\circ$ K) és (d) Dél-Svédországban ($58,0^\circ$ É, $13,0^\circ$ K) júliusban, augusztusban és szeptemberben.

USA, $39,0^\circ$ É, $-84,75^\circ$ K, 4.a ábra), Közép-Olaszországban ($41,0^\circ$ É, $15,0^\circ$ K, 4.b ábra), Közép-Magyarországon ($47,0^\circ$ É, $19,0^\circ$ K, 4.c ábra) és Dél-Svédországban ($58,0^\circ$ É, $13,0^\circ$ K, 4.d ábra). Boone County-ban, Közép-Olaszországban és Közép-Magyarországon a nyári délutánok átlagosan felhősebbek, mint a délelőttök, vagyis $\sigma_{\text{délután}} > \sigma_{\text{dél előtt}}$, míg Dél-Svédor-

szágban a nyári délelőttök átlagosan felhősebbek a délutánoknál, azaz $\sigma_{\text{dél előtt}} > \sigma_{\text{dél után}}$.

Mérési módszerek

Napraforgófej-dőlésszög mérése az idő függvényében

2020. július 6. és szeptember 11. között, egy budaörsi napraforgó-ültetvény egymás melletti 100 napraforgó-virágzata normálvektorának vízszintestől mért θ_n elevációs szögét mértük ugyanazon egyedeken, közelítőleg hetente. A vizsgált napraforgókat az ültetvény egyik sorában választottuk ki.

Napraforgófejek elnyelési spektrumainak mérése

A szóban forgó napraforgó-ültetvényben mértük 3 fiatal (virágképzés utáni 2. heti) és 3 idős (virágképzés utáni 4. heti) napraforgófej virágzatának és hátának elnyelési spektrumait egy Ocean Optics STS-VIS spektrométerrel (Ocean Insight, Largo, USA). A méréseket teljesen borult ég alatt végeztük, hogy a megvilágítás izotróp és diffúz legyen. Először a virágzat és a fejhát $R(\lambda)$ visszaverődési spektrumát mértük 3 fiatal és 3 idős napraforgón: a spektrométer fejét a célpontra irányítottuk 5 cm távolságból, majd egy másik spektrométert regisztráltunk úgy, hogy a spektrométerfejet a borult ég felé fordítottuk. Feltételezve, hogy a nem visszaverődő összes fényt elnyelte a napraforgó, e két spektrumot elosztva egymással, megkaptuk az $R(\lambda)$ visszaverési spektrumot, amit kivontunk 1-ből, majd átlagoltunk a 3-3 növényre, végül megkapva az $A(\lambda) = 1 - R(\lambda)$ elnyelési spektrumot.

Irodalom

1. Darwin C., Darwin F.: *The Power of Movement in Plants*. D. Appleton & Co, New York, (1897).
2. Horváth G., Slíz-Balogh J., Horváth Á., Egri Á., Virágh B., Horváth D., Jánosi I. M.: Sunflower inflorescences absorb maximum light energy if they face east and afternoons are cloudier than mornings. *Scientific Reports* 10 (2020) 21597. (doi: 10.1038/s41598-020-78243-z) www.nature.com/articles/s41598-020-78243-z

3. Koller D.: Solar navigation by plants. In: *Photomovement*. (editors: Häder D. P., Leber M.) Elsevier, Amsterdam (2001) 833–896.
4. Lang A. R. G., Begg J. E.: Movements of *Helianthus annuus* leaves and heads. *Journal of Applied Ecology* 16 (1979) 299–305.
5. Leshem Y. Y.: Sunflower: a misnomer? *Nature* 269 (1977) (8 September) 102.
6. Vandenbrink J. P., Brown E. A., Harmer S. L., Blackman B. K.: Turning heads: The biology of solar tracking in sunflower. *Plant Science* 224 (2014) 20–26.
7. Atamian H. S., Creux N. M., Brown E. A., Garner A. G., Blackman B. K., Harmer S. L.: Circadian regulation of sunflower heliotropism, floral orientation, and pollinator visits. *Science* 353 (2016) 587–590.
8. Seiler G. J.: Anatomy and morphology of sunflower. In: *Sunflower Technology and Production*. (editor: Schneiter A. A.) American Society of Agronomy, Madison, WI, USA (1997) 67–111.
9. Lamprecht I., Maierhofer C., Röllig M.: Infrared thermography and thermometry of phototropic plants. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* 87 (2007) 49–54.
10. Ploschuk E. L., Hall A. J.: Capitulum position in sunflower affects grain temperature and duration of grain filling. *Field Crops Research* 44 (1995) 111–117.
11. Blackman B. K., Scascitelli M., Kane N. C., Luton H. H., Rasmussen D. A., Bye R. A., Lentz D. L., Rieseberg L. H.: Sunflower domestication alleles support single domestication center in eastern North America. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 108 (2011) 14360–14365.
12. Dengel S., Grace J., MacArthur A.: Transmissivity of solar radiation within a *Picea sitchensis* stand under various sky conditions. *Biogeosciences* 12 (2015) 4195–4207.
13. Egri Á., Horváth Á., Kriska G., Horváth G.: Optics of sunlit water drops on leaves: Conditions under which sunburn is possible. *New Phytologist* 185 (2010) 979–987.
14. Liu P., Tong X., Zhang J., Meng P., Li J., Zhang J.: Estimation of half-hourly diffuse solar radiation over a mixed plantation in north China. *Renewable Energy* 149 (2020) 1360–1369.
15. Bretagnon P., Francou G.: Planetary theories in rectangular and spherical VSOP 87 solutions. *Astronomy and Astrophysics* 202 (1988) 309–315.
16. Hersbach H., Dee D.: ERA5 reanalysis is in production. *ECMWF Newsletter* 147 (2016) 7.

ANOMÁLIÁK A MAGFIZIKÁBAN

– a magasabb rendű folyamatok következményei

Kálmán Péter, Keszthelyi Tamás
BME, Fizikai Intézet

A neutron felefedezése után, az 1930-as évtized második felében az elméleti magfizikát [1–3] és nukleáris asztrofizikát [4] megalapozó munkák születtek. Ezt követően zajlott az első atombombák előállításához vezető Manhattan-terv, amelynek résztvevői alapvetően határozták meg a mag- és részecskefizika további fejlődését. A hidegháború pedig olyan hatást gyakorolt a mag-

és részecskefizikára, ami a kutatást részben a fegyvergyártás és atomreaktor-készítés irányába vitte el.

Ilyen légkörben, Nobel-díjas fizikusok népes táborával fémjelzetten alakult ki és vált szinte megkérdőjelezhetetlenné – különösen az alacsony energiák tartományában –, hogy az azonos előjelű, z_1 és z_2 töltésszámú, töltött részek közötti magreakciók hatáske- resztmetszete (σ)¹ a tömegközépponti koordináta- rendszerbeli ε mozgási energiájuktól

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon} \exp[-2\pi\eta_{12}(\varepsilon)] \quad (1)$$

módon függ [5], ahol $S(\varepsilon)$ az úgynevezett asztrofizikai faktor és $\eta_{12}(\varepsilon) \propto z_1 z_2 \varepsilon^{-1/2}$ a Sommerfeld-paraméter. Mivel

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon) = S(0)$$

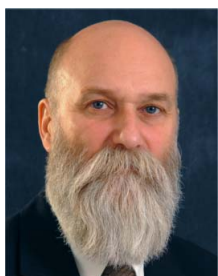
véges érték [5], $\sigma(\varepsilon)$ alakjából látható, hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon) = 0,$$

vagyis $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén *tiltottá* válik a folyamat.

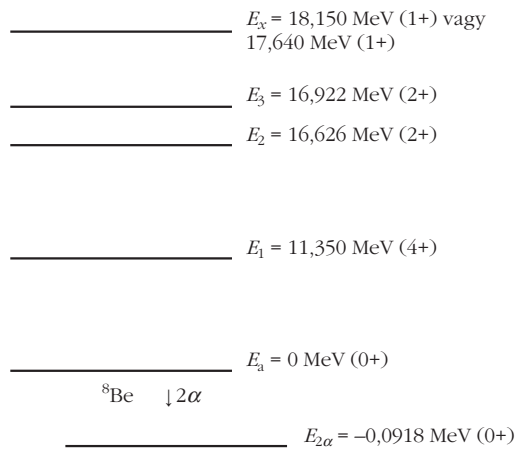


Kálmán Péter, az MTA doktora, nyugalmazott, a BME-n habilitált egyetemi docens az ELTE-n szerzett fizikusi diplomát. Főbb kutatási területei: a sugárzás és anyag kölcsönhatásának szemiklasszikus elmélete, ionkristályok mechanikai tulajdonságai, elektrooptikai és piroelektromos anyagok alkalmazásai, fizikai folyamatok intenzív lézerterekben és plazmakörnyezetben, valamint alacsonyenergiás magfizikai folyamatok.



Keszthelyi Tamás, PhD a fizikai tudomány kandidátusa, nyugalmazott egyetemi docens, a BME TTK volt dékánja, a Magyar Köztársasági Érdemrend Lovagkeresztjének birtokosa az ELTE-n szerzett fizikusi diplomát. Főbb kutatási területei: ionkristályok mechanikai tulajdonságai, fizikai folyamatok intenzív lézerterekben és plazmakörnyezetben, valamint alacsonyenergiás magfizikai folyamatok.

¹A hatáske- resztmetszet (σ) egy felület dimenziójú mennyiség. $N\sigma\Phi$ az időegységenként végbemenő magreakciók száma, a hozam, ahol N a bombázott céltárgyrészek száma és Φ a bombázó részek fluxusa, vagyis a felületegységenként egységnyi idő alatt beeső részek száma.



1. ábra. A ${}^8\text{Be}$ nívósémájának részlete [18].

Ezért is keltett nagy vihart az az 1989-ben megjelent közlemény [6], amelyben LiOD nehésvízes oldatának Pd katód és Pt anód közötti elektrolízisekor, szobahőmérséklethez közel magfizikai folyamatoknak tulajdonított extra hőfejlődésről adtak hírt. Ez az állítás ellentmondásban van (1)-gyel és ez az alapja a fizikus társadalom „hidegfúzió”-val kapcsolatos alapvetően elutasító magatartásának. Két évvel ezelőtt [7, 8] azonban sikerült a [6] által tapasztaltakat a standard kvantumfizika alapján magyarázni.

Az elmúlt években olyan jelenségeket észleltek [9–11], amelyek a szűkebb szakma mellett szélesebb körben is rendkívüli figyelmet keltettek és amelyek értelmezéséhez – amint az alább bemutatásra kerül – szintén elegendőek hagyományos mag- és kvantumfizikai ismereteink [12].

Ebben a cikkben azt kívánjuk bemutatni, hogy a kvantumfizika és a magfizika következetes alkalmazása képes rejtélyesnek tűnő és a szélesebb nyilvánosság számára is érdekes jelenségek magyarázatára.

Az anomális párkeltés

Az 1980-as évek elején-közepén az extra nagy töltésű ionok terében végbemenő kvantum-elektrodinamikai folyamatok vizsgálata közben (GSI, Darmstadt) [13] extra elektron (e^-) – pozitron (e^+) párkeltési eseményeket figyeltek meg [14–17]. Ezek az észlelések inspirálták azon méréseket, amelyek során a ${}^8\text{Be}$ és ${}^4\text{He}$ magok gerjesztett állapotainak bomlásánál anomális párkeltést tapasztaltak. Úgy tűnt, hogy e megfigyelések egy új részecske jelenlétére és egyúttal egy új kölcsönhatás létezésére is utalnak [9–11].

A kísérletekben a ${}^8\text{Be}$ és ${}^4\text{He}$ magokat jól definiált, E_x energiájú gerjesztett állapotban, rezonáns (p, γ) reakcióban állították elő. (${}^8\text{Be}$ esetében az $E_x = 18,150 \text{ MeV}$, illetve $17,640 \text{ MeV}$ energiájú állapotokat, 1. ábra [18].) Az így létrehozott gerjesztett magállapotok $e^- e^+$ párkeltéssel is bomolhatnak az alapállapotba ($E_a = 0 \text{ MeV}$). A kísérletek során tehát az volt a feltevés, hogy két egymás utáni folyamatban játszódik le a jelenség. A kísérletekben olyan eseményeket

regisztráltak, amelyekben a keletkező $e^- e^+$ pár együttes energiája

$$E_- + E_+ = \Delta E_{xa} = E_x - E_a,$$

vagyis megegyezik a gerjesztett mag gerjesztési energiájával. Itt E_- és E_+ a keletkező elektron, illetve pozitron energiája. Ennek az $e^- e^+$ párkeltéssel járó bomlásnak a szögfüggését vizsgálták. A szögfüggésben nagyobb szögek esetén (${}^8\text{Be}$ -nál 140° körül) az elméletileg várttól eltérést – egy anomáliaként jelentkező csúcstól – tapasztaltak. Az anomáliát egy hipotetikus részecskének, az X17-nek elnevezett bozonnak a keletkezésével és a keltett X17 párkeltéssel történő bomlásával magyarázták. A kétfajta (${}^8\text{Be}$ és ${}^4\text{He}$ magokon végzett) kísérletből meghatározott X17 nyugalmi tömegek szignifikánsan egyezőnek tűntek.

Az anomália lehetséges magyarázata új részecske feltételezése nélkül

A megfigyelt anomáliát a hagyományos mag- és kvantumfizikai ismereteink segítségével a következőképpen lehet magyarázni [12]. Az E_α és E_β energiájú $|\alpha\rangle$ és $|\beta\rangle$ magállapotok között történő átmenetben keltett $e^- e^+$ pár keltését leíró kölcsönhatás mátrixeleme

$$\langle \alpha | U_{EM}^{(2)} | \beta \rangle \propto \frac{1}{K_{\alpha\beta}^2 - \mathbf{q}^2} \quad (2)$$

alakú [19]. Itt

$$K_{\alpha\beta} = \frac{|\Delta E_{\alpha\beta}|}{\hbar c},$$

ahol $\Delta E_{\alpha\beta} = E_\alpha - E_\beta$, \hbar a redukált Planck-állandó és c a fény vákuumbeli sebessége. $\mathbf{q} = \mathbf{k}_+ + \mathbf{k}_-$, ahol \mathbf{k}_+ és \mathbf{k}_- a síkhullámmal leírt pozitron és elektron hullámszámvektorai. A párkeltés hozama pedig $|\langle \alpha | U_{EM}^{(2)} | \beta \rangle|^2$ -tel arányos. Ha $\hbar c K_{\alpha\beta} = E_- + E_+ = \Delta E_{xa}$, akkor

$$K_{\alpha\beta}^2 - \mathbf{q}^2 = \left(\frac{\Delta E_{xa}}{\hbar c} \right)^2 - (k_-^2 + k_+^2 + 2k_- k_+ \cos \Theta),$$

vagyis (2) nevezője k_- és k_+ fix értékeinél Θ növekedtével nő, ahol Θ a \mathbf{k}_+ és \mathbf{k}_- által bezárt szög. Ebben az esetben (az $\langle \alpha | U_{EM}^{(2)} | \beta \rangle$ egyéb szögfüggését is a figyelembe véve) a folyamat valószínűsége Θ növekedtével csökken. Ez a helyzet kétlépcsős folyamat esetében, vagyis a rezonáns (p, γ) reakciót követő párkeltésnél.

A magasabb rendű folyamatok azonban megengedik az $|\Delta E_{\alpha\beta}| < \Delta E_{xa}$ esetet is. Ekkor (2)-ben $K_{\alpha\beta}^2 - \mathbf{q}^2 = 0$ esetén

$$\Theta = \arccos \left[\frac{K_{\alpha\beta}^2 - (k_-^2 + k_+^2)}{2k_- k_+} \right] \quad (3)$$

szögnél szingularitás jelentkezik. A szingularitásokhoz tartozó legkisebb Θ_m szög a $k_- = k_+$ esetben jelenik meg és a $k_- \neq k_+$ esetek Θ szögeire $\Theta > \Theta_m$. Az összetartozó k_- és k_+ értékeket a $E_- + E_+ = \Delta E_{xa}$ feltétel

határozza meg. A magállapotok (élettartamukból származó) szélességei pedig a szingularitásokat lokális maximumokká (csúcsokká) enyhítik.

Anomália a ${}^7\text{Li}(p, e^- e^+){}^8\text{Be}$ reakcióban

A ${}^7\text{Li}(p, e^- e^+){}^8\text{Be}$ reakció esetében a 140° körül megfigyelt anomália [9–11] ilyen módon jól magyarázható [12]. Az általunk számottevőnek gondolt harmadrendű folyamat szempontjából fontos ${}^8\text{Be}$ gerjesztett állapotok a következők: $E_1 = 11,350$ MeV (4^+), $E_2 = 16,626$ MeV (2^+), és $E_3 = 16,922$ MeV (2^+). A harmadrendű folyamatban az erős kölcsönhatás által okozott protonbefogás vezet a 2 vagy a 3 állapotba, majd a $2 \rightarrow 1$, illetve a $3 \rightarrow 1$ $E2$ átmenetekben keletkezik az $e^- e^+$ pár, amelynek együttes energiája továbbra is ΔE_{xa} , hiszen a kísérletben az $E_- + E_+ = \Delta E_{\text{xa}}$ feltételnek eleget tevő eseményeket vették figyelembe. Végül ismét az erős kölcsönhatás okoz az 1 állapotból a végállapotba történő átmenetet, amelyben két, együttesen $0,09184$ MeV kinetikus energiájú α -rész keletkezik. Ez az energia az alapállapotú ${}^8\text{Be}$ két alfa kibocsátásával történő bomlásának az energiája (1. ábra). A $\hbar c K_{21} = 5,276$ MeV és $\hbar c K_{31} = 5,572$ MeV értékek $k_- = k_+$ esetén (3) segítségével $\Theta_{2,m} = 146,2^\circ$ -ot és $\Theta_{3,m} = 144,2^\circ$ -ot eredményeznek és ha $k_- \neq k_+$, akkor $\Theta_{j,m} < \Theta_j \leq 180^\circ$ ($j = 2, 3$) a csúcs helye az $e^- e^+$ párkeltés hozamának szögfüggésében. A domináns 1 állapotszélesség $\Gamma_1 \approx 3,5$ MeV, ami a csúcsok szétterülését $\pm 12^\circ$ -ban határozza meg. (A ${}^4\text{He}$ esetében tapasztaltak magyarázata kissé bonyolultabb [12], ezért azt itt nem tárgyaljuk.)

Az, hogy a párkeltés mellett két, az erős kölcsönhatás által okozott átmenet történik kompenzálja a folyamat harmadrendűségét. Ez teszi lehetővé, hogy a harmadrendű folyamat a két lépcsőben zajló folyamattal – amelynek első lépcsőjében az elektromágneses kölcsönhatás okoz (p, γ) reakciót – versenyképes hozamot eredményezzen.

Az anomális párkeltés egyéb reakciókban

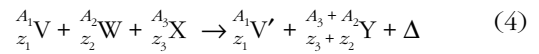
A nehézion-ütközésekben fellépő anomáliák [14–17] a fentiek alapján kvalitatív módon szintén magyarázhatók. Ezekben a kísérletekben az $e^- e^+$ pár keltését szintén a maggerjesztés után bekövetkező folyamatként kezelték, vagyis a kísérletek kiértékelésénél szintén kétlépcsős folyamattal számoltak [20]. Az „anomáliák” okozói itt is lehetnek [például, amikor a folyamatban résztvevő nehézionok egyike U, akkor az ${}^{238}\text{U}$ $1,3552$ MeV ($1,2+$) \rightarrow $0,0449$ MeV ($2+$), illetve $1,6432$ MeV ($4+$) \rightarrow $0,30721$ MeV ($6+$) [21] átmeneteiben] magasabb rendű folyamat részeként keletkező $e^- e^+$ párok.

Alacsonyenergiás (tiltott) magreakciók (LENR)

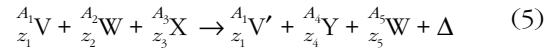
Amint azt korábban már tárgyaltuk, tiltott magreakciók esetén a perturbációszámítás magasabb (esetünkben már másod-) rendjében kaphatunk $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén is véges σ -t [7, 8]. Ennek oka az, hogy bármilyen perturbáció

báció lényeges változást okozhat a kezdeti, $\varepsilon = 0$ energiájú Coulomb-állapoton azáltal, hogy kicsi, de véges amplitúdóval $\varepsilon \neq 0$ állapotokat kever hozzá. Tehát a perturbációszámítás magasabb rendjével leírható folyamatok ekkor sem hagyhatók figyelmen kívül.

Amennyiben a korábban vizsgált



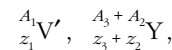
és



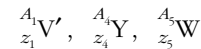
reakciókban mindhárom részecske atomi vagy atomion-állapotban van, akkor a hatáskeresztmetszet

$$\sigma_{23}^{(2)} = \frac{n_1 z_1^2 K}{v_{23}} \quad (6)$$

alakú [7, 8], ahol n_1 a katalizáló 1 részecske részecskeszám-sűrűsége, z_1 pedig a rendszáma, v_{23} a 2 és 3 részecskék közötti relatív sebesség és K az adott reakcióra jellemző állandó. (4)-ben és (5)-ben Δ a reakcióenergia, ami a kezdeti és végállapotbeli nyugalmi energiák különbsége. Az 1 részecske csak katalizálja a folyamatokat, nyugalmi tömege változatlan és csak kinetikus energiája változik (erre utal jobb oldalon az ${}_{z_1}^{A_1}\text{V}'$). Ha $\Delta > 0$, akkor lehetséges spontán reakció és Δ -t az



illetve az



részecskék viszik el mozgási energia formájában.

A térfogategységre eső hozam ($n_1 n_2 n_3 z_1^2 K$) tehát a folyamatban résztvevő részecskék részecskeszám-sűrűségeinek (n_i) szorzatával ($n_1 n_2 n_3$) arányos. $n_1 n_2 n_3 = 1,86 \cdot 10^{61}$ cm^{-9} és $z_1 = 54$ (a katalizáló részecske Xe) esetén a hozamok már gyakorlati szempontból is jelentősek [8, 22], például $\text{ad}(t, n){}_2^4\text{He}$ reakció teljesítménysűrűségére ebben az esetben 5570 Wcm^{-3} adódott.

Rezgések hatása a tiltott magreakciókra

Rezgő, Z töltésszámú szilárd testtel kölcsönhatásba kerülő z_s töltésszámú töltött részre az alábbi

$$H_I(\mathbf{r}_s, t) = \frac{2\pi}{v_c} Z z_s e^2 u_0 F(\mathbf{r}_s, t) \quad (7)$$

alakú új, az u_0 amplitúdójú klasszikus rezgés fellépte esetén „bekapcsolt” perturbáció hat, amely tiltott magreakciók esetén – a szabad ionos környezet által okozott módosításhoz hasonlóan – drasztikusan képes megnövelni a hozamot meghatározó $v_{23}^{(2)} \sigma_{23}^{(2)}$ mennyiséget. Itt v_c az elemi cella térfogata, e az elemi töltés, \mathbf{r}_s a töltött rész koordinátája és t az idő. $F(\mathbf{r}_s, t)$ -t a kristályos szilárdtest és a rezgés (fononmódus) para-

métere határozzák meg [25]. [(7)-et az elektromágneses (lézer) tér esetén jól ismert tétel [23, 24] fonotérre adaptált alkalmazásával kaphatjuk [25].]

Kiderült, hogy a PdD_{ξ} (deuterizált palládium, $\xi = n_d/n_{Pd}$, ahol n_d és n_{Pd} a d és Pd számsűrűségek) rendszerekben, főként elektrolízises LENR kísérletekben, $\xi > 0,63$ esetén tapasztalt nukleáris eredetű teljesítményt okozhatják rezgések [25]. Ráadásul a környezetben véletlenszerűen megjelenő rezgések okozhatják a rejtélyes, hol-van-hol-nincs jelenséget.

A tiltott magreakciók asztrofizikai vonzata

Földi körülmények között az $n_1 n_2 n_3$ szorzattal a 10^{61} cm^{-9} -es nagyságrendet meghaladni nagy kihívás. Asztrofizikai körülmények között (csillagokban, illetve az Univerzum fejlődésének bizonyos szakaszaiban) azonban ezen nagyságrend elérése és meghaladása könnyen megtörténhet. Tehát a (4) és (5) reakciókban résztvevő, abban keletkező, illetve eltűnő magok keletkezési és eltűnési hozamait be kell írni az elemek előfordulási gyakoriságát [26] meghatározó differenciálegyenletek hálózatába [27].

A magreakciók hatáskeresztmetszetének (1) energiafüggése miatt az Univerzum átlaghőmérsékletének egy viszonylag szűk tartományában – ami egyúttal egy viszonylag szűk időintervallumnak felel meg – zajlanak le azok a magreakciók, amelyek a 7Li -nál nem nehezebb magokat, illetve 7Li -ot keltenek [28]. A szűk intervallum oka: ha a hőmérséklet túl nagy, akkor a magokat a fotonok szétbontják, ha meg túl kicsi, akkor nincs meg a magreakciókhoz szükséges kinetikus energia. Az, hogy ekkor csak 7Li , illetve 7Li -nál nem nehezebb magok alakulhatnak ki ma általánosan elfogadott álláspont [28, 29].

Ionos környezetben végbemenő tiltott magreakciók esetén a hozam szempontjából lényeges $v_{23} \sigma_{23}^{(2)} = n_1 z_1^2 K$, vagyis $v_{23} \sigma_{23}^{(2)}$ energiafüggetlen és z_1 töltésszámú környezet esetén ennek n_1 részecskeszámsűrűségével arányos. Tehát a hozamra a környezet hőmérséklete nincs hatással. Az ionos környezetnek a (4), (5) és a $p(p, e^+v)d$ reakciók hozamaira gyakorolt hatása jelentős lehet [30], ezért nem hagyható figyelmen kívül az Univerzum kialakulásának leírásakor, illetve a csillagfejlődést leíró modellekben. Mivel ezek a reakciók az átlaghőmérséklettől és a deuteronkoncentrációtól függetlenül teszik lehetővé a nehezebb elemek keletkezését, erősen valószínűsíthető, hogy a fentiek figyelembe vételével válaszolni lehet olyan asztrofizikai problémákra is, mint amilyent például a Big Bang után szinte azonnal keletkező csillag felfedezése vet fel [31].

Konklúzió

Amennyiben a fentiek helytállóak, úgy ezekből azt a következtetést kell levonni, hogy a perturbációs számítás magasabb rendjével leírható folyamatokat nagyobb gondossággal kell kezelni. Ez a gondolat kap-

csolja össze az anomális párkeltést az alacsonyenergiás magreakciókkal (LENR, régebben „hidegfúzió”). Tehát a magfizika különböző, látszólag egymástól független területein fellépő rendhagyó jelenségeket magyaráztunk a perturbációs számítás első rendjénél magasabb rendben kezelhető folyamatok segítségével úgy, hogy a kvantummechanika és a magfizika hagyományos eszközrendszerét használtuk. Fontos eredmény, hogy – az általánosan elfogadott nézettől eltérően, miszerint nehéz, töltött részek hatáskeresztmetszetét alacsony energián (1) segítségével kell meghatározni – a környezet képes módosítani (1)-et, ami alacsony energián a magreakciók hozamának igen jelentős növekedését eredményezheti. Az is kiderült, hogy az itt tárgyalt problémáknak van közös gyökere. Végül, ha az itt felvetett kérdésekre adott válaszok helyesek, akkor ez igen sok élvonalbeli, nagy volumenű kutatást érint.

Irodalom

1. H. A. Bethe, R. F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* 8 (1936) 82.
2. H. A. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9 (1937) 69.
3. M. S. Livingston, H. A. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9 (1937) 245
4. H. A. Bethe, *Phys. Rev.* 55 (1939) 434.
5. C. Angulo et al., *Nucl. Phys. A* 656 (1999) 3.
6. M. Fleischmann, S. Pons, *J. Electroanal. Chem.* 261 (1989) 301.
7. P. Kálmán, T. Keszthelyi, *Fizikai Szemle* 69 (2019) 388.
8. P. Kálmán, T. Keszthelyi, *Phys. Rev. C* 99 (2019) 054620.
9. A. J. Krasznahorkay et al., *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 042501.
10. A. J. Krasznahorkay et al., arXiv: 1910.10459.
11. A. J. Krasznahorkay et al., *Acta Physica Polonica B* 50 (2019) 675–684.
12. P. Kálmán, T. Keszthelyi – *Eur. Phys. J. A* 56 (2020) 205.
13. W. Greiner (editor): *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*. NATO Advanced Study Institutes Series, Vol. 80, Springer Science+Business Media, New York, 1983
14. J. Schweppe et al., *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 2261.
15. M. Clemente, E. Berdermann, P. Kienle, H. Tsertos, W. Wagner, C. Kozhuharov, F. Bosch, W. Koenig, *Phys. Lett. B* 137 (1984) 41.
16. T. Cowan et al., *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 1761.
17. T. Cowan et al., *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 444.
18. D. R. Tilley, J. H. Kelley, J. L. Godwin, D. J. Millener, J. E. Purcell, C. G. Sheu, H. R. Weller, *Nucl. Phys. A* 745 (2004) 155.
19. A. I. Akhiezer, V. B. Berestetskii: *Quantum Electrodynamics*. Interscience Publishers–Wiley, New York, 1965.
20. J. S. Greenberg, [13], 853 (ezen belül 871.)
21. R. B. Firestone, V. S. Shirley: *Tables of Isotopes*. 8th ed., Wiley, New York, 1996.
22. P. Kálmán, T. Keszthelyi, arXiv 1907.05211v2
23. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg: *Atom-Photon Interactions – Basic Processes and Applications*. Wiley–VCH, Weinheim, 2004, Ch. VI., exercise 17., p. 597.
24. P. Kálmán, T. Bükki: *Bevezetés a modern optikába*. Szerk.: P. Richter, V. kötet, Műegyetemi kiadó, Budapest, 2000, 12, 44.
25. P. Kálmán, T. Keszthelyi, ResearchGate, 2021, https://www.researchgate.net/publication/348382556_Nuclear_reactions_in_coherent_phonon_fields
26. K. Lidders, *Astrophys. J.* 591 (2003) 1220.
27. C. Iliadis: *Nuclear Physics of Stars*. Wiley–VCH, Weinheim, 2015, p. 146, (3.26).
28. S. Burles, K. M. Nollett, M. S. Turner, *Astrophys. J.* 552 (2001) L1.
29. V. Mossa et al. *Nature* 587 (2020) 210.
30. P. Kálmán, T. Keszthelyi, ResearchGate, 2020, https://www.researchgate.net/publication/344679769_Forbidden_nuclear_reactions_in_astrophysics
31. H. E. Bond, E. P. Nelan, D. A. VandenBerg, G. H. Schaefer, D. Harmer, *Astrophys. J.* 765 (2013) L12.

MEGOLDOTTA-E A FIZIKA ZÉNÓN PARADOXONJAIT?

Bognár Gergely

Révai Mikós Gimnázium és Kollégium, Győr

Zénón paradoxonjai a filozófiatörténet legismertebb problémái közé tartoznak. Vannak, akik egy logikai fejtörőt látnak benne és vannak, akik szerint a fizika és a matematika régen megoldotta a problémákat, míg mások szerint a gondolatmenet nem több egy értelmetlen intellektuális játéknál. A következőkben áttekintjük, hogy a fizika több évszázadot átívelő története során miként próbálta kezelni az aporiákat (paradoxonokat), s meglátjuk, hogy van-e kielégítő magyarázat a mozgás problémájára.

A felezgetés és verseny a teknőssel

Az első két paradoxon az ismertebbek közé tartozik, és ez a két aporia nagyon hasonlít egymásra, ezért együtt tárgyaljuk őket. Az első *felezési paradoxon* néven vált ismertté. A lényege, hogy a kilőtt nyílveszítő soha nem ér célba, mert a céltábla eléréséhez először az út felét kell megtenni, majd a hátralévő út felét, majd az azt követő út felét és így tovább a végtelenségig. Bármilyen sok lépést is veszünk, a céltábla és a nyílveszítő közötti távolság soha nem lesz nulla, következésképpen a nyíl nem éri el a táblát [1]. A másik paradoxon *Akhilleusz és a teknősbéka* névre hallgat. Röviden megfogalmazva a leggyorsabb görög, Akhilleusz előnyt ad a leglassabb állatnak, a teknősnek, és soha nem fogja utolérni. Ahhoz, hogy utolérje és leghagyja, először oda kell érnie, ahonnan a teknős indult, a teknősnek adott előnyt kell megtennie, ez alatt a teknős egy kicsit előrébb megy, ezért még marad némi előnye. Következő lépésként szintén a kisebb előnyt kell leküzdenie Akhilleusznak, ami kisebb, mint az előbb volt, de nem nulla. Ha Akhilleusz ezt a távolságot is megtette, akkor a teknős ismét előrébb megy, s még mindig van előnye. A sort folytathatjuk a végtelenségig, de Akhilleusz és a teknős közötti távolság soha nem lesz nulla, a leggyorsabb görög nem éri utol a leglassabb állatot, és arról, hogy leghagyja, egyáltalán nem beszélhetünk [2].

A paradoxonok feloldásával először *Arisztotelész* próbálkozott meg. Arisztotelész szerint a tér végtelen részre osztható – ebben egyetért Zénóonnal –, de a

végtelen csak potenciálisan van jelen a tér egy szakaszában. Gondolatban valóban végtelen sok részre oszthatom a nyíl vagy az Akhilleusz előtti távolságot, megállíthatom a nyilat az út felénél, vagy Akhilleusz ott, ahol a teknős korábban tartózkodott, de ezzel nem csak az út válik végtelenné, hanem az idő is. Arisztotelész szerint a térben mindez potenciálisan, lehetőség szerint van jelen, a valóságban a testek nem állnak meg a mozgás egy-egy pillanatában, és ezzel nem bontják fel az előttük lévő távolságot végtelen részre. A tér csak lehetőség szerint végtelen, de a test mozgása közben aktuálisan nem az [3]. Arisztotelész felfogásában a mozgás átmenet az egyik állapotból a másikba, már nem a kiindulási helyzet és még nem a cél, hanem a kettő közötti folyamat [4].

A potenciálisan és aktuálisan végtelen bevezetésével megoldódni látszik a probléma. Valójában Arisztotelész elegánsan félretolja a mozgás és változás megértésének nehézségeit. A mozgás folyamat és nem állóképek sokaságának összege, de állóképek nélkül hogyan képzeljem el a mozgást? E kérdéssel a harmadik paradoxon külön foglalkozik. A mozgás megértéséhez a klasszikus fizika is állóképeket használ, és a zénóni problémákra a határérték-számítás segítségével igyekszik válaszolni.

Newton és *Leibniz* a klasszikus mechanika két nagy óriása kidolgozza a határérték-számítás elméletét. A precíz matematikai részleteket mellőzve, lényegét a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Végtelen szám összege nem feltétlenül lesz végtelen. Nézzünk egy példát, ha egy egységnyi szakaszt elfelezek, $1/2$ -et kapok, ha a maradék szakaszt elfelezem, $1/4$ -et, a következő lépésben $1/8$ -ot és így tovább a felezési paradoxonhoz hasonlóan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$$

Egyre több elemet összeadva közelítünk egy számhoz, amely szám az összeg véges elemével tetszőlegesen kicsiny távolságra megközelíthető, ezt a számot határértékként a sor összegének nevezzük.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \frac{1}{\infty} = 1.$$

Mindezzel orvosolható az első két aporia, és egy olyan fizikát alkothatunk, amely segítségével felhőkarcolókat építünk, és embert küldünk a Holdra. Valóban, a newtoni mechanika eredményei lenyűgözők, a két paradoxont mégsem oldják fel. A fenti határérték-elméletből látszik, hogy a problémát nem oldjuk meg, csupán eldugjuk egy matematikai definíció mögé. Nem állítjuk azt, hogy valóban végigmennénk végtelen sok elemen, csak kellően sok elem után nem foglalkozunk a kérdéssel, és kiteszük az egyenlőség-



Bognár Gergely 2006-ban végzett az ELTE TTK fizikatanári szakán, illetve 2008-ban a PPKE BTK filozófia szakán. Jelenleg a győri Révai Mikós Gimnázium és Kollégium fizika-filozófia szakos tanára. Érdeklődési területe a fizika és a filozófia határterületei, és a fizika tanításának módszertana, amelyekkel kapcsolatban több publikációja jelent meg.

jelet. A sor összege tetszőlegesen megközelíthető, de nem feltétlenül érhető el! Zénón paradoxonja továbbra is fennáll, bár az kétségtelen, hogy gyakorlati szempontból a mozgás egy nagyon jól használható leírásához jutunk.

Különös megvilágításba kerül az első két paradoxon, ha a kvantumfizika szemüvegén keresztül tekintünk rá. Az első és rögtön a legsúlyosabb probléma, hogy a kvantumfizikában nem értelmezhető a hagyományos mozgásfogalom, nem mondhatjuk azt, hogy egy test a hagyományos értelemben vett pályáján haladna végig. Az a változás, amellyel egy test egyik pontból a másikba kerül, például a kilőtt nyíl vagy Akhilleusz, a kvantumfizikában egy állapotfüggvényre jellemezhető. Az állapotfüggvényből csak valószínűségi következtetéseket vonhatunk le arra nézve, hogy a test éppen hol tart, és sebessége mekkora. Ebben a kontextusban nem értelmezhető a két paradoxon, hiszen a hagyományos mozgásfogalmunk megváltozik. Ha komolyan vesszük a kvantumfizikát, és e bekezdés sorai között mi mást tehetnénk, el kell fogadnunk, hogy az állapotfüggvény már a változás kezdetekor bizonyos valószínűséget rendel ahhoz, hogy a nyíl rögtön a céltáblában legyen, vagy Akhilleusz a teknős mellett álljon! Igaz, hogy e valószínűség a valóságban roppant csekély, de nem nulla.

A paradoxonokat a kvantumfizika szemüvegén keresztül vizsgálva beleütközünk egy test határának filozófiai kérdésébe is. Egy test határának nagyon pontos megadása nem lehetséges tetszőleges pontossággal. Ha a testek határa alatt szélső atomjaik külső elektronjait értjük, akkor hamar beláthatjuk, hogy nagyon kicsi távolságok esetén értelmetlenné válik a test határáról beszélni. Mindebből az is következik, hogy tetszőleges pontossággal nem tudhatjuk, hogy mikor éri el a nyíl a céltáblát, vagy Akhilleusz mikor éri utol a teknőst.

A kvantumfizika talaján maradvá nemcsak a testek közötti távolságokat kell más szemszögből nézni, hanem a teret is. Jelenlegi tudásunk szerint a tér nem bontható végtelenül parányi pontokra. Van egy nagyon kicsi távolság, a Planck-hosszúság, amelynél kisebb egységekre nem osztható fel. Ha a teret nem bonthatjuk végtelenül kicsi pontokra, az első két paradoxont megoldhatnánk. Az előző bekezdésben leírtak és a következő sorokban bemutatott harmadik paradoxon miatt mégsem beszélhetünk a kvantumfizika teljes győzelméről az aporiák felett.

Hol van, a repülő nyíl?

Zénón harmadik és negyedik mozgásellenes paradoxonja kevésbé ismert, mint az első kettő, sokan első ránézésre félresöprik, pedig legalább olyan súlyos problémákat hordoznak, mint a már említettek. Sorban haladva nézzük a harmadikat, amely a *repülő nyíl* névre hallgat. Ha egy test egy adott helyen van, például a két végpontja között, akkor nem mozoghat! Minden test, mindig a két végpontja között van, következé-

képpen nincs mozgás [5]. Az aporia feloldása első látásra egyszerűnek tűnik. Gondolatban egy pillanatra állítsuk meg a repülő nyilat, és már tudjuk is, hogy hol van. A probléma az, hogy ilyenkor egy álló nyilat képezek el és nem egy mozgót. Mozdulás közben nem tudom, hol van a nyíl, csak ha képzeletben megállítom, de ez nem egy mozgó nyíl lesz, hanem egy álló.

A repülő nyíl paradoxonjának megoldásával Arisztotelész is próbálkozott. Az első két aporia kapcsán említettük, hogy Arisztotelész felfogásában a tér és az idő kiterjedés nélküli pontok összességéből áll össze. Ha az idő végtelenül kicsiny elemekből, pillanatok sokaságából épül fel, akkor azokhoz végtelenül kicsi pontok tartoznak a repülő nyíl pályája során. Két pont között pedig értelmezhetem a nyíl hosszát, pontosan meg tudom mondani, hogy hol van a test, egy adott pillanatban. Arisztotelész gondolatmenete több sebből vérzik. Először is milyen alapon tételezzük fel, hogy a tér és az idő kiterjedés nélküli pontokból és pillanatokból áll. Például a modern fizikában megjelenő Planck-féle idő és hosszúság ezzel pontosan ellentétet állít, persze Arisztotelész erről mit sem sejtett. Az a kritika viszont Arisztotelész szemére vethető, hogy a mozgás azon felfogása, amely szerint a test pontok végtelen sorozatán keresztül jut el a célra, az első két aporiához vezet vissza bennünket. Másfelől a kiterjedés nélküli pillanat egy elméleti hipotézis, amelyet a gyakorlatban képtelenség megvalósítani. Egy adott pillanatban nem tudom a testem helyét megmondani, legfeljebb egy nagyon kicsi időintervallumban, és ez egy bizonytalan tartományt eredményez a térben is.

Ha a repülő nyíl problémáját a kvantumfizika szemszögén keresztül vizsgáljuk, olyan érzésünk van, mintha Zénón megsejtett volna valamit a közel két és félezer évvel későbbi felfedezésekből. Ma már tudjuk, hogy egy test helye és impulzusa egymástól nem független mennyiségek, a kettőt egyszerre nem ismerhetjük tetszőleges pontossággal. Ha azt mondom, hogy a repülő nyíl pontosan a két végpontja között van, akkor a mozgásáról nem mondhatok semmit. Ha a sebességét ismerem pontosan, akkor nem tudom, hogy hol van. Ha Zénón most közöttünk lehetne, nem mondana mást, mint azt, hogy a határozatlansági reláció nem más, mint a kilőtt nyíl paradoxonjának egy 21. századi változata. Persze nem szeretném azt a látszatot kelteni, mintha a kvantumfizika ellentmondásokkal terhes elmélet lenne, mert ez nem igaz. A kvantumfizika leírásában nem létezik hagyományos értelemben vett mozgás, erre fent röviden kitértem.

Ha félretesszük a kvantumfizika hagyományos mozgásfogalmával kapcsolatos kérdőjeleket, és a modern fizika másik nagy ága a relativitáselmélet tükrében is megvizsgáljuk a problémát, ismét úgy érezzük, hogy Zénón megsejtett valamit a 20. század felfedezéseiből. A relativitáselmélet nagyon érdekes következménye a hosszúságkontrakció. Nyugvó rendszerből nézve egy mozgó test mozgásirányú távolságai megrövidülnek. Egy mozgó test mozgásirányú mérete relatív, függ attól, hogy milyen koordináta-rendszer-

ből nézzük. Ha egy test helye maga a mérete, mint Zénón mondja, a nyíl mindig a két végpontja között van, akkor a nyíl helye függ attól, hogy milyen koordináta-rendszerben nézem. Maga a nyíl helye és mérete relatív, ettől persze még célba érhet, ugyanakkor a távolságot, mint abszolút fogalmat kénytelenek vagyunk feladni.

Ki a gyorsabb?

Zénón utolsó ismert mozgásellenes paradoxonját sokan hibásnak tartják, pedig mélyebb gondolkodás után egyáltalán nem az. A negyedik aporia *stadion vagy mozgó sorok* néven vált ismertté a kultúrtörténetben. Egy stadionban négy katona áll, őket jelöljük „AAAA”-val. Balról négy katona közelít „BBBB” jobbról szintén négy katona az előzővel megegyező csak ellentétes irányú sebességgel „CCCC” a jelöléseket követve:

AAAA
BBBB→
←CCCC

Kis idő elteltével a következő helyzet alakul ki:

AAAA
BBBB→
←CCCC

A következő pillanatokban az első „B” katona kettő „A” mellett halad el, míg az első „C” katona négy „B” mellett.

AAAA
BBBB→
←CCCC

A „B” és a „C” katonák sebessége azonos, mégis ugyanannyi idő alatt egyikőjük négy, míg másikuk kettő katona mellett halad el [6]. Azonos sebességgel, megegyező idő alatt miként tehetnek meg különböző utat?

A megoldás első ránézésre egyszerűnek tűnik. Az álló katonákhoz képest a sebességük azonos, de az egymással szemben haladó katonák egymáshoz viszonyított sebessége összeadódik. A sebesség relatív fogalom, függ attól, hogy mihez képest mérjük. Mindehhez persze szükség van *Galilei* relativitási elvére, ami azt mondja ki, hogy az egyenletes sebességgel mozgó rendszerek és a nyugalomban lévő rendszerek között nem tudunk különbséget tenni. Magyarra lefordítva, a mozgás relatív, és ezzel a probléma kezelhető. Ha a mozgások relativitásáról szóló elvet komolyan vesszük, azt, hogy nézőpontunktól függ, mi mozog és mi nem, egészen hasonló gondolatra jutunk, mint Zénón. Nincs abszolút értelemben vett mozgás.

Minden csak viszonylagos, innen nézve nyugalomban van, onnan nézve mozog. Van-e valójában mozgás, ha az csak tőlünk, megfigyelőktől függ? A mozgást csak én, mint ember érzékelem, de a természet nagy egészében, a létezőben, megfigyelőtől függetlenül beszélhetünk-e mozgásról?

Az einsteini általános relativitáselmélet még egyet csavar a problémán. Az idő és hosszúság nem csak a megfigyelők sebességétől függ, hanem a körülöttük lévő testek tömegétől is. Minden tömeggel rendelkező test meggörbíti maga körül a téridőt, igaz a görbület csak extrém nehéz testek közelében bír gyakorlati jelentőséggel, az elméleti leírásoknál mégsem hagyhatjuk figyelmen kívül. A környezetunktől, sőt még saját tömegunktől is függ, hogy a repülő nyíl mikor ér célba, vagy Akhilleusz mikor éri utol a teknőst.

A mozgás és mindennemű változás megfigyelőtől független folyamata végérvényesen szertefoszlik, ha a kvantumfizikai méréselmélet ontológiai jelentőségét végiggondoljuk. Maga a változás csak a megfigyelés hatására megy végbe, a megfigyelés előtt a rendszer egyszerre több állapotban is tartózkodhat. A paradoxonokra alkalmazva, amíg nem látjuk Akhilleuszt és a teknőst, mindkettőjük egyszerre van elől és hátul, a mi megfigyelésünk következtében valósul meg valamelyik állapot. Megfigyelés előtt nem mondhatunk semmit, és a lehetséges kimenetelekről csak valószínűségi kijelentéseket tehetünk.

Válasz a címben feltett kérdésre

Ha arra a kérdésre keressük a választ, hogy a fizika megoldotta-e Zénón paradoxonjait, nem válaszolhatunk egyszerű igennel vagy nemmel. A klasszikus Newton-féle mechanika a mozgás olyan elméletét dolgozta ki, amely belső szerkezetét tekintve ellentmondásmentes úgy, hogy az aporiák felvetéseit matematikai definíciók mögé bújtatja. Mindezt rendkívül hálásak lehetünk a mechanika megalkotóinak, mert a mozgás olyan leírását adták, amelynek gyakorlati jelentősége mélyen átszövi modern, technikai társadalmunkat. A kvantumfizika olyan világot tár elénk, amelyben a mozgás hagyományos fogalma értelmezhetetlen. A fizika ezen új ágában nem a zénóni paradoxonok felé kell fordulnunk, hanem megérteni azt az új szemléletet, amelyet elénk tár, és megválaszolni az ott felmerülő esetleges aporiákat. Végül a relativitáselmélet rávilágít a megfigyelő fontosságára, arra a régi görög bölcsességre, hogy minden dolog mértéke az ember, a fizika nyelvén kifejezve a megfigyelő.

Irodalom

1. Kirk, G. S., Raven, J. E., Schofield, M.: *A preszókratikus filozófusok*. Atlantisz, Budapest (2002) 394–397.
2. Uo. 397–399.
3. Arisztotelész: *Physica*. 233a13–233b32, L'Harmattan, Budapest (2010) 110–112.
4. Uo. 224a21–225b5 91–93.
5. Kirk, G. S., Raven, J. E., Schofield, M., 397–399.
6. Uo. 399–402.

A GREEN-FÉLE RECIPROCITÁSI TÉTEL ÉS NÉHÁNY FOLYOMÁNYA – 1. RÉSZ

Pálfalvi László, Kovács Vivien
Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet

Cikkünkben az elektrosztatika szakirodalmában csak érintőlegesen megjelenő Green-féle reciprocitási tétellel¹ foglalkozunk. A mély fizikai tartalmat hordozó, szemléletes jelentéssel bíró tétel egyrészt az elektrosztatikus tér néhány olyan érdekes tulajdonságára ad magyarázatot, amit más módszerekkel meglehetősen nehéz magyarázni, másrészt problémák megoldása során is hasznos eszköz.

Az alábbiakban a tétel kimondása és fizikai értelmezése után annak alkalmazását mutatjuk be egy átlagolási problémán keresztül, amelynek a Green-féle reciprocitási tételen keresztül történő megközelítésére tudomásunk szerint nem volt példa semmilyen szakirodalomban.

Reményeink szerint a gondolatmenet lényege intuitív módon, felsőbb matematikai ismeretek (gömbi koordináta-rendszer használatában való jártasság, kifejtési tételek használata, Dirac-delta függvény ismerete) nélkül is elmagyarázható és megérthető. A teljesség kedvéért azonban apró betűvel szedve bizonyos egzakt levezetéseket is megadunk.

A tétel a következőt állítja: ha egy $\rho(\mathbf{r})$ töltéssűrűséggel leírható töltéseloszlás $\varphi(\mathbf{r})$ potenciált kelt, egy *tőle független*, $\rho^*(\mathbf{r})$ töltéssűrűséggel jellemezhető töltéseloszlás pedig $\varphi^*(\mathbf{r})$ -t, akkor teljesülnie kell a

$$\int \varphi(\mathbf{r}) \rho^*(\mathbf{r}) d^3r = \int \varphi^*(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (1)$$

összefüggésnek, ahol az integrálás a teljes térre terjed ki [2].

Néhány szakirodalom a tételt olyan esetre értelmezi amikor a potenciált folytonos (elkent) térfogati töltéssűrűség, illetve felületi töltéssűrűség együttesen hozzák létre [1, 3]. Ekkor az (1) egyenlet mindkét oldala két tagból áll. Ez esetben a bizonyítás a Poisson-egyenlet és a Green-tétel felhasználásával történik [1].

A szerzők köszönetet mondanak *Vígb Máténak* a kézirat gondos átolvasásáért, hasznos észrevételeiért, továbbá *Mechler Mátásnak* a szerkesztés során nyújtott segítségéért.

¹Az [1] hivatkozás 2.23 feladatában Gauss reciprocitási tétel néven említik.



Pálfalvi László az MTA doktora, a Pécsi Tudományegyetem Kísérleti Fizika Tanszékének tanszékvezető egyetemi tanára. Legjelentősebb tudományos eredményei a nagyenergiájú távoli infravörös (THz-es) impulzusforrások elvi fejlesztéséhez, illetve a THz-es impulzusokkal történő részecskegyorsítási módszerek kidolgozásához kapcsolódnak. Rendszeresen ír tudományos ismeretterjesztő cikkeket is.

Mindazonáltal, ha a konkrét töltéseloszlás a folytonos (elkent) térfogati töltéssűrűség mellett pontszerű, és felületi töltéseket is tartalmaz, használhatjuk az (1) egyenletet, amennyiben a pontszerű és a felületi töltéseket is beleértjük a térfogati töltéssűrűségbe a Dirac-delta függvény használatával, ahogy jelen cikk egyes további apróbetűs részeiben azt tesszük. Az intuitív magyarázatok során viszont kerülni fogjuk a Dirac-delta explicit használatát, noha az érvelés mögött hallgatólagosan annak tulajdonságai állnak.

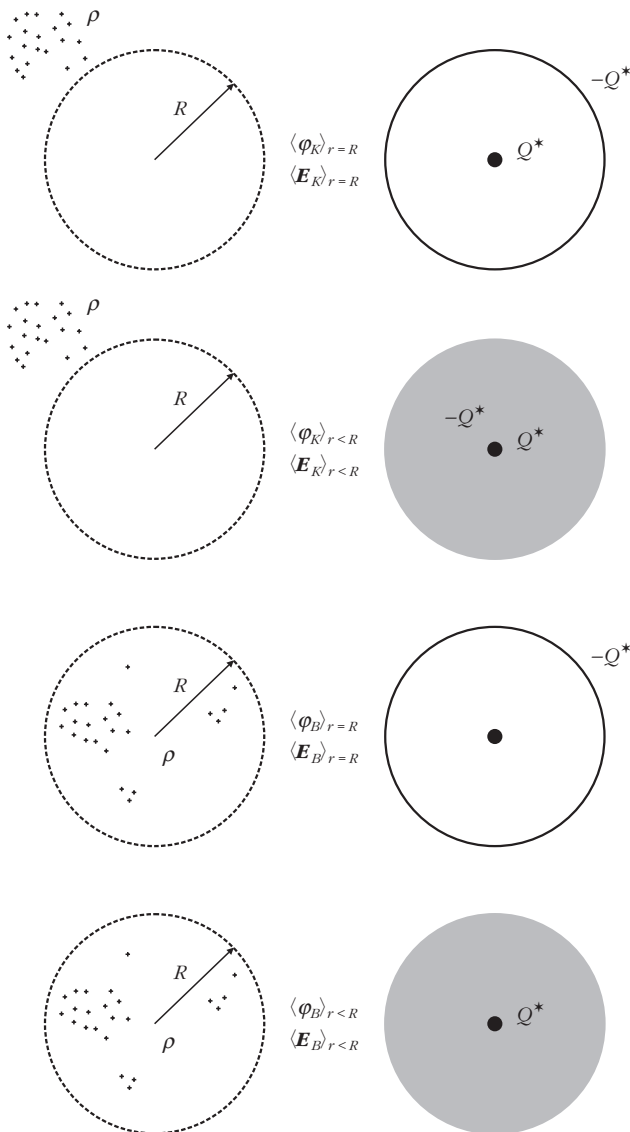
A tétel másik bizonyításának alapja az elektrosztatikai peremérték-problémák során használatos, Green-függvényre épülő potenciálképlettel való kapcsolat megmutatása [2]. A Green-féle reciprocitási tétel leg-egyszerűbben interpretálható fizikai tartalma az a tény, hogy a kezdetben egymástól végtelen távol szeparált $\rho(\mathbf{r})$ és $\rho^*(\mathbf{r})$ töltéseloszlások egyesítésekor az elektrosztatikus tér ellenében végzett munka független attól, hogy melyik töltésrendszert tekintjük nyugvónak és melyiket mozdítjuk el. Vegyük észre, hogy az (1)-ben a töltéssűrűség és a térfogatelem szorzata a térfogatelemben található dQ^* , illetve dQ töltésmennyiségeket adja. Így egyértelműen látszik, hogy a bal oldal a $\rho(\mathbf{r})$ töltésrendszer $\rho^*(\mathbf{r})$ -beli elektrosztatikus potenciális energiája a $\rho(\mathbf{r})$ -beli töltések által keltett térben, míg jobb oldala a $\rho(\mathbf{r})$ töltésrendszer $\rho^*(\mathbf{r})$ -beli elektrosztatikus potenciális energiája. A kettő értelemszerűen egyenlő kell legyen, ami pedig definit módon nem más, mint a töltésrendszerek egyesítésével járó munkavégzés.

Vizsgáljuk továbbra is a $\rho(\mathbf{r})$, $\rho^*(\mathbf{r})$ töltéseloszlásokból egyesített töltésrendszert. Jelölje $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ azt a térerősséget, amelyet a $\rho(\mathbf{r})$ -t alkotó töltések, $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$ pedig azt, amelyet a $\rho^*(\mathbf{r})$ -beliek keltenek az adott helyen. A hatás-ellenhatás törvénye értelmében a $\rho(\mathbf{r})$ töltésrendszer által a $\rho^*(\mathbf{r})$ -beli töltésekre kifejtett $\mathbf{F}_{\rho \rightarrow \rho^*}$, illetve a $\rho^*(\mathbf{r})$ töltésrendszer által a $\rho(\mathbf{r})$ -beli töltésekre kifejtett $\mathbf{F}_{\rho^* \rightarrow \rho}$ erők közt az $\mathbf{F}_{\rho \rightarrow \rho^*} = -\mathbf{F}_{\rho^* \rightarrow \rho}$ összefüggés kell fennálljon, azaz

$$\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rho^*(\mathbf{r}) d^3r = -\int \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (2)$$



Kovács Vivien jelenleg harmadéves fizikus-hallgató a Pécsi Tudományegyetemen. Egyik érdeklődési területe a terahertzes spektroszkópia, azon belül szilárd és folyadékminiták optikai tulajdonságainak vizsgálata időtartománybeli terahertzes spektrométerrel. Mindezek mellett számos klasszikus fizikai probléma is foglalkoztatja, mint például jelen cikk tárgya.



1. ábra. A kívánt átlagoláshoz tartozó segéd-töltés-eloszlás.

kell teljesülnön, ahol az integrálás a teljes térre terjed ki. Ezen összefüggés formailag hasonlít az (1)-re, azaz a különbséggel, hogy a potenciálok helyett térerősségeket tartalmaz, illetve a fizikai értelmezés energia helyett erővel történik. A (2) összefüggés külön nevet ugyan nem visel, de a cikk további részében gyakran fogunk hivatkozni rá.

Az (1) és a (2) tételek mélyebb megértéséhez és alkalmazásához egy korábban felvetett probléma [4] inspirált bennünket, nevezetesen az, hogy vajon milyen eredményre jutunk, ha tetszőleges elektrosztatikus térben egy képzeletbeli gömbfelületre kiátlagoljuk a *potenciált* vagy a *térerősséget*. A [4] cikk több gondolatmenet alapján is körbejárja a kérdéskört, és megadja a választ azon esetekre, amikor valamennyi töltés a képzeletbeli gömbön *belül*, illetve azon *kívül* helyezkedik el. Ez négy különböző esetet foglal magába, amelyeket az alábbiakban az (1) és a (2) összefüggések alapján fogunk tárgyalni, kiegészítve azzal a további négy esettel, ahol az átlagolás nem a gömb

felületére, hanem annak térfogatára történik. *Felületi*, illetve *térfogati* átlag alatt a

$$\langle \dots \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \dots da,$$

illetve

$$\langle \dots \rangle_{r<R} = \frac{1}{V_0} \int \dots d^3r$$

kifejezéseket értjük, ahol a pontok helyére tetszőleges skalár- vagy vektorfüggvényt képzelhetünk. R a gömb sugara, V_0 annak térfogata, r pedig a futópont és a gömb középpontjának távolsága az átlagolás során. A potenciálra és térerősségre vonatkozó átlagmenyiségeket a $\langle \varphi_K \rangle_{r=R}$, $\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r=R}$, $\langle \varphi_K \rangle_{r<R}$, $\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r<R}$, $\langle \varphi_B \rangle_{r=R}$, $\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r=R}$, $\langle \varphi_B \rangle_{r<R}$ és $\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r<R}$ szimbólumokkal jelöljük, ahol a K és B indexek arra utalnak, hogy a töltések a képzeletbeli gömbön *kívül* vagy azon *belül* helyezkednek el, a $\langle \dots \rangle$ -jel alsó indexében a reláció pedig azt hivatott mutatni, hogy az átlagolás az R sugarú gömb *felületére* ($r=R$) vagy annak *térfogatára* ($r<R$) történik.

Valamennyi esetben elsődleges és egyben kulcsfontosságú lépés, hogy megtaláljuk azt a megfelelő ρ^* segéd-töltés-eloszlást, amelyet az (1) vagy (2) összefüggésbe (attól függően, hogy a *potenciál* vagy a *térerősség* átlagára vagyunk kíváncsiak) beírva választ kapunk kérdéseinkre.

Azon felül, hogy a tételnek ezt az érdekes és fontos alkalmazását bemutassuk, célunk az is, hogy összefoglalást adjunk valamennyi esetről, ezért sorra vesszük őket mind. Az áttekinthetőség kedvéért az 1. ábrán illusztráljuk az adott ρ töltéseloszlás és a gömb kölcsönös helyzetét, illetve a ρ^* segéd-töltés-eloszlást. Az 1. táblázatban pedig összegyűjtjük a kapott átlagértékeket.

A gömb felszínére, illetve térfogatára történő átlagolás gömbön kívüli töltések esetén

- $\langle \varphi_K \rangle_{r=R}$: Segéd-töltés-eloszlásunk álljon egy a gömb középpontjába helyezett Q^* ponttöltésből, és a gömb felületén egyenletesen elosztott $-Q^*$ töltésből. Ez azért szerencsés választás, mert a gömbön kívüli térrészben (ahol a ρ töltéseink vannak) a segéd-töltésekhez tartozó potenciál zérus ($\varphi^*(r>R) = 0$), a gömbön belül (ahol φ^* zérustól különböző) viszont nincsenek töltéseink ($\rho(r<R) = 0$). Így az (1) egyenlet jobb oldalának zérusnak kell lennie. A ρ^* töltéssűrűség csak $r=0$ -ban és $r=R$ -ben különbözik zérustól, következésképp az (1) egyenlet bal oldalán az integrálási tartományt külön az origót, külön a gömbfelszín „éppen csak hogy” magába foglaló tartományokra bonthatjuk. A gömbfelszín magába foglaló tartományra vonatkozó térfogati integrál intuitíve a gömb felületére vonatkozó felületi integrálként is felfogható, amelyben a felületi töltéssűrűség konstans $-Q^*/(4\pi R^2)$, ami kiemelhető az integrál elé. Az origót magába foglaló kis tartományban pedig a potenciált

Az első oszlop a térerősség/potenciál felületi/térfogati átlagait tartalmazza külső/belső töltések esetén, a második oszlopban pedig a segédtöltés-sűrűség látható.

Keresett átlagmennyiség	Segédtöltés-sűrűség $\rho^*(\mathbf{r})$
$\langle \varphi_K \rangle_{r=R} = \varphi(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r-R)$
$\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r=R} = \mathbf{E}(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r-R)$
$\langle \varphi_K \rangle_{r<R} = \varphi(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r-R)]$
$\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r<R} = \mathbf{E}(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r-R)]$
$\langle \varphi_B \rangle_{r=R} = \frac{\sum Q}{4\pi \epsilon_0}$	$\frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r-R)$
$\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r=R} = 0$	$\frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r-R)$
$\langle \varphi_B \rangle_{r<R} = \frac{1}{6\epsilon_0 V_0} \int \rho(r, \theta, \phi) (3R^2 - r^2) d^3r$	$\frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r-R)]$
$\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r<R} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \langle \mathbf{P} \rangle$	$\frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r-R)]$

tekinthetjük $\varphi(0)$ konstans értékűnek, ami kiemelhető az integrál elé, a ponttöltés töltéssűrűségének integrálja pedig magát a töltést kell, hogy adja. Az (1) egyenletből tehát a következő adódik:

$$\begin{aligned} & \int \varphi(\mathbf{r}) \rho^*(\mathbf{r}) d^3r = \\ & = -\frac{Q^*}{4\pi R^2} \oint \varphi(\mathbf{r}) dA + \varphi(0) \int \rho^*(\mathbf{r}) d^3r = \quad (3) \\ & = -\frac{Q^*}{4\pi R^2} \oint \varphi(\mathbf{r}) dA + \varphi(0) Q^* = 0, \end{aligned}$$

ahonnan a potenciál felületi átlagára külső töltések esetén adódik:

$$\langle \varphi_K \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \varphi(\mathbf{r}) dA = \varphi(0). \quad (4)$$

A fenti hosszabb magyarázatokat elkerülhetjük, ha a ρ^* töltérendszer két Dirac-deltát tartalmazó függvény összegeként adjuk meg. Abban a gömbi koordinátarendszerben, amelynek középpontja egybeesik a gömb középpontjával, a töltéssűrűség a

$$\rho^*(\mathbf{r}) = \frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r-R) \quad (5)$$

függvénnyel adható meg, amelyben az első tag írja le a ponttöltést, a második pedig a felületit. Belátható, hogy az egyes tagok teljes térre vett integrálja az elvárásnak megfelelően Q^* -ot, illetve $-Q^*$ -ot

ad. Az (5) egyenletbeli töltéssűrűséget behelyettesítve az (1) összefüggésbe, amelynek jobb oldaláról már beláttuk, hogy zérus:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r-R) \right] \cdot \quad (6)$$

$$\cdot \varphi(r, \theta, \phi) r^2 d(\cos\theta) d\phi dr = 0.$$

Elvégezve az integrálásokat, kihasználva a Dirac-delta tulajdonságait és megtéve néhány egyszerűsítést

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(R, \theta, \phi) d(\cos\theta) d\phi = \varphi(0) \quad (7)$$

adódik, ahol a bal oldal nem más, mint $\langle \varphi_K \rangle_{r=R}$, azaz megkaptuk azt az eredményt, amihez intuitíve eljutottunk.

• $\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r=R}$: Segédtöltés-eloszlásnak válasszuk ugyanazt, mint $\langle \varphi_K \rangle_{r=R}$ meghatározása esetén, hiszen ez esetben a gömbön kívül a térerősség is zérus. A (2) összefüggés felhasználásával az

$$\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r=R} = \mathbf{E}(0) \quad (8)$$

eredményre jutunk.

• $\langle \varphi_K \rangle_{r<R}$: Segédtöltés-eloszlásunk álljon egy a gömb középpontjába helyezett Q^* ponttöltésből és a gömb térfogatában egyenletesen elosztott $-Q^*$ töltésből. Ekkor a gömbön kívül (ahol a töltéssűrűség zérustól különböző) a segédtöltések

hez tartozó potenciál zérus ($\varphi^*(r>R) = 0$), a gömbön belül (ahol φ^* zérustól különböző) viszont nincsenek töltéseink ($\rho(r<R) = 0$). Így az (1) egyenlet jobb oldalának zérusnak kell lennie. Az egyenlet bal oldala pedig két tagból fog állni: az egyenletes töltéssűrűséget, illetve a ponttöltést tartalmazóból, amely utóbbi a (3) összefüggés megfelelő tagjával azonos ugyanazzal az indokkal. A Green-féle reciprocitási tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned} & \int \varphi(\mathbf{r}) \rho^*(\mathbf{r}) d^3r = \\ & = -\frac{Q^*}{V_0} \int \varphi(\mathbf{r}) d^3r + \varphi(0) Q^* = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

amelyből

$$\langle \varphi_K \rangle_{r<R} = \frac{1}{V_0} \int \varphi(\mathbf{r}) d^3r = \varphi(0)$$

adódik a potenciál térfogati átlagára külső töltések esetén.

Természetesen a $\langle \varphi_K \rangle_{r=R}$ esetén használt, a kalkulusra jobban támaszkodó módszer is alkalmazható a

$$\rho^*(\mathbf{r}) = \frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r-R)] \quad (11)$$

töltéssűrűség figyelembevételével, ahol $H(r)$ a Heaviside-féle egységugrásfüggvény.

• $\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r < R}$: Segéd-töltés-eloszlásnak válasszuk ugyan- azt, mint $\langle \varphi_K \rangle_{r < R}$ meghatározása esetén, hiszen ez esetben a gömbön kívül a térerősség is zérus. A (2) összefüggés felhasználásával az

$$\langle \mathbf{E}_K \rangle_{r < R} = \mathbf{E}(0) \quad (12)$$

eredményre jutunk.

A gömb felszínére, illetve térfogatára történő átlagolás gömbön belüli töltések esetén

• $\langle \varphi_B \rangle_{r=R}$: Segéd-töltés-eloszlásunk álljon egy, a gömb felületén egyenletesen elosztott Q^* töltésből. Az (1) egyenlet bal oldala egy Q^* szorzó erejéig a potenciál felületi átlagát adja, teljesen hasonló okok miatt, mint azt például $\langle \varphi_K \rangle_{r=R}$ esetén láttuk. Az (1) összefüggés jobb oldala pedig

$$\begin{aligned} \int \varphi^*(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r &= \int \frac{Q^*}{4\pi \varepsilon_0 R} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \\ &= \frac{Q^*}{4\pi \varepsilon_0 R} \int \rho(\mathbf{r}) d^3r. \end{aligned} \quad (13)$$

Mindez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha valamennyi töltés a gömbön belül van a potenciál felületi átlaga

$$\langle \varphi_B \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 R} \int \rho(\mathbf{r}) d^3r = \frac{\sum Q}{4\pi \varepsilon_0 R}, \quad (14)$$

ami szemléletesen az a potenciál, ami akkor jönne létre a gömbfelületen, ha az eredő töltés ($\sum Q$) a gömb középpontjában lenne.

• $\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r=R}$: Segéd-töltés-eloszlásunk legyen egy, a gömb felületén egyenletesen elosztott Q^* töltés. A (2) egyenlet bal oldala egy Q^* szorzó erejéig a térerősség felületi átlagát adja korábbiakhoz hasonló megfontolások alapján. A bal oldal pedig zérus, mivel a gömbfelületen kívül ρ , azon belül pedig φ^* zérus. Így

$$\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r=R} = 0. \quad (15)$$

• $\langle \varphi_B \rangle_{r < R}$: Segéd-töltés-eloszlásunk legyen egy, a gömb térfogatában egyenletesen elosztott Q^* töltés. Ismeretes, hogy az ehhez tartozó potenciál

$$\varphi^* = \frac{\rho^*}{6 \varepsilon_0} (3R^2 - r^2).$$

Az (1) egyenletet felhasználva

$$\langle \varphi_B \rangle_{r < R} = \frac{1}{6 \varepsilon_0 V_0} \int (3R^2 - r^2) \rho(r, \theta, \phi) d^3r \quad (16)$$

adódik, amelynek második tagjában a másodrendű nyomaték a töltéseloszlás ismeretében határozható meg.

• $\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r < R}$: Segéd-töltés-eloszlásunk legyen egy, a gömb térfogatában egyenletesen elosztott Q^* töltés. A Gauss-tétel értelmében

$$\mathbf{E}^* = \frac{\rho^*}{3 \varepsilon_0} \mathbf{r}.$$

A (2) egyenlet alapján

$$\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rho^*(\mathbf{r}) d^3r = - \int \rho(\mathbf{r}) \frac{\rho^*}{3 \varepsilon_0} \mathbf{r} d^3r, \quad (17)$$

ahonnan

$$\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r = - \frac{1}{3 \varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3r = - \frac{\mathbf{P}}{3 \varepsilon_0}, \quad (18)$$

azaz a gömbön belüli töltések gömb középpontjára vonatkozó eredő dipólusnyomatékával arányos. A térfogati átlag pedig

$$\langle \mathbf{E}_B \rangle_{r < R} = \frac{1}{V_0} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r = - \frac{\langle \mathbf{P} \rangle}{3 \varepsilon_0}, \quad (19)$$

azaz az átlagos polarizációval arányos.



Fenti eredményeink kiemelt fontossággal bírnak a dielektromos közegek viselkedésének, tulajdonságainak leírásánál. A (19) összefüggésnek például a Clausius–Mosotti-egyenlet [3] kapcsán van kiemelt jelentősége.

Megjegyezzük, hogy a (18), valamint a (19) egyenlethez a [3] hivatkozásban jóval hosszadalmasabban jutottak el.

Konklúzió

Jelen cikkben bemutattuk, értelmeztük, és egy átlagolási problémán keresztül alkalmaztuk a Green-féle reciprocitási tételt. A tétel egyszerű eszköznek bizonyult az elektrosztatikus térben tetszőleges képzeletbeli gömbre történő átlagolás során. Meghatároztuk az elektromos *térerősség*, és a *potenciál felületi és térfogati* átlagát azon esetekben, amikor a teret keltő töltések a gömbön *kívül*, illetve azon *belül* helyezkednek el. Az átlagolás Green-féle reciprocitási tételen alapuló megközelítésére tudomásunk szerint a hazai és nemzetközi szakirodalomban ezidáig nincs példa. A cikk második részében további konkrét problémákat fogunk elemezni.

Irodalom

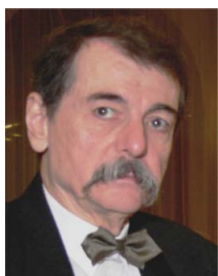
- Horváth Z., Tél T.: *Elméleti fizikai példatár*. Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest (2002).
- B. Y. Hu: Solving Boundary-value electrostatic problems using Green's reciprocity theorem. *Am. J. Phys.* 69 (2001) 1280–1282.
- J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*, második kiadás. TYPOTEX, Budapest (2004).
- Pozsgay B.: Az elektrosztatikus mező újabb érdekes tulajdonságai. *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 51 (2001) 555–559.

EGY KÉTTÁBLÁS SIÓFOKI NAPÓRA

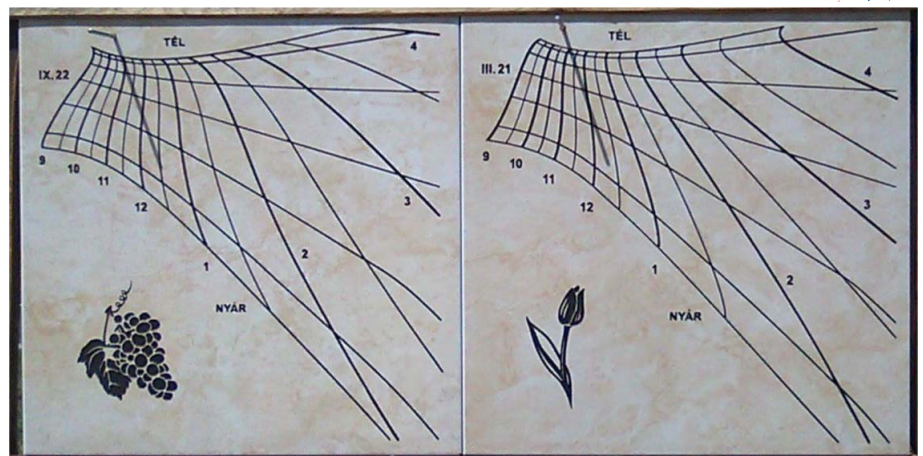
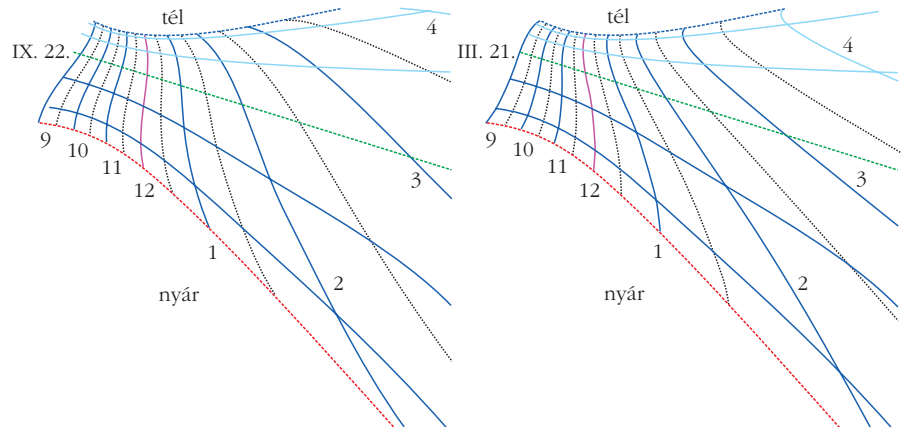
Molnár János Albert
mérnök, Siófok

A Siófokra tervezett napóra jellegét a hely sugallta alapötlet határozta meg. A Öreg Halász vendéglő kertjéből nézve az órát, a függőleges helyzetű, nagyjából délkelet felé forduló kerítés síkjában lévő skálavonalak olyanok legyenek, hogy az időegyenleg szerinti javítással együtt könnyen értelmezhető rajzolatuk látványos legyen, és egész évben pontosan mutassák az időt. Azaz a helyi időt mutató napóra a zónaközép szerinti időeltolódást és a valódi középideőt is vegye figyelembe, mintegy percnyi pontossággal. Ezért az időegyenleg nyolcas alakú éves lefutását két félévre kellett bontani. Az első félévben az egyik skálalapon kell leolvasni az árnyék helyzetét, a második félévben a másikon. Az egyszerűbb kivitelezés érdekében a Föld forgástengelyével párhuzamos árnyékvetőnek csak egy pontja működik: a skálára merőleges rudacska végpontjának árnyéka mutatja a zónaidőt és az állatövi jegyek szerint görbülő hónapvonalak mentén a dátumot is. A táblák közti váltásra az első félévi tábla tavaszi virága, a másodikra az őszi szőlőfürt utal.

A magyarországi mintegy 800 napóra közt egyelőre csak egy fali kétszálás óra van és igen kevés az olyan, amely a Föld változó keringési sebességét is figyelembe vevő korrekció révén a valódi, kiegyenlített középideőt mutatja. E siófoki napóra e ritka órák számát gyarapítja. A gondos kivitelezés a balatonszabadi *Tari József* kőszobrászmester szakértelmét dicséri.



Molnár János Albert a BME-n szerzett villamosmérnöki oklevelet, ismereteit később más területekkel bővítette. 1965-től 2000. évi nyugdíjazásáig az olajiparban dolgozott. 1970-től oktat egyetemeken előadóként, az UNIDO szervezésében és a Gábor Dénes Főiskolán. 1980-ban doktori dolgozatával társul az Országos Mérésügyi Hivatal Gázipari Hitelesítési Szabályzatainak elkészítéséhez. 450 oldalas könyve a napórák hagyományos és újdonság értékű szakismereteinek monográfiája.



1. ábra. Az I. félévi skálán decembertől júniusig az árnyék lefelé mozog. A II. félévi skálán júniustól decemberig az árnyék felfelé mászik. A képen az árnyékvető pálcza végpontjának árnyéka a feliratozott 12 órás vonal és tőle jobbra lefelé kanyargó, de nem jelölt 12.30 vonala között van. A vonalak és az árnyékpont egymás közötti vízszintes távolságának arányából becsülhető, hogy a kép készítésekor az idő 12 óra 21 perc volt. Az árnyékpont feletti és alatti, vízszintes vonalszakaszok távolságának arányából a „pontos” dátumra következtethetünk. Az árnyékpont feletti vízszintes április 21-ét jelöli, az alsó május 21-ét, a kettő közötti különbség alapján a kép körülbelül május 10-én készülhetett.

2. ábra. Molnár János siófoki mólón elhelyezett napóráját 2014. évi 1. számunkban mutattuk be, a város könyvtárának falára készített napórájának árnyékvetője pedig maga az épület.



A BOLYGÓK KÖRÜLI HOLDAK SZÁMÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL

Simon Tamás

Budapesti Német Iskola

Dálya Gergely, Hömöstre Mihály

Eötvös Loránd Tudományegyetem TTK

Cikkünk egy, a bolygók körül keringő holdak számát megadó lehetséges becslést mutat be. Ehhez a vizsgált bolygók néhány paraméterét kell használnunk, éppen annyit, hogy bizonyos exobolygókra is megfelelő közelítést tudjunk adni. A legfontosabb paraméter minden esetben a csillag és a bolygó tömegének aránya és a két égitest közötti átlagos távolság (illetve a bolygó pályájának fél nagytengelye). Az itt bemutatott modell kiindulási pontja mindig a bolygó körüli anyag tömege, majd a holdak tömeg szerinti eloszlása. Megmutatjuk, hogy a holdpályák eloszlásának köze van a bolygó tengely körüli forgásának periódusához, továbbá, hogy néhány exohold megfigyelésével még több paramétert nyerhetünk az exoholdak, illetve maga az exobolygó lakhatóságáról.

Bevezetés

2018. évi bejelentés szerint [1] megtalálták az első exoholdat, ám később kiderült, hogy az észlelt jelenséget valószínűleg nem egy hold okozta. Mivel tehát még nem ismerünk egyetlen exoholdat sem, érdekes-

nek tűnik az ötlet, hogy ezt a keresési folyamatot miként lehetne gyorsítani. Gondoljunk bele, hogy míg a 90-es években alig ismertünk exobolygókat, addig 2020-ban már több mint 4000-et tartunk számon. Valószínűleg hasonló lehet a helyzet az exoholdakkal, csak méretük miatt a folyamat később indul el. Ezt a folyamatot azonban egy megfelelő „szűrővel” (amely kiszűri a holdak gazdabolygóit) felgyorsíthatjuk, majd az első néhány exohold felfedezése után még könnyebb lesz újakat találni.

Elmélet

Holdak

A holdak számának meghatározásánál az első lépés, hogy definiáljuk a hold fogalmát. A holdak olyan égitestek, amelyek egy bolygó körül keringenek. A cikkben csak a szabályos holdakkal foglalkozunk, amelyek a bolygóval együtt keletkeztek, és majdnem kör alakú pályájuk egy síkban helyezkedik el a többi holdéval. Emiatt a Föld és a Mars holdjai nem tekinthetők szabályos holdaknak, mert a Mars holdjai befogott aszteroidák, a Föld holdja pedig egészen érdekes módon keletkezett [2], ami semmiképpen sem az általános keletkezési mód. Modellünk szempontjából fontos megemlíteni, hogy a holdak számát csak egy bizonyos tömegérték fölött határozhatjuk meg, tehát definiálnunk kell egy olyan tömegértéket, amely alatt egy égitestet nem nevezünk holdnak. Ez azért fontos, mert ahogy egyre kisebb holdakat tekintünk, annál többet találunk belőlük, és nem akarunk több millió, néhány kilogrammos követ holdakként feljegyezni. Ezt a határt lehet variálni, de nem érdemes túl magasra állítani, mert akkor



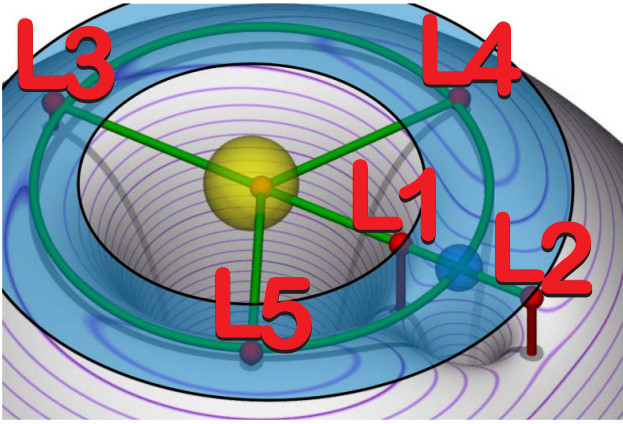
Simon Tamás 2013 óta a Budapesti Német Iskola tanulója. 2019-ben az ELTE TTK kari TDK-n 2. díjat kapott, 2020-ban a „Jugend forscht!” Düsseldorfban rendezett kutatási versenyen 1. díjas lett, a 2020. évi GeCAA nemzetközi csillagászati versenyen bronzérmet szerzett.



Dálya Gergely az ELTE asztrofizikus doktorandusza. A gravitációs hullámokat elsőként észlelő LIGO kollaboráció tagjaként a gravitációs hullámok forráslokálizációjával és azok kozmológiai alkalmazásaival foglalkozik. Emellett 2014 óta a Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia magyar csapatának felkészítő tanáraként is dolgozik.



Hömöstre Mihály 2006-ban végzett az ELTE fizikatanári szakán. 2014 óta a magyar IYPT csapat felkészítő csapatának tagja, 2016 óta az ELTE Anyagfizikai Tanszéken tanít szakdidaktikai tantárgyakat, 2018 óta a Budapesti Német Iskola fizikatanára. MOL Mester-M (2010) és Ericsson-díj (2020) birtokosa.



1. ábra. A Lagrange-pontok által közrefogott terület, ahol a bolygó „porszívózik” [5].

kevés holdra tesztelhetjük az elméletet, viszont túl alacsonyra sem érdemes, mivel rengeteg kis tömegű felfedezetlen hold van a Naprendszerben, és így nem kapnánk pontos eredményeket.

Így a minimális tömeget a következő értéknek választottuk:

$$m_{\min} = 10^{13} \text{ kg.} \quad (1)$$

Ez a tömeg nagyjából akkora, mint a Szaturnusz Methone nevű holdjéé, ami a legkisebb pontosan ismert tömegű hold a Szaturnusz körül, és a Jupiter körül is hasonló a határ.

A modell alapjai

Most, hogy definiáltuk a holdak fogalmát, következő lépésként hasznos lenne a bolygó körül keringő anyagmennyiség tömegéből kiindulni, mivel a természetes holdak ebből alakultak ki.¹ Ahhoz, hogy megkapjuk, hogy egy csillagrendszerben mekkora az anyag tömegsűrűsége a csillagrendszer egy bizonyos pontján, a csillag keletkezését kell vizsgálni. Ezt a folyamatot a Nice-modell [3] írja le, miszerint a Naprendszer (és más csillagok bolygórendszerei) egy forgó gázkorongból alakultak ki, amiben nagyobb kődarabok „gravitációs porszívóként” működtek, és így a pályájukat kitakarították, amiből kialakultak a bolygók. Azonban nem az összes „felporszívózott anyag” lett a bolygó része, az anyagnak egy kis hányada pályára állt, és ezekből alakultak ki a holdak. Feladatunk tehát az, hogy összeszámoljuk, mennyi anyagról van szó. Ehhez használnunk kell a gázkorong felületi sűrűségét. Ez azért hasznos, mert így nem kell a forgó gázkorongnak a korong síkjára merőleges struktúrájával foglalkoznunk, hanem elég csak síkban gondolkodni. Erre a felületi sűrűsége felírhatunk egy egyszerű relációt a távolság szerint [4]:

$$\sigma(r) \sim r^{-\frac{3}{2}}, \quad (2)$$

¹Léteznek olyan holdak is, amelyek nem természetesek, tulajdonképpen „befogott” aszteroidák. Az ilyen holdakat ebben a cikkben nem tárgyaljuk.

ahol σ a felületi sűrűség, és r a csillagtól vett távolság. A számolások során használandó A felület az a körgyűrűfelület, amit a két Lagrange-pont (L_1 és L_2) fog közre egy keringési periódus alatt. A Lagrange-pontok távolsága pontosan megegyezik az úgynevezett Hill-szféra sugarával. Ez az a (nagyjából gömb alakú) terület egy bolygó körül, ahol a bolygó gravitációsan dominál, ezen kívül viszont a csillag dominánsabb. Az L_1 és L_2 Lagrange-pontok is éppen a Hill-szféra sugaránál helyezkednek el körpálya esetén, ami logikus, hiszen itt egyenlítődnek ki a csillagtól és a bolygótól származó gravitációs erők. Ez a terület azért lesz fontos nekünk, mert holdak csak itt alakulhatnak ki. Azért lehet ezt a területet használnunk, mert az ebben a bizonyos (korongként közelíthető) hengerben keringő anyag, egyszer biztosan érinti a Lagrange-pontok által közrefogott területet (1. ábra). (Egy egységnyi fél nagytengelyű objektum különböző inklinációkra valójában nem egy lapos henger alakú „területet”, hanem egy gömböt ad, de kis inklinációkra ezt egy kellően lapos hengernek tekinthetjük, mivel a tömeg jelentős része a síkban helyezkedik el.) A 2. ábrán láthatjuk a síkban keringő objektum és egy bizonyos inklinációjú objektum érintkezési pontjait.

Elliptikus pálya esetén egy idő után a precesszió miatt ugyanígy találkozni fog a síkban keringő objektum a másik objektummal. Ezek az állítások bizonyítják, hogy egy bolygó képes felszedni az összes anyagot, amely az általa meghatározott körgyűrűn kering. Ezért fontos, hogy a számításba vett bolygók már elég idősök legyenek ahhoz, hogy a számukra rendelkezésre álló tömeg nagy részét felszedjék (tulajdonképpen ez maguknak a bolygóknak a definíciója), erre a Naprendszer tökéletes példa.

Ezt az A felületet a következő módon lehet meghatározni:

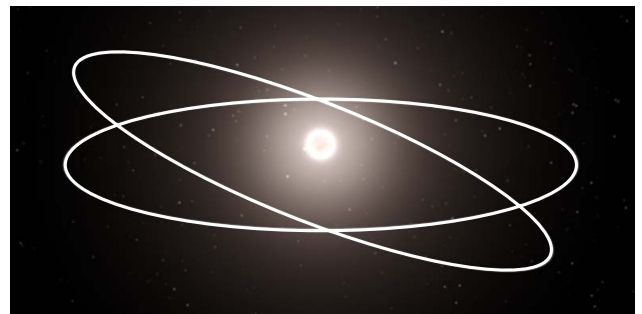
$$A = \pi \left([a + r_H]^2 - [a - r_H]^2 \right) = 4 \pi a r_H, \quad (3)$$

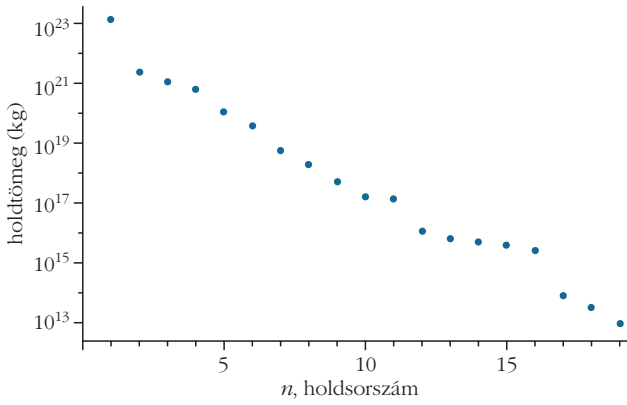
ahol a a bolygó fél nagytengelye, és

$$r_H \approx a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

a bolygó Hill-sugara. Ezt a területet még meg kell szorozni egy paraméterrel, amely azt jellemzi, hogy

2. ábra. Azonos sugarú körpályák találkozási pontjai.





3. ábra. A Szaturnusz (nagy) holdjainak tömeg szerinti eloszlása logaritmikus skálán (a vízszintes tengelyen a holdak csökkenő tömeg szerint vannak sorrendbe állítva).

milyen könnyen tud egy bolygó anyagot maga köré akkretálni. Ez arányos lesz a bolygó tömegével és pályájának sugarával.

$$\sigma = \frac{\mu}{A} \Rightarrow \mu = c \cdot 4 \pi r_H m \sqrt{a}, \quad (4)$$

ahol μ a gyűrűn elhelyezkedő össztömeg, m a bolygó tömege és c az arányossági tényező a (3) egyenlethez. Első közelítésben c -t tekintjük konstansnak.

Az eddigiek alapján – a bolygó tömegének ismeretében – kiszámíthatjuk egy bolygó körül keringő holdak össztömegét. Nehézség, hogy a holdak nem ismert tömegűek, így számukat nem tudjuk megállapítani. Ennek áthidalására vizsgáljunk meg egy példát a holdak tömegének eloszlására a Szaturnusznál!

A 3. ábrán látható, hogy a holdak tömeg szerinti nagyjából exponenciális eloszlást követnek, amely a függőleges tengely logaritmikus skálázása miatt lineárisnak látszik. Emögött az empirikus magyarázat a következő: a holdak kialakulása hasonlóan modellezhető, mint egy bolygórendszer kialakulása. A nagyjából homogén gázkorongban a bolygó körül először kialakul egy kisebb csomó, ami a gázkorong egy bizonyos százalékát fel tudja szedni, és ez így folytatódik a többi kisebb csomóval is. Emiatt a természetes holdaknál arra számíthatunk, hogy az n -edik legnagyobb tömegű hold ugyanannyiszor nagyobb tömegű az $n+1$ -ediknél minden n -re.

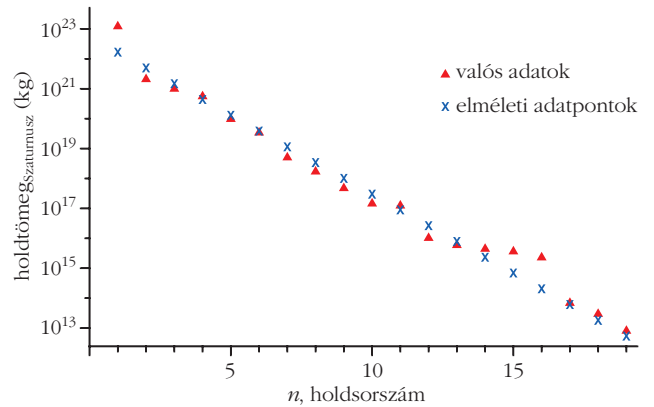
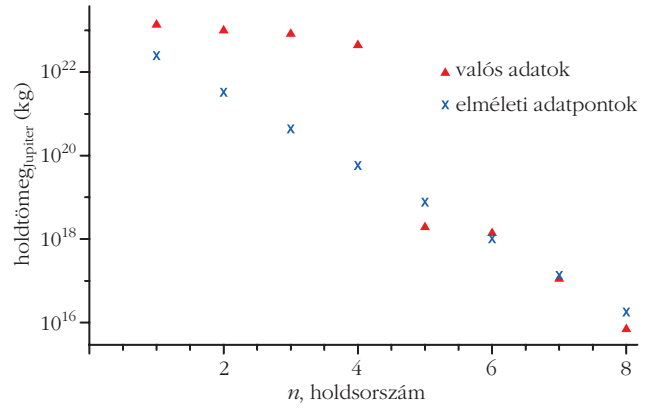
Definiáljunk tehát egy olyan függvényt, amely leírja a tömegeloszlást:

$$M(n) = d e^{bn}, \quad (5)$$

ahol n egy adott hold csökkenő tömeg szerinti sorszáma, d és b pedig a bolygótól függő paraméterek. Tudjuk, ha összeadjuk az összes hold tömegét, akkor megkapjuk a gyűrűn elhelyezkedő tömeget. Ezt a következőképpen írhatjuk fel:

$$\sum_{n=1}^N M(n) = \mu. \quad (6)$$

Mivel exponenciálisan változó tagokat összegzünk, ezért az összeg a következőképpen közelíthető, figye-



4. ábra. Fölül: a Jupiter szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmikus skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$ és $c = 1,5 \cdot 10^{-6}$. Alul: a Szaturnusz szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmikus skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$ és $c = 2,5 \cdot 10^{-6}$.

lembe véve, hogy a tömeg nagyon gyorsan tart nullához (és elméletileg végtelen számú „hold” kering az exponenciális szabály miatt):

$$\sum_{n=1}^N M(n) \approx \sum_{n=1}^{\infty} M(n). \quad (7)$$

Ezt az összeget már egyszerű lesz kiszámolni, mivel egy mértani sor. Tehát:

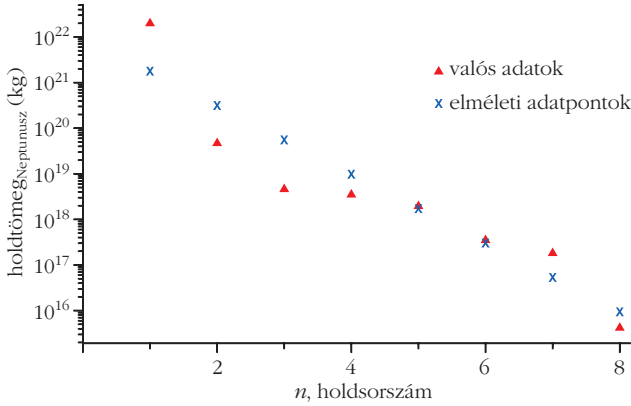
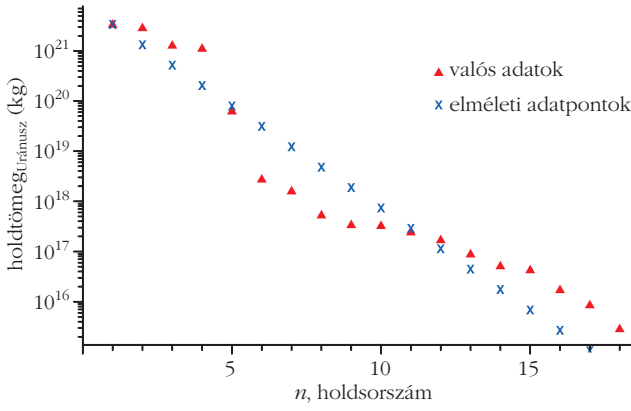
$$\mu \approx \sum_{n=1}^{\infty} d e^{-bn} = \frac{d}{e^b - 1} \Rightarrow \quad (8)$$

$$\Rightarrow d \approx c \cdot 4 \pi r_H m \sqrt{a} (e^b - 1).$$

Megfigyelhetjük azt is, hogy ha $n = 0$, akkor $M(0) = d$, ebből következik, hogy

$$M(0) \approx c \cdot 4 \pi r_H m \sqrt{a} (e^b - 1). \quad (9)$$

Kérdés, hogy van-e $M(0)$ -nak fizikai jelentése. Tudjuk, hogy $M(1)$ a legnagyobb hold tömege, aminél feltételezzük, hogy arányos a bolygó tömegével. Ugyanez a helyzet a kisebb holdakkal is, csak azoknál kisebb az arányossági konstans. Ebből származik az, hogy $M(0)$ szintén arányos a bolygó tömegével, tehát $M(0) \sim m$. Legyen az univerzális arányossági állandó κ . Ezt felhasználva a (9) egyenlet átírható:



5. ábra. Fölül: az Uránusz szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmusos skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$ és $c = 2,5 \cdot 10^{-6}$. Alul: A Neptunusz szabályos holdjainak tömeg szerinti eloszlása összehasonlítva az elméleti eloszlással logaritmusos skálán, ahol $\kappa = 10^{-4}$ és $c = 4 \cdot 10^{-7}$.

$$\kappa \cdot m \approx c \cdot 4 \pi r_H m \sqrt{a} (e^b - 1). \quad (10)$$

Ebből a b paraméter is meghatározható:

$$e^b - 1 = \frac{\kappa}{4 \pi r_H c \sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \ln \left(\frac{\kappa}{4 \pi r_H c \sqrt{a}} + 1 \right). \quad (11)$$

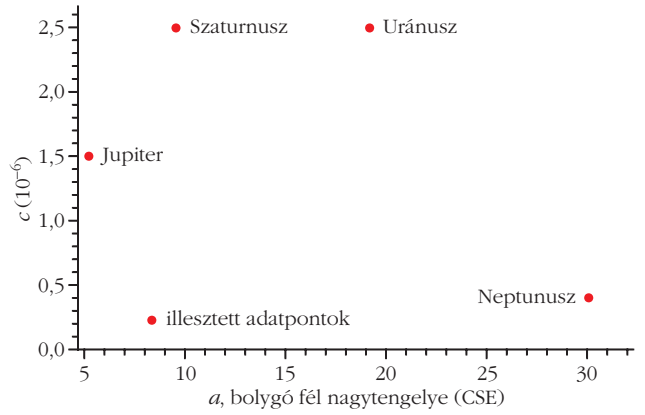
Végül meghatározhatjuk a tömegeloszlást leíró függvényt a következő módon:

$$M(n) = \kappa m \cdot e^{-\ln \left(\frac{\kappa}{4 \pi r_H c \sqrt{a}} + 1 \right) n} =$$

$$= \kappa m \cdot \left(\frac{\kappa}{4 \pi r_H c \sqrt{a}} + 1 \right)^{-n}. \quad (12)$$

Itt a konstansokat mind meg lehet határozni a Naprendszer holdjainak ismert adataiból. A 4. és 5. ábra mutatja, hogy miként néz ki az eloszlás a Naprendszer gázbolygóinak holdjaira.

Elméletünket igazolja, hogy a κ konstans tényleg minden bolygóra állandó, viszont a c konstans az



6. ábra. A c „konstans” (illesztésből származó adatpontok) a fél nagytengely függvényében a négy gázbolygóra kiszámítva.

Uránuszra és a Neptunuszra már eltérő értéket ad (6. ábra). Lássuk, hogyan néz ki ez az eddig konstansnak gondolt paraméter, a fél nagytengely függvényében.

További kérdés, hogy miért nem állandó ez a paraméter? Azt írtuk, hogy a felületi sűrűség egy csillagrendszerben arányos $r^{-3/2}$ -nel. Ez viszont csak bizonyos intervallumokban igaz, és túl közel vagy távol a csillagtól más lesz az eloszlás. Definiálhatunk egy pontosabb eloszlást [4] Sanford S. Davis munkája alapján, amely az egész rendszerben le tudja írni a felületi sűrűséget (a távolság CSE-ben értendő):

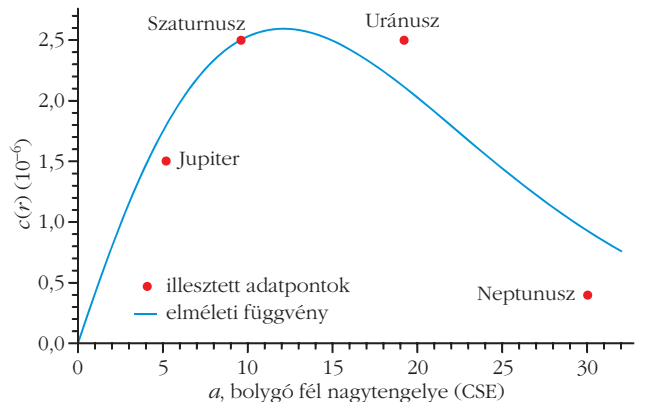
$$\sigma = \delta \frac{\exp \left(-\frac{2 r^{3/2}}{27 \pi \beta} \right)}{\sqrt{r} \beta^{4/3}}, \quad (13)$$

ahol β a csillagrendszer korával arányos paraméter és δ egy adott csillagra jellemző paraméter. Legyen mostantól c egy r -től függő paraméter:

$$c(r) = \delta r^{3/2} \frac{\exp \left(-\frac{2 r^{3/2}}{27 \pi \beta} \right)}{\sqrt{r} \beta^{4/3}}. \quad (14)$$

Így mostantól elég kiszámolnunk a c paramétert egy bolygóra, és használhatjuk a korábbi tömegeloszlás-egyenletet. Nézzük most meg, hogy a 6. ábrán lévő c

7. ábra. A $c(r)$ paraméter a fél nagytengely függvényében a négy gázbolygóra kiszámítva és az elméleti definícióval összehasonlítva.



értékei mennyire hasonlítanak az előbb definiált $c(r)$ elméleti paraméterhez (7. ábra).

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a bolygók mind – megközelítőleg – körpályán keringenek, azaz a fél nagytengelyük egyenlő a pálya sugarával, ezért tudjuk a két értéket cseréltetni, a valóságban a kettő nem teljesen ugyanaz. Ezen kívül az eloszlás szépen követi a bolygókra illesztett adatpontokat. A két új bevezetett érték $\delta = (6,5 \pm 2,55) \cdot 10^{-7}$ és $\beta = 1,5$, amelyek egy bizonyos csillagrendszerre állandók. δ a csillagrendszer tömegétől és eredeti perdületétől függ, β pedig a csillag korától.

Végső soron meghatározhatjuk a bolygók körül keringő holdak számát azzal a trükkel, hogy tudjuk, hogy a legkisebb holdnak legalább m_{\min} tömegűnek kell lennie, és e hold sorszáma pontosan egyenlő a holdak számával, vagyis:

$$m_{\min} = \kappa m \cdot \left(\frac{\kappa}{4 \pi r_H c \sqrt{a}} + 1 \right)^{-N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{m_{\min}}{\kappa m} \right) = -N \ln \left(\frac{\kappa}{4 \pi r_H c \sqrt{a}} + 1 \right).$$

Amiből következik:

$$N = \frac{\ln \left(\frac{\kappa m}{m_{\min}} \right)}{\ln \left(\frac{\kappa}{4 \pi r_H c \sqrt{a}} + 1 \right)}.$$

Itt fontos, hogy N -re nem kapnánk egész számot, ezért a korábbi érvelés alapján egész részre kell kerekíteni a kapott értéket. Az 1. táblázat tartalmazza, hogy modellünk alapján milyen adatokat kapunk a Naprendszer egyes bolygóira.

Látjuk, hogy az eredmények ahhoz képest viszonylag jók, hogy nagyon összetett és kaotikus tulajdonságokkal is jellemezhető rendszer egyik tulajdonságát akarjuk megállapítani kevés paraméter alapján. A gázbolygóknál a valós holdszám – legtöbb esetben – hibahatáron belül van, és látszik, hogy elméletünk a kisebb bolygóknál nagyobb holdszámot feltételez. Ez azért van, mert kisebb bolygóknál nem annyira reális az a közelítés, hogy a bolygót és a holdat kétestestproblémaként kezeljük. Ha ugyanis egy kisebb tömegű bolygóról van szó, akkor a csillag és egyéb nagy, közeli bolygók hatása miatt a hold nem a megszo-

1. táblázat

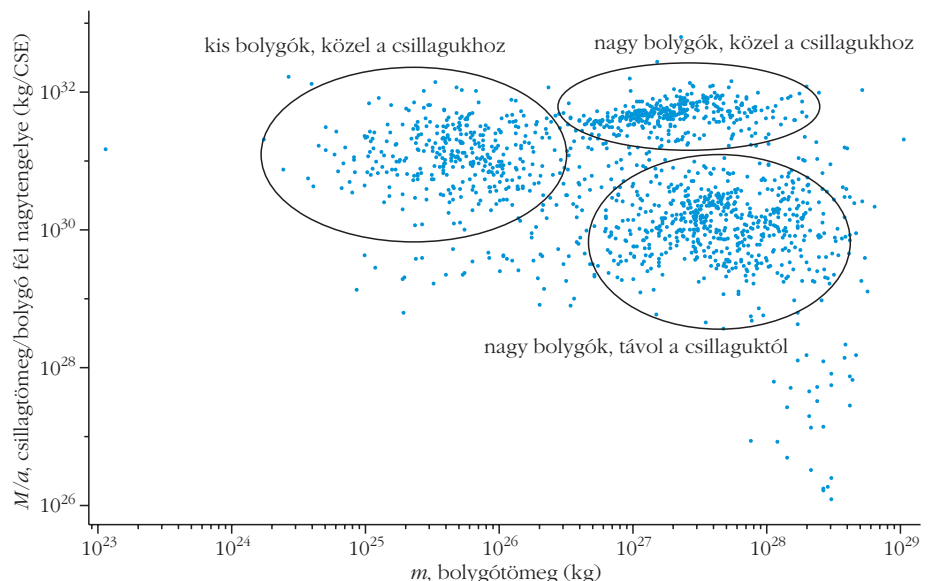
Naprendszerbeli bolygók szabályos holdjainak száma összehasonlítva a korábban bemutatott elmélettel		
bolygó	szabályos holdak valós száma	elmélet által jósolt N szám
Merkúr	0	$1,37 \pm 0,05$
Vénusz	0	$2,09 \pm 0,09$
Föld	0	$2,36 \pm 0,11$
Mars	0	$2,15 \pm 0,11$
Jupiter	8	$12,6 \pm 2,1$
Szaturnusz	22	18 ± 4
Uránusz	18	20 ± 4
Neptunusz	8	19 ± 4

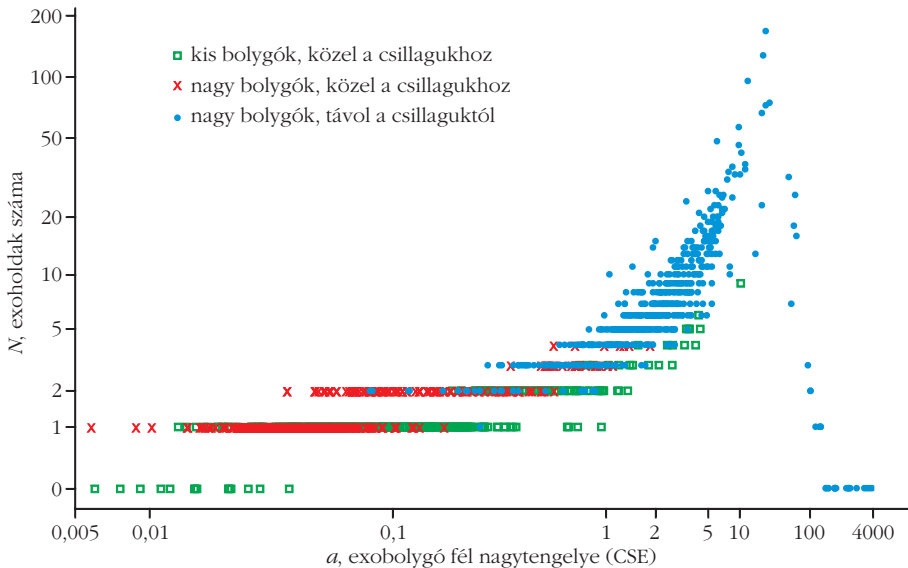
kott ellipszis alakú pályán kering, és emiatt az időköz folyamán a szabályos holdak nem maradnak stabilak. Ez nem jelent nagy problémát, mivel a hiba nem túl nagy, és egyébként is a nagyobb holdrendszerekre fókuszálunk. Ami látszik még, hogy a Neptunusznál sokkal több holdak jelez az elmélet. Ez azért nem mond ellent a modellünknek, mert a Neptunusz körül lehetséges, hogy vannak még felfedezetlen, kisebb szabályos holdak. A legkisebb ismert szabályos hold a Neptunusz körül (Hippocamp), ezerszer nagyobb tömegű, mint az általunk definiált alsó tömeghatár.

Lássunk akkor egy ábrát az összes ismert exobolygóról (amelyek releváns paraméterei is ismertek) [6], ahol tömegüket összehasonlítjuk a csillag tömegének és a bolygó fél nagytengelyének arányával (8. ábra)!

Ez az ábra összefoglalja minden eddigi ismeretünket az exobolygókról, és a cikkben tárgyalt modellt, ami alapján választ kapunk a kérdésre, hogy hova érdemes néznünk. Láthatjuk, hogy az eddig felfedezett holdakat három nagyobb csoportra oszthatjuk.

8. ábra. Az összes eddig ismert exobolygó pontként jelölve, amelyeknek a tömege és a csillag tömegének és a bolygó fél nagytengelyének aránya van összehasonlítva, ez utóbbi logaritmikus skálán.





9. ábra. Az összes eddig ismert exobolygó holdjainak legvalószínűbb száma (logaritmusos skálán) a bolygópálya fél nagytengelye függvényében.

Ezek azért lesznek lényegesek, mert a kisebb bolygónál a Naprendszerben is nagyobb becslést kaptunk, mivel nem számoltunk az instabilitással. Ez azt jelenti, hogy a kis exobolygónál is valószínűleg túl nagy számot fogunk kapni. A 9. ábra megmutatja, hogy melyik bolygó birtokolja potenciálisan a legtöbb holdat, és ebből megtudhatjuk, hogy hol érdemes exoholdat keresni.

Látható, hogy minden exobolygóra nagyságrendileg reális eredményeket kapunk, ami jelzi, hogy az elmélet jól működik. Szintén megfigyelhetjük, hogy a legtöbb holdra olyan óriásbolygók körül számíthatunk, amelyek körülbelül 20 CSE távolságra vannak központi csillaguktól. A jelenleg ismert exobolygók közül a legtöbb holdat legvalószínűbben a HR 2562 b jelű bolygó körül találhatunk, modellünk szerint várhatóan 167 ± 56 szabályos holdja van. A probléma csak az, hogy a bolygó olyan nagy tömegű, hogy talán már nem is lehet bolygónak nevezni, inkább barna törpe [7] tömegű, de ma még bolygó besorolású égitest. Láthatjuk az ábrán azt is, hogy nagyon távoli bolygónak nincsen egy holdjuk sem, ami azért van, mert itt nagyon alacsony a felületi sűrűség, és emiatt nincs elég tömeg a holdak kialakulására. Az ábrán szintén megfigyelhető, hogy sok olyan kis bolygó van, amelyek közel van a csillagához, ennek ellenére mégis van 1-2 holdja. Ez a szituáció ismerős lehet, hiszen ugyanez a probléma adódott a Naprendszerben is. Ugyanúgy a stabilitás figyelembevételének hiánya okozza ezt a pontatlanságot. Ha ezzel is számolnánk, valószínűleg nagyjából eggyel csökkenne a holdak száma a csillagukhoz közeli kis bolygónál.

Keringési idők, pályák

Ebben a részben néhány további paramétert tárgyalunk, amelyek a holdak fontos tulajdonságait határozzák meg. Ezenkívül megvizsgálunk egy effektív kere-

sési módszert a lakható exoholdakra, és általánosságban a különböző hőmérsékletű/méretű exoholdakra.

Kezdjük a holdak pályaeloszlásával. Ha már tudjuk, mekkora a legnagyobb hold tömege, és hogyan oszlanak el a holdak tömeg szerint egy bolygó körül, akkor még továbbra is ismeretlen a holdak fél nagytengely szerinti eloszlása. Két alapvető határt meghatározhatunk: a holdak nem keringhetnek közelebb a Roche-határnál [8] és a Hill-szférán belül kell keringeniük, viszont általában inkább a Hill-sugár felével szoktak számolni, mivel ténylegesen ezen belül maradnak stabilak a holdak [9]. A holdak bolygó

körüli keringésének periódusára felírható egy, a Titius–Bode-szabályhoz hasonló reláció [10]:

$$T_k = T_c \alpha^k, \quad (17)$$

ahol T_c és α adott bolygóra jellemző állandók, k pedig a holdak növekvő pályasugár szerinti sorszáma. A megfigyeléseken alapuló empirikus tapasztalatunk szerint α egy kis pozitív egész szám gyöke [10]. Emellett definiáljuk $T_0 = T_c / \alpha$ -t, és a Naprendszer bolygóin alapuló megfigyelési tapasztalat, hogy

$$\frac{T_0}{T_p} \approx 1,077 \Rightarrow \frac{T_c}{\alpha T_p} \approx 1,077, \quad (18)$$

ahol T_p a bolygó (saját tengely körüli) rotációs periódusa. Ez a reláció kétféleképpen is hasznos lehet:

- a bolygó rotációs periódusának megállapítása néhány hold keringési periódusának ismeretében,
- a holdak pályasugarának becslése a bolygó rotációs periódusának ismeretében.

Fontos megjegyezni, hogy az első lehetőség egyelőre nem releváns, mivel egy exobolygó körül keríngő több exohold felfedezésétől még elég távol állunk. A második lehetőséget már most is használhatjuk, például a β Pictoris b exobolygónál, amelynek rotációs periódusát [11] a következő módon állapították meg: a bolygót elég nagy pontossággal tudták lefotózni ahhoz, hogy a két szélső részén lévő spektrumvonal-eltolódás látható lett, és ebből a Doppler-effektus alapján meg lehetett állapítani a rotációs periódust. Ennek értéke körülbelül 8,1 óra. Így $T_0 \approx 8,7$ óra. Nézzük most meg, hogy ennek az exobolygónak hány holdja lehet, amiből a pályasugarakat állapíthatjuk meg, ha már tudjuk, hogy α melyik kis pozitív egész szám gyöke. Mivel a csillag még elég fiatal, ezért holdjainak számára 0 jön ki, viszont megvizsgálhatjuk, mi lesz a jövőben, ha megmaradnak a csillag és bolygó paraméterei. Amikor a csillag annyi idős lesz,

mint jelenleg a Nap, akkor a bolygónak már 8 szabályos pályán keringő holdja várható. Vizsgáljuk meg általánosságban, hogy α -ra mekkora a lehető legnagyobb érték:

$$\alpha_{\max}^N = \frac{T_N}{T_c} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{r_H^3}{Gm}}}{1,077 \alpha_{\max} T_p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \left(\frac{2\pi \sqrt{\frac{r_H^3}{Gm}}}{1,077 T_p} \right)^{\frac{1}{N+1}}. \quad (19)$$

A β Pictoris b esetében $\alpha_{\max} \approx 2,8$. Ez nem azt jelenti, hogy $\alpha = 2,8$, ez csak egy maximális érték, hogy holdak ne keringjenek a Hill-szférán kívül. Ha azzal számolunk, hogy holdak nem keringhetnek a Hill-sugár felénél nagyobb pályasugárnál [9], akkor $\alpha < 2,5$. Nézzük most meg, mekkora α legkisebb értéke. A Roche-határ értéke:

$$r_{\text{Roche}} = r_{b,n} \left(2 \frac{m}{M(n)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (20)$$

ahol $r_{b,n}$ az n -edik hold sugara. A kérdés most már csak az, hogy mekkora a legbelső hold tömege és sugara. Egyelőre figyeljük meg, hogy ezeket nem is kell tudnunk, mivel az előző egyenletet a hold sűrűségére átírhatjuk, amit majd a következő becsléssel számolhatunk:

$$r_{\text{Roche}} = \left(2 \frac{m r_{b,n}^3}{M(n)} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(2 \frac{m \frac{4}{3} \pi r_{b,n}^3}{\frac{4}{3} \pi M(n)} \right)^{\frac{1}{3}} =$$

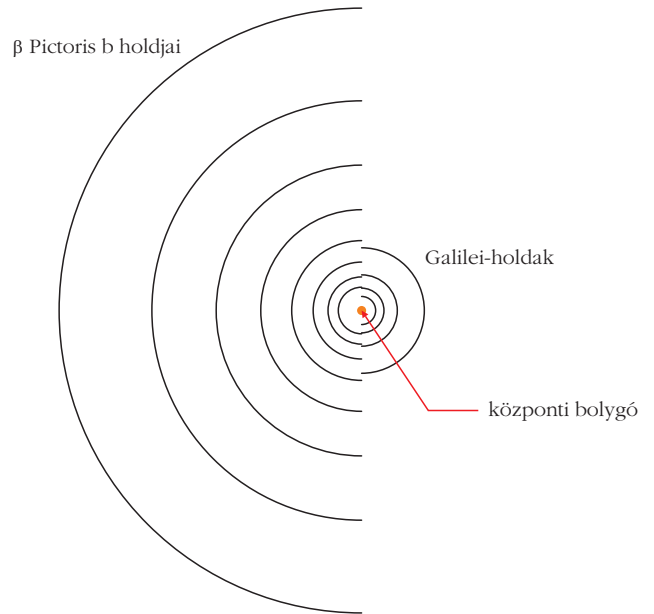
$$= \left(2 \frac{m}{\frac{4}{3} \pi \rho_n} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3m}{2\pi \rho_n} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (21)$$

Számoljunk egy átlagosnak gondolható közheld sűrűségével, $\rho_n \approx 3000 \text{ kg/m}^3$. Így a β Pictoris b Roche-sugara körülbelül $1,54 \cdot 10^8 \text{ m}$, tehát a legbelső hold pályájának sugara nem lehet ennél kisebb. Tudjuk, hogy a legbelső hold pályájának periódusa $T_c \alpha$, tehát

$$T_c \alpha > 2\pi \sqrt{\frac{r_{\text{Roche}}^3}{Gm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 > \frac{2\pi}{1,077 T_p} \sqrt{\frac{r_{\text{Roche}}^3}{Gm}}. \quad (22)$$

Jelen esetben ez azt jelenti, hogy $\alpha > 0,56$, tehát α lehetséges értékei a következők: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}$,



10. ábra. A Jupiter és a β Pictoris b lehetséges holdrendszerének összehasonlítása a holdpályák nagysága alapján.

$\sqrt{6}$. A Naprendszerben α -ra tipikus értékek $\sqrt{2}$ és 2 között vannak, ezért tegyük fel, hogy a β Pictoris b-re $\alpha = \sqrt{3}$, mivel ez a lehetőségek közül egy közbelső érték, ami valószínű a pályák stabilitása miatt. Emiatt $T_c \approx 54\,400 \text{ s}$. Nézzük akkor meg, hogyan nézhet ki a β Pictoris b körüli holdrendszer összehasonlítva a Jupiter Galilei-holdjaival (10. ábra).

Exoholdak felszíni hőmérséklete

Nagy előny a többi bolygóval szemben, hogy a β Pictoris b esetén becslést tudunk adni arra, hogy a szabályos holdjai hol helyezkednek el. Emlékezzünk vissza, hogy a tömegeloszlás alapján a tömegüket is meg tudjuk állapítani:

$$M(n) = \kappa m \cdot \left(\frac{\kappa}{4\pi r_H c \sqrt{a}} + 1 \right)^{-n}. \quad (23)$$

Nézzük meg, hogy vajon lakhatók-e ezek a holdak, vagyis végezzünk becslést a felszíni hőmérsékleteikre. Ezt az értéket egyszerűen a csillag luminozitásából számolhatjuk ki. Felhasználjuk, hogy a holdat érő besugárzott teljesítmény ugyanakkora, mint az abból távozó. Ha a Stefan-Boltzmann-törvényből levezetjük az egyenletet a hőmérsékletre, akkor a következőt kapjuk:

$$(1 - \alpha) \frac{1}{4} \frac{L_{\text{star}}}{4\pi a^2} = \sigma T^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[4]{(1 - \alpha) \frac{L_{\text{star}}}{16 \sigma \pi a^2}}, \quad (24)$$

ahol α a hold albedója, L_{star} a csillag luminozitása és σ a Stefan-Boltzmann-állandó. Nehézség, hogy a köz-

ponti bolygó nagy hatással lehet a holdra. Két hatás kell megemlítenünk: az első (és jelentősebb) hatás a bolygóból származó árapályfűtés [12], ami a gravitációs energiából származik. Ezt a következőképpen kaphatjuk meg:

$$L_{\text{tidal}} = \frac{21}{2} \frac{k_2}{Q} \frac{G m^2 r_{b,n}^5 n e^2}{a_n^6}, \quad (25)$$

ahol k_2 az úgynevezett Love-szám, Q a jósági tényező, n a hold középmozgása, e a hold pályájának excentricitása és a_n a hold pályájának fél nagytengelye. Ez az energia a hold felszínén hőként jelenik meg. A következő hatás a Kelvin–Helmholtz-mechanizmus [13], ami magából a bolygóból származó luminozitás. Ezt a Naprendszerben a Jupiternél lehet a legjobban megfigyelni, és az egész abból ered, hogy a bolygó lassan zsugorodik. Erre a következő (empirikus) egyenletet lehet felírni:

$$L_{\text{KH}} = 0,272 \cdot 10^{-3} \eta^{-4,352} \left(\frac{10^{-2}}{K_R} \right)^{1,184} \cdot \left(\frac{m}{0,05 M_{\odot}} \right)^{1,305} \mu_e^{0,611} \varepsilon^{1,548} \cdot \frac{\mu^{1,184}}{\left(1 + \frac{\psi}{\eta} \right)^{0,364}} \frac{\text{J}}{\text{s}}, \quad (26)$$

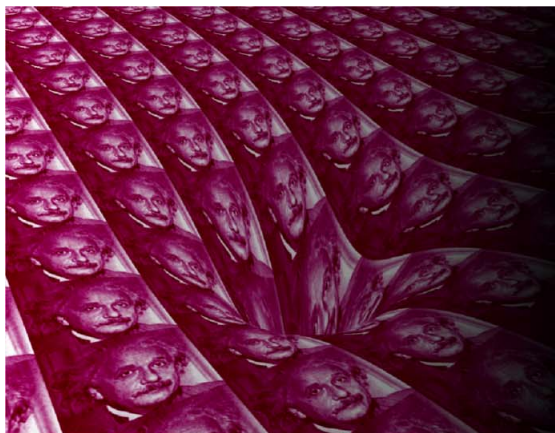
ahol η a bolygó degenerációjának mértéke, K_R a bolygó anyagának Rosseland-opacitása, M_{\odot} a Nap tömege (mint tömeg egység), μ_e a barionok száma elektronként, ε az egyenletet leíró differenciál-egyenletben szereplő mértékegység nélküli paraméter, μ a molekuláris tömeg és ψ a bolygóban lévő gáz degenerációjától függő paraméter. Ezeket a paramétereket kifejezhetjük egyértelműbb paraméterek függvényeként, de lényeges, hogy lássuk, a holdakra két másik hatás is felléphet, tehát a lakható zóna kijelölésére számíthatunk holdaknál, ahol eddig talán nem gondoltuk.

Konklúzió

Láttuk, hogy egy bolygó néhány jellemző paraméteréből becslést lehet adni szabályos holdjainak számára. Talán még lényegesebb, hogy az egyes holdak tömegét és a bolygó rotációs periódusából a pályájuk sugarát is ki tudjuk számolni, ezenkívül a hőmérsékletükre is pontosabb becslést adhatunk. Láttuk azt is, hogy a Naprendszerben lévő néhány nagyobb holdrendszerre jó eredményeket kaptunk, és megsejtettük, hogy a Neptunuszhoz valószínűleg több szabályos holdja van, mint ahányat ismerünk. Továbbá exobolygók holdjainak paramétereire is tudunk becslést adni, ami effektív keresőalgoritmus lehet exoholdak felfedezéséhez.

Irodalom

1. A. Teachey, D. M. Kipping, A. R. Schmitt: On the dearth of Galilean analogs in Kepler, and the exomoon candidate Kepler-1625B I. <https://arxiv.org/pdf/1707.08563.pdf>
2. D. J. Stevenson: Origin of the Moon-The Collision Hypothesis. <https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.ea.15.050187.001415>
3. S. Desch, N. Staab, Arizona State Univ.: Solving solar system quandaries is simple: Just flip-flop the position of Uranus and Neptune. https://www.eurekalert.org/pub_releases/2007-12/asu-sss121107.php
4. S. S. Davis: The surface density distribution in the solar nebula. <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/432464/pdf>
5. Wikipédia: kép. https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point#/media/File:Lagrangian_points_equipotential.jpg
6. NASA Exoplanet Archive: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>
7. A. J. Burgasser: Brown dwarfs: Failed stars, super Jupiters. https://web.archive.org/web/20130508182012/http://astro.berkeley.edu/~gmarcy/astro160/papers/brown_dwarfs_failed_stars.pdf
8. Roche Limit. https://www.cs.mcgill.ca/~rwest/wikispeedia/wpcd/wp/r/Roche_limit.htm
9. H. Mizuno, K. Nakazawa, C. Hayashi: Instability of a Gaseous Envelope Surrounding a Planetary Core and Formation of Giant Planets. <https://academic.oup.com/ptp/article/60/3/699/1848127>
10. S. F. Dermott: On the Origin of Commensurabilities in the Solar System-II The Orbital Period Relation. <https://academic.oup.com/mnras/article/141/3/363/2601528>
11. I. A. G. Snellen, B. R. Brandl, R. J. de Kok, M. Brogi, J. Birkby, H. Schwarz: The fast spin-rotation of a young extra-solar planet. <https://www.eso.org/public/archives/releases/sciencepapers/eso1414/eso1414a.pdf>
12. W. G. Henning, R. J. O'Connell, D. D. Sasselov: Tidally heated terrestrial exoplanets: viscoelastic response models. <https://arxiv.org/pdf/0912.1907.pdf>
13. K. Ghosh: Brown Dwarf Like Behaviors of Jupiter. <http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/2007ASPC...362...310G>



A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kérik mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Szemle hasábjain az olvasókkal!



EGY KEVÉSSÉ ISMERT BILIÁRDJÁTÉK, A MŰLÖKÉS

1. rész: a masszé (ívelt) lökés bemutatása és annak fizikai alapjai

Jaloveczki Gábor

ECO-TEC Műszaki-Gazdasági Tanácsadó Kft., Budapest

Jaloveczki József

Szent László ÁMK, Baja

Renkus Tibor

egyéni vállalkozó, épületgépészet, Érsekcsanád

„A biliárd nem más, mint a tervezés magaskiskolája. Nemcsak játék, hanem sokat ígérő sportművészet, amelyhez egy sakkjátékos elméje és egy koncertzenongorista keze szükséges.”

Albert Einstein
(ismeretlen keltezés)

Magyarországon az I. világháború előtt virágkorukat élték a kávéházak. Meghatározásuk szerint „a kávéház eredetileg kávé fogyasztására szakosodott vendéglátó-ipari egység volt, amely később éttermi, cukrászdai, társasjátéki, sőt szórakoztató funkciókat is ellátott, és a társasági élet fontos színterévé vált”. Sokan nem tudják, hogy egy kávémérő hely csak akkor hívhatta magát kávéháznak, ha volt benne biliárdasztal. Emiatt nevezik még manapság is az idősebbek a kis méretű karambolasztalokat „kávéházi asztalnak”.

A karambol biliárd hagyománya azonban a világháborúk után háttérbe szorult a pool és a snooker biliárdjátékokkal szemben. Ennek egyik oka a háborúk miatt Európában állomásozó amerikai és brit haderők kulturális hatása, majd később a televíziókban megjelenő filmek voltak. Szerepet játszott a BBC azon dön-

tése is, hogy olyan sportágit kerestek, ami meggyőzi az embereket a színes tévé előnyeiről, miáltal a legszínesebb golyókat felvonultató biliárdjátékokat választották. Napjainkra Magyarországon mindössze pár olyan település maradt, ahol a lakosság alapértelmezett biliárd játékneme a karambol, amelyet lyuk nélküli asztalon, többnyire három golyóval játszanak. Miközben az emberek többsége soha nem hallott lyuk nélküli biliárdasztalokról, a kisebb falvakban ténykedő karambolpárti közösségek, idegenkedve, csak „lyukas asztal”-nak nevezik a mások számára egyetlen biliárdot jelentő poolasztalokat. A biliárdfajtákban járatos sportkedvelők tudják, hogy nem csak az asztalok, de a golyókészletek, dákófajták, sőt, a biliárdasztalt borító posztótípusok is megkülönböztetik a játéknemeket. A golyókat színük és átmérőjük alapján különböztetik meg, alapanyaguk nagyrészt hasonló műanyag. Dákók tekintetében megkülönböztetünk pool, snooker, karambol és piramid típusokat, de a karambol, azon belül is a műlökés (angolul: *artistic billiard*) igényli a legszélesebb palettát: háromfalas, csettenő, *piké-masszé* dákókat is használnak, mindezeket a játékos ízlésének és technikájának megfelelő rugalmasságú spiccekkal (a kétrészes dákó első része) és keménységű bőrökkel ellátva, egyénileg kiszülőzve.

Cikkünkben az – egyébként csak könyvterjedelemben tárgyalható – biliárdfizika háttéréből csupán a masszé lökést elemezzük. Ez ritkán része az alapszintű játékképnek, legfeljebb kiszorított (vagyis: amikor a játékos a játékmenet szerint eltalálандó golyót egy másik golyó vagy az asztal része miatt „nem látja”, azaz egyenes lökéssel teljes egészében közvetlenül eltalálni nem tudja) helyzetekből való menekülésre szolgál, ugyanakkor a műlökés magától értetődő része, számos hivatalos biliárdfigura fő technikai eleme.

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tanszaki-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.



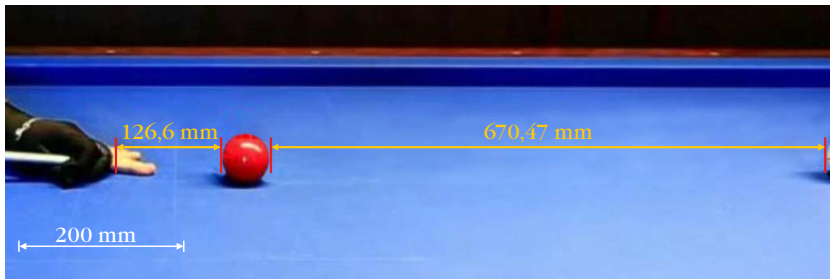
Jaloveczki Gábor korábban játékosként műlökés-érdeklődésű, magyar és nemzetközi biliárdversenyek fő koordinátora, valamint az első magyar játékevezető műlökés-világbajnokságon. Legnagyobb eredményének a 2011-es világbajnoki elődöntőn betöltött másod-játékevezetői szerepét tekinti. Foglalkozását tekintve műszaki pályán, monitoring-szakértőként dolgozik az ECO-TEC Műszaki-Gazdasági Tanácsadó Kft. mérnökszervezetnél.



Jaloveczki József 1983-ban végzett az ELTE TTK fizika-kémia tanári szakán. 2015-ben az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskolájában *summa cum laude* minősítéssel védte meg doktori disszertációját *Nemlineáris jelenségek vizsgálata diákköri-szakköri munkában* címmel. Jelenleg fizikát és kémiát tanít a bajai Szent László ÁMK középiskolájában.



Renkus Tibor a magyar biliárdélet egyik meghatározó alakja, a karambol típusú széria biliárdjátékok többszörös országos bajnoka. Legnagyobb eredményének a 15 országos bajnoki címét tartja. Saját épületgépészeti céget vezet.



1. ábra. A dákó közel 13 cm-es úton felgyorsulva lökte meg a piros golyót.

A golyó sebessége az $x(t)$ függvény deriváltja:

$$v = -0,026 t + 0,38,$$

gyorsulása a sebesség deriváltja:

$$a = -0,026 \text{ m/s}^2.$$

Innen kiszámítható a gördülési ellenállási tényező:

$$\mu = 0,0026 \cong 0,003.$$

Megismertetésével és további cikkeink témáival a biliárdsportot és magát a műlökést is kívánjuk népszerűsíteni, amely annak ellenére, hogy rendre minden új nézőjét lenyűgözi, mai napig kevés fórumon kap megjelenést.

A golyót érő erőlkés meghatározásához egy olyan lökést vizsgáltunk, ahol a dákó F erővel és rövid ideig érintkezett a meglökött golyóval (1. ábra). Az erőlkés:

$$F \Delta t = v \Delta m + m \Delta v.$$

Az eredő erő pedig Newton II. törvénye szerint:

$$F_e = m a.$$

Hogyan gurul a biliárdgolyó?

Ahhoz, hogy megtudjunk valamit a gördülési ellenállásról, egy biliárdgolyót – annak tiszta gördülését eredményező enyhe lökessel – indítottunk el egy biliárdasztalon. A golyó mozgását filmeztük, majd elemeztük. A felvett videofilm elemzéséhez a LabCam szoftver kinematikamodulját használtuk. A golyó megállásig megtett s útjára és a gyorsulására a következők érvényesek:

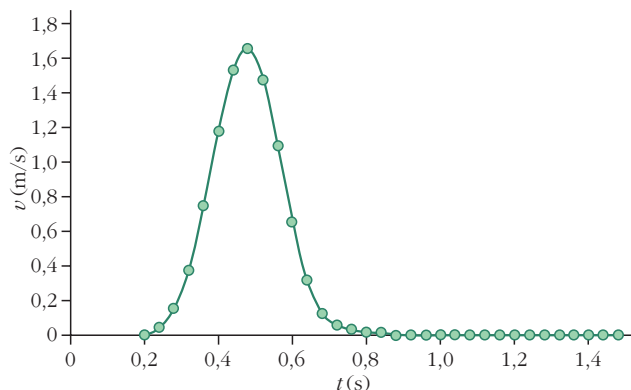
$$s = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot t, \quad a = \frac{v_1 - v_0}{t}. \quad (1)$$

Kis kezdősebességgel a golyó a megállásáig gördül, amikor: $v_1 = 0$. Egyik gurításunk adatai a következők voltak: a megtett távolság, $x = 1,466$ m; a megállásig eltelt idő, $t = 9,68$ s. Ezen adatok felhasználásával az (1)-ből kapjuk: $v_0 = 0,30$ m/s és $a = -0,031$ m/s². Mivel a gördülési ellenállás fékez, ezért $a = -\mu g$, ahonnan a gördülési tényező, $\mu = 0,003$.

A golyó megtett útjára a videó alapján történt illesztéssel a következőt kaptuk:

$$x = -0,013 t^2 + 0,38 t - 1,23.$$

2. ábra. A golyó sebességváltozása (függőleges tengely) a lökés ideje (vízszintes tengely) alatt.



Elemzéseink alapján a lökés első szakaszában a sebesség (2. ábra) és a gyorsulás (3. ábra) rohamosan (nem egyenletesen) nőtt. A sebességgrafikonról leolvastva, a sebesség 0,28 s alatt 1,657 m/s-ra nőtt, ahonnan 0,32 s alatt csökkent 0-ra.

Az első esetben

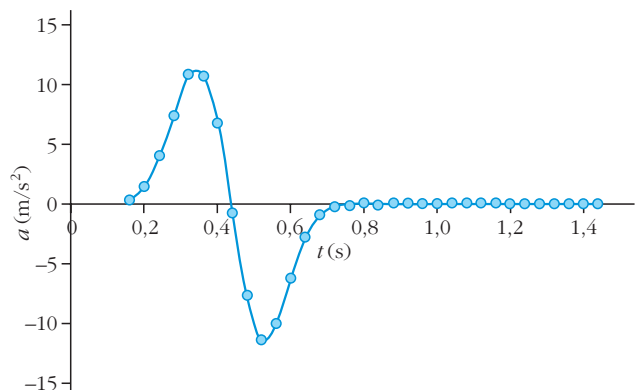
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1,657}{0,28} = 5,92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a másodikban pedig

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-1,657}{0,32} = -5,17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

volt az átlaggyorsulás. A gyorsulás-idő grafikonról leolvasható, hogy a maximális gyorsulás 10,7 m/s² volt. Ebből a golyó 210 gramm tömegét is figyelembe véve, közel 2,5 N-nyi maximális erőhatásra volt szükség.

3. ábra. A golyó gyorsulása (függőleges tengely) ugyanúgy változik az időben (vízszintes tengely), mint a golyóra ható eredő erő.

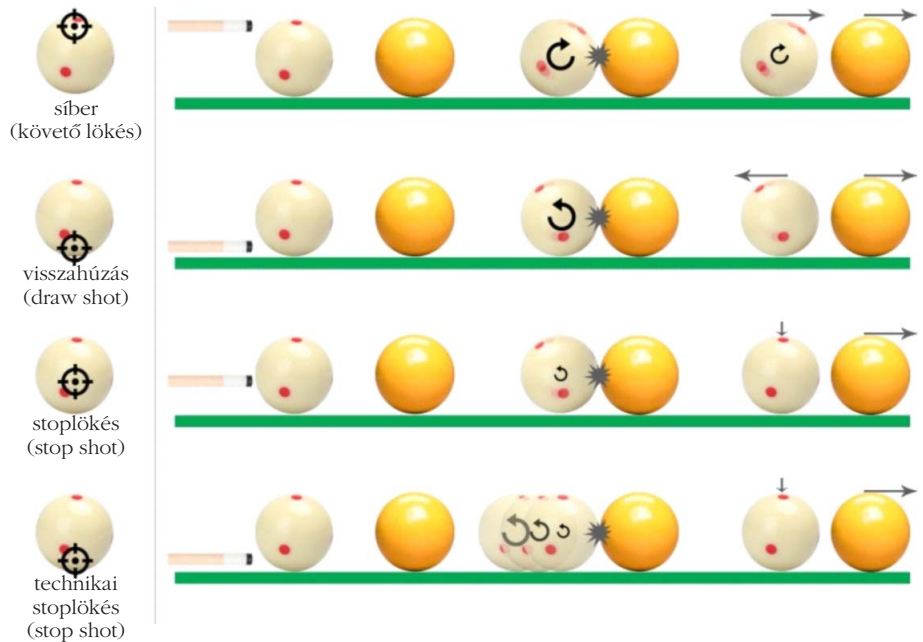


Ha valamilyen tárgyat elcsúsztatunk egy felületen, az a súrlódási erők miatt lelassul. Ha ezt valamilyen kerek/gömbölyű tárggyal tesszük, kezdetben csúszhat (különösen, ha erősen lökjük meg), de hamarosan tisztán gördülve forogni kezd. Könnyen igazolható, hogy a tisztán gördülve forgó tárgy sokkal kevesebb mozgási energiát veszít, mint a csúszó vagy csúszva gördülő tárgy, ezért távolabbra jut. Azonban a kerek/gömbölyű tárgy (például egy golyó) csak a súrlódás következtében gördülhet. Ahhoz, hogy forgásba jöjjön, az impulzusmomentumának (perdületének) meg kell változnia, ami forgatónyomatéket igényel. Ezt a súrlódási erő feje ki a tárgyra. Ha egy golyó tisztán gördül, akkor a felülettel való érintkezési pontjának nulla a sebessége. Következésképpen, ha szögsebessége ω és a forgásközéppont haladási sebessége v_r , akkor – egy R sugarú golyó esetén – $v_r = R\omega$. Ha a golyó középpontjának ennél nagyobb a sebessége, akkor a golyó csúszva, azaz köszörülve gördül a felületen. A súrlódás következtében a haladás sebessége v_r -re lassul, majd tisztán (azaz csúszásmentesen) gördül tovább. Mindezekről részletesebben írunk cikkünk folytatásában.

A biliárdgolyó mozgásának típusát az határozza meg, hogy a dákó és a golyó érintkezési pontja a golyó felületén – a golyó posztóval párhuzamos középpontjához viszonyítva – hol helyezkedik el (4. ábra). A lökő golyó korlátozott útja (vagyis a célgolyóval tervezett találkozásig megtehető út) esetén e mozgástípusoknak és a golyó megtett út során tanúsított viselkedésének kiemelkedő jelentősége van. Amennyiben az asztal fölött pontosan

$$\frac{7}{5}R$$

magasságban találja el a dákó a golyót, a golyó $v = R\omega$ sebességgel tisztán gördül. Ez korlát nélküli út esetén természetes megálláshoz vezet. Korlátozott út (azaz célgolyóval való találkozás) esetén a lökő golyó és a célgolyó közötti érintkezés „találati vastagsága” (vagyis, ha a lökő dákó szemszögéből nézzük és a két golyó teljesen takarja egymást, akkor 1, különben 0 és 1 között van) határozza meg, hogy mennyit veszít a lökő golyó az érintkezés pillanatában még fennálló mozgási energiájából. Ez a veszteség teljes érintkezés esetén (vagyis a golyók középpontját összekötő szakasz a lökő golyó haladási irányával esik egybe) a legnagyobb. Ennek elméletével és mérésével későbbi cikkünkben foglalkozunk.

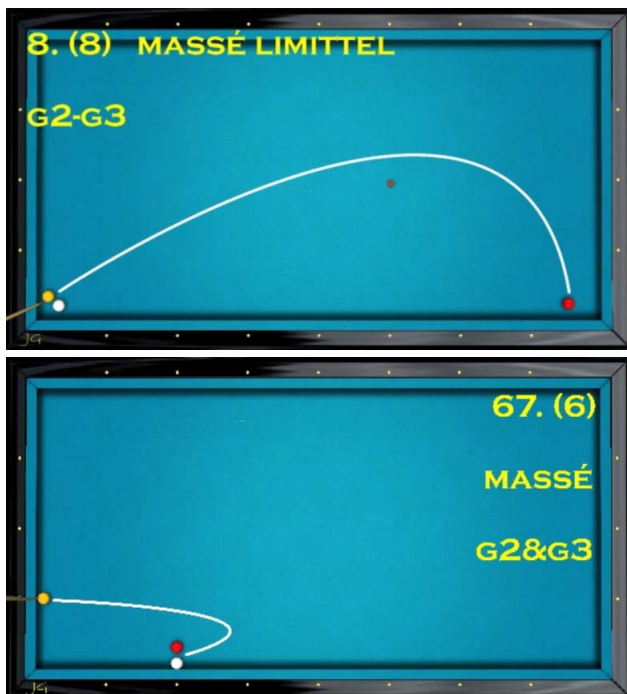


4. ábra. Négy nevezetes lökéstípus.

A 4. ábra 1. sorában látható, síber (magyarul követő) lökés esetén a dákó a kritikus pont felett löki meg a golyót, az gyorsabban forog ($\omega > v/R$), mint ami a tiszta gördüléséhez szükséges, csúszva forgást végez. Korlát nélküli út esetén a súrlódás lelassítja a golyó forgását addig, amíg tisztán gördül. Korlátozott út esetén a célgolyóval való találkozás után a lökő golyó folytatja útját, a korábbi csúszás mértékétől függően csúszva, köszörülve, forogva vagy tisztán gördülve.

A 4. ábra 2. sorában látható visszahúzás esetén a dákó jelentősen a kritikus pont alatt löki meg a golyót, a lökő golyó a haladási irányhoz képest visszafelé forog, miközben csúszik. Korlát nélküli út esetén a súrlódás lelassítja a golyó forgását addig, amíg forgási iránya megfordul, ezt követően tisztán gördülve halad tovább. Korlátozott út esetén, amennyiben a célgolyóval még visszafelé forgás közben érintkezik a lökőgolyó, úgy a rugalmas ütközést követően lendületét átadva egy pillanatra megáll, majd a pillanatnyi forgásának és a súrlódásnak köszönhetően ellentétes irányba visszaindul.

A 4. ábra 3. sorában a stoplökés általános változata látható, aminek során a dákó enyhén a golyó középpontja alatt talál. E lökéstípust célszerű nagyobb lendület átadásával végezni, ugyanis ez garantálja, hogy a golyó minél hosszabb úton csússzon, mozgása ne forduljon át gördülésbe. Csúszás közben végig a haladási irányával ellentétes minimális forgást produkál, majd mindennek eredményeként korlátozott útján a célgolyóval való találkozást követően a lökő golyó mozdulatlanul megáll az ütközés pillanatában felvett pozíciójában. A lökés (játékcél szempontjából) sikertelen kivitelezésekor a célgolyóig megtett úthoz képest nem elégséges lendület megvásztása nem tudja biztosítani a csúszás fenntartását, a csúszás átfordul gördülésbe, amely mozgással történő érintkezés nem eredményezi a lökőgolyó meg-



5. ábra. Masszé (ívelt) lökések (saját szerkesztés).

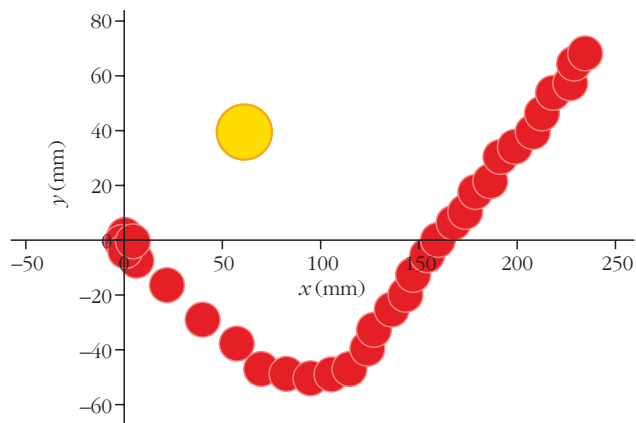
állítását, az 1. pontban ismertetett jelenség miatt kezdeti lendületének megmaradt kis hányadával a lökőgolyó továbbgördül.

A 4. ábra 4. sorában technikailag a 2. sorban ismertetett visszahúzó lökést alkalmazzuk, amellyel azonban ezúttal nem a lökőgolyó visszahúzása, hanem – az előbbi példával azonosan – megállítása a célunk. Mint ismertettük, a visszafelé forgás közbeni csúszás korlát nélküli (vagy korlátozott, de alábecsülten hosszú) úton egy adott pillanatban átfordul haladási iránnyal megegyező gördülésbe. Jelen lökéstípus célja, hogy a lökést kivitelező játékos úgy mérje fel a golyó felületén eszközölt találati mélységet (perdületet), és a lökés erősségét (lendületet), hogy e kritikus pillanat pontosan a lökő golyó és célgolyó érintkezésének pillanatával egyezzen meg.

Műlökés

A műlökés hivatalos 100 figurájának, versenyeken és bemutatókon történő kivetítés céljára készült elektronikus változatainak alapját a „Carom3D” nevű, szabad

6. ábra. A masszélökés kezdő pillanata (a). A golyó elkanyarodik (b). A golyó egyenes mentén mozog (c).



7. ábra. A meglökött biliárdgolyó irányváltozásának szöge a 6. ábrán látható masszélökéskor: $92,6$ fok. A sárga kör – nem méretarányos módon – az akadályt jelzi.

felhasználású szimulációs biliárdprogram szolgáltatta, amit 1999-ben fejlesztettek, és 2000-es megjelenésekor azonnal hatalmas népszerűsége tett szert először Dél-Koreában, majd több országban is.

A biliárdfigurákat leíró koordináták segítségével a beállított golyópozíciók, a figurák gyakorlati kivitelezéséhez illeszkedő dákótartási irány és lökési szög ábrázolása, a lökés kivitelezése szempontjából jelentős a golyók útjának pontos ábrázolása (5. ábra), és a lökés technikai megnevezése. Masszé lökés gyakorlati kivitelezését szerzőtársunk (Renkus) mutatja be a 6. ábrán.

A 7. ábrán egy masszélökés pályája látható LabCam programmal rögzítve, Excelben ábrázolva és az irányváltozás szögét leolvastva: $180^\circ - 87,4^\circ = 92,6^\circ$.

Összefoglalás

Jelen bevezető cikkünket figyelemfelkeltőnek szántuk, és esetleg az új NAT sportfizika témakörében is felhasználható lesz a fizikaórákon.

A biliárd témakörén belül is nagyon sok lökést lehetne elemezni, azonban a mindenre kiterjedő fizikai elemzésük reménytelen feladatnak látszik. Azt nem ígérhetjük, hogy biliárdos cikkeink alapján valaki profi műlökő vagy poolbiliárdos lesz, de a tudatosabb felkészülés és sok gyakorlás már ígéretes eredményekkel kecsegtet. A műlökés témakörben is szeretnénk még kitérni más lökésekre, ütközésekre, azok fizikai hátterére. Következő cikkünkben vizsgálni fogjuk a dákó, a kréta, az asztal szerepét, az asztal szélével való ütközést és kitérünk bizonyos kenőanyagok használatra is.

Irodalom

1. http://www.atomcsill.elte.hu/letoltes/foiak/9_evf/atomcsill_9_11_Sasvari_Laszlo.pdf
2. <https://www.elte.hu/content/biliard-otkor.e.5160>
3. https://billiards.colostate.edu/physics_articles/Hierrezuelo_PhysEd_95_article.pdf

MOZGÁS A FORGÓ FÖLDÖN: A CIKLONOKTÓL AZ EÖTVÖS-MÉRLEGIG

– e-tananyag középiskolásoknak

Szeidemann Ákos
Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata
Gróf Andrea
Karinthy Frigyes Gimnázium, Budapest
Tél Tamás
MTA–ELTE Elméleti Fizika Kutatócsoport

Cikkünkben egy olyan elektronikus tananyagot mutatunk be, amely iránymutató és hiánypótló lehet a fizikatanítás, azon belül a környezetfizika egy fontos fejezetének gyakorlatában. Meglehetősen gyorsan változó világunkban az oktatás nehezen tud lépést tartani a diákok információszerzési stratégiáival és igényeivel, amit az utóbbi időszakban felerősített a pandémiás helyzet is. Azaz, sokkal nagyobb hangsúlyt kellene kapnia az önálló ismeretszerzésre és rendszerezésre ösztönző tanulási lehetőségeknek, kereteknek. Praktikusán ez elsősorban az internet „csatornáján” keresztül működtethető, hiszen a fiatalok elsődleges információforrásává lépett elő a világháló. Sajnos azonban a diákokban nehezen alakul ki a kritikus gondolkodás, így nagy gondot kell fordítani arra is, hogy fejlődjenek az állhírek és áltudományok felismerésében. A témaválasztásnál fontos szempontnak tartottuk azt a tény is, hogy az új NAT bevezetésével tovább csökkent a fizika és a földrajz tantárgyak óraszám, ezért még égetőbbé vált a háttérterületekhez kapcsolódó jelenségek oktatásának kidolgozása.

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.



Szeidemann Ákos kémia–fizika szakos tanárként végzett az ELTE-n 1998-ban, azóta a tatai Eötvös József Gimnázium tanára. Kiemelt figyelmet fordít a tehetséggondozásra, több mint 20 éve az Öveges József Emlékverseny egyik szervezője. 2014-ben megvédett doktori értekezésében a környezetfizika középiskolai tanítási lehetőségeit tárgyalta. Részt vett az MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport munkájában. Jelenleg kutatótanár.



Gróf Andrea 1991-ben szerzett matematika–fizika tanári diplomát az ELTE-n. Azóta a budapesti két tanítási nyelvű Karinthy Frigyes Gimnáziumban tanítja mindkét tárgyat angol nyelven. Az ELTE fizikatanári doktori programjának végzés előtt álló hallgatójaként azzal foglalkozik, hogy miként lehet a hagyományosan a földrajz tantárgy keretében tárgyalt jelenségek fizikai hátterét a középiskolai oktatásban bemutatni.

Napjainkban a hírek vezető témái között gyakran megjelenik a klímaváltozás és az emberiség ebben játszott szerepének elemzése. A komplex jelenségek megértése sok esetben egyszerűsítéseket hoz magával a közérthetőség érdekében. A háttérben meghúzódó fizikai törvényszerűségek azonban megfelelő anyag segítségével egy középiskolás számára is érthetővé válnak, ha kellően motivált a témában.

A forgó Földön zajló nagyskalájú légköri és óceáni áramlások esetében az alapvető hatás a Coriolis-eltérülés, ezért *A körbintától a ciklonokig és a Golf-áramlatig: Útikalauz meglepetésekkel* című¹ e-tananyag középpontjában (amely egyéni tanulásra és tanórán is használható) ennek megértése áll. A tananyag angol nyelven is elérhető.²

A Coriolis által fölmert hatás a középiskolai oktatásban is megjelenik, de Magyarországon csak a földrajz tantárgy tananyagában szerepel. A középiskolai fizika nem foglalkozik e jelenséggel, így az ezzel kapcsolatos tévképzetek gyakran tovább élnek a diákokban. A tananyag felépítésekor ügyeltünk arra, hogy az elmélyülést kevésbé igénylő, illetve a részletesebb fizikai háttér megértését is megkívánó diákok egyaránt komplex képet kapjanak a Coriolis-hatás jelentőségéről. Az alapvetően lineáris felépítésű törzsanyag három egyszerű összefüggés köré épül, de tartalmaz „leágazásokat”, amelyek az adott probléma finomságainak kibontására tesznek kísérletet. Az oldalon a megértést segítő videók is szerepelnek, továbbá érdekességek és különböző nehézségi fokú számítási feladatok is helyet kaptak, s igény esetén a megoldásuk is megjelenik. Azt reméljük, hogy a diá-

¹magyarul: <http://theorphys.elte.hu/fiztan/CoriolisH>

²angolul: <http://theorphys.elte.hu/fiztan/Coriolis>



Tél Tamás az ELTE-n szerzett fizikus diplomát 1975-ben. Jelenleg ott emeritusz professzor. Kutatási témái a nemegyensúlyi és kaotikus rendszerektől a klímadinamikáig terjednek. A Kármán Laboratórium egyik alapítója. 2007 és 2021 között a Fizika tanítása doktori program, 2011 és 2021 között az MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport és a 2016 és 2021 között létező MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport vezetője volt.



$$\frac{D}{L} = \frac{\Omega L}{U}$$

I. Alapjelenség: a mozgó testek eltérése

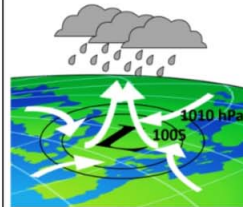
Megtanuljuk, hogy a forgó korongon mindig eltérülnek a mozgó testek, és felfedezzük azt az összefüggést, amely adott forgási szögsebesség mellett kifejezi az eltérés mértékét.



$$\frac{D}{L} = \frac{\Omega_V L}{U}$$

II. A forgó Föld mint körhinta

Felismerjük, hogy a forgó Föld gömb alakja befolyásolja az eltérés erősségét, amely tehát függ a földrajzi szélességtől. Becslést adunk az emberi léptékű mozgások esetében fellépő eltérésre, és megállapítjuk, hogy hétköznapi mozgásokban az eltérés igen kicsi.



$$S = \frac{\Omega_V L}{U}$$

III. Erős Coriolis-eltérés

Megértjük, hogy a legtöbb nagyskálájú, csaknem az egész Földre kiterjedő mozgás esetében (illetve forgatott tartályokkal végzett analóg kísérletekben) jelentős mértékű eltérés lép fel, mely teljes fordulatot, örvénylő mozgást eredményez. Felfedezünk néhány meglepő következményt is.

1. ábra. A törzsanyag három fő modulja címmel és rövid ismertetéssel. A címoldalakon látható az a három egyszerű összefüggés, amelyeken a tárgyalás alapul.³

kok a tananyagban való végighaladás közben számos tévképzettől (például a következőkben tárgyalt lefolyó, Egyenlítő környéki hatás) megszabadulnak, illetve megértik a forgó Földön zajló áramlások egyik alapvető befolyásoló tényezőjének hatását.

Az e-tananyag felépítése

Az e-tananyagban szereplő tartalom kulcselemeinek megismerése alapján könnyedén átlátható az összeállítás logikája és célja. Gondolatmenetünk alapja a Coriolis-hatás alapvető, de alig ismert tulajdonsága, hogy a hatás „erőssége” növekszik a távolsággal és földrajzi skálán dominánssá válik. A törzsanyagban végighaladva az érdeklődő olvasó gyorsan kaphat átfogó képet a témáról, ugyanis az itt található információk könnyedén megérthetők. Természetesen bíznunk abban, hogy ezzel már sikerül annyira felkelteni az olvasó kíváncsiságát, hogy a mélyebb megértés legalább első rétegébe szívesen bepillantson és türelmesen végigvezesse magát a felkínált három egymásra épülő „modulon” (1. ábra).

Az oldal egy, az interneten most is elérhető, „megnyerő” kisfilmmel indul, amely – a még nem szakavatott olvasó számára – ismerős magyarázat lehet a Coriolis-hatással kapcsolatban, tudniillik az Egyenlítő két oldalán, attól 20-20 méterre, mutatják be a szereplők a szokásos lefolyós kísérletet. A törzsanyag egyik alap-

vető célja, hogy a diákok maguk jöjjenek rá: a látott „kísérlet” csaláson alapul. Ezzel felhívjuk a figyelmet arra is, hogy az interneten található források nem mindig megbízhatók.

A tananyagban mindvégig hangsúlyozzuk, hogy a megértés legfontosabb összefüggése az eltérés mértékét leíró kifejezés. Az érdeklődő olvasó gazdag szemléltető anyagok és példák segítségével tetszőleges mélységig eljuthat a fizikai háttér megértésében.

Ennek első lépéseként (az I. modulban) olyan otthon is elvégezhető, „papírlapos” kísérleteket mutatunk be, amelyek már alkalmasak a jelenség kvalitatív értelmezésén túl annak kvantitatív vizsgálatára is. Az elemzést kisfilmekkel és részletes magyarázatokkal segítjük.

Az I. modul fontos gondolati lépése az eltérés mértékének becslése, illetve annak matematikai definiálása (lásd később), amely a további vizsgálódások, elemzések alapja. Ezért is fontos, hogy a nagyságrendek összehasonlítására olyan mennyiséget vezessünk be, amely könnyen értelmezhető.

A II. modul a Földön zajló, emberléptékű mozgásokra fókuszál, vagyis azokra az esetekre, ahol a Coriolis-hatás gyenge. Bemutatjuk, hogy a forgás hatása függ a földrajzi helytől. Központi szerepet játszik a fürdőszobai lefolyó mindenki számára érdekes példája, amelyet elemezve megértjük, hogy mindkét forgásirány előfordulhat, hiszen a Coriolis-hatás olyan gyenge, hogy az egyedül általa létrehozott, óramutatóval ellentétes forgást más hatások elfedik. E példán túl tárgyalja az anyag a fizikatörténet szempontjából is érdekes Foucault-ingát és Eötvös-mérleget is. 2019 a nemzetközi és hazai fizikatörténet szempontjából kiemelt év volt, ugyanis Eötvös Loránd tiszteletére centenáriumi megemlékezések zajlottak. Ennek egyik méltó megnyilvánulása a fizika OKTV döntőjének mérési feladata volt az I. kategóriában [1].

³A címoldalokon szereplő összefüggések a Coriolis-eltérés síkbeli nagyságát jellemző U átlagos sebességű mozgás L nagyságú elmozdulása után. Ω a forgó korong sebessége, Ω_V pedig a Föld forgási szögsebességének helyi függőleges (vertikális) komponense. D az eltérés nagysága, s az első két kifejezés – gyenge eltérés esetén – nagyon jó közelítéssel érvényes becslést ad rá. A harmadik összefüggés is becslés a Coriolis-eltérés erősségére, de ekkor az erősség S mérőszáma már nem felel meg a D/L aránynak.

A versenyzőknek az ELTE TTK által elkészített modern Eötvös-mérleggel (2. ábra) kellett az Eötvös-effektust vizsgálniuk, felidézve az eredeti mérés elvét és gondolatmenetét. További hétköznapi jelenségeket is találhat az olvasó ebben a részben: a folyók aszimmetrikus partmosása és a repülőgépek Coriolis-kompensálása is tárgyalásra kerül.

A tananyag utolsó része a Földön zajló nagyskalájú áramlásokkal foglalkozik. Az elsődleges cél a ciklonok forgásának megértése. Kiderül, hogy a ciklonok hatalmas légköri felfolyók, amelyek mozgását tényleg a Coriolis-hatás dominálja, s ezért bennük a szél nálunk mindig az óramutatóval ellentétes körüljárás irányában fúj. De kitér a fejezet a szélirány és a nyomáskülönbség viszonyára, az óceáni áramlásokra [2–4] és a laboratóriumban elvégezhető modellkísérletekre is.

Minden modul végén egy kérdéssor található, amely segítségével mindenki önállóan tudja ellenőrizni a megszerzett tudásának pontosságát. A 80%-nál jobb eredményt elérő megfajítottakat az oldal smiley-val jutalmazza. Ezt kiemelten fontosnak tartjuk, hiszen a teszt kitöltésének sikeressége a tananyag hasznosságának, illetve hatékonyságának mérőszáma is egyben.

Az e-tananyag fizikai háttere

Már a papírlapos kísérlet [5, 6] eredményéből is belátható, hogy a Coriolis-gyorsulás függ a mozgó test v sebességétől és a forgó vonatkoztatási rendszer Ω szögsebességétől:

$$a_c = 2v\Omega.$$

A kirajzolódó görbe 3. ábrán betűkkel is jelölt szakasza jó közelítéssel parabola, így a forgó rendszerben a mozgás irányára merőlegesen fellépő D eltérés becsülhető az ismert összefüggéssel:

$$D = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}2\Omega U\left(\frac{L}{U}\right)^2 = \frac{\Omega L^2}{U}.$$

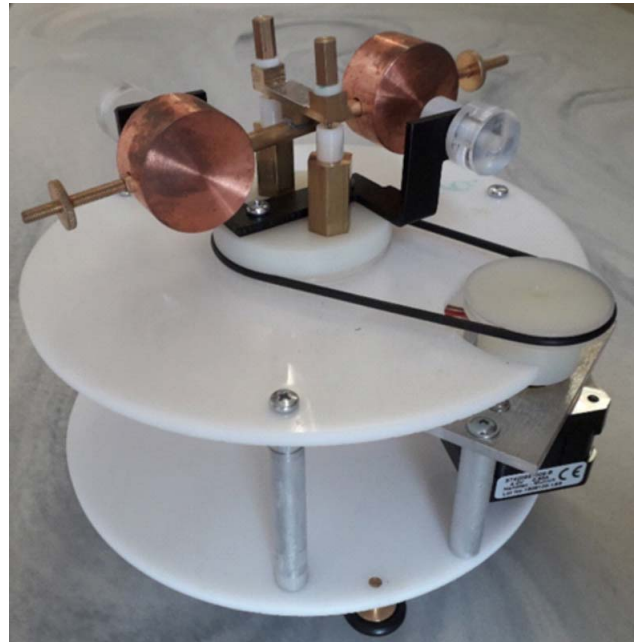
Itt gyenge elterülést feltételezve az U átlagsebességű mozgásban az elmozdulásra merőleges irányú Coriolis-gyorsulást $2\Omega U$ -val, a kiindulási irányban L távolság megtételéhez szükséges időt pedig L/U -val becsültük.

Ebből a hatás erősségét jól mérő relatív eltérés [7]:

$$\frac{D}{L} = \frac{\Omega L}{U}.$$

Ez a dimenziótlan mennyiség alkalmas arra, hogy megértsük a Coriolis-hatás jelentőségét forgó korongon és a forgó Földön egyaránt. A kapott összefüggés jelenik meg az első címlapon az 1. ábrán.

A forgó Földön a szögsebesség felületre merőleges (vertikális) Ω_v komponense játssza a papírlap Ω szögsebességének szerepét, és D a helyi vízszintes síkban



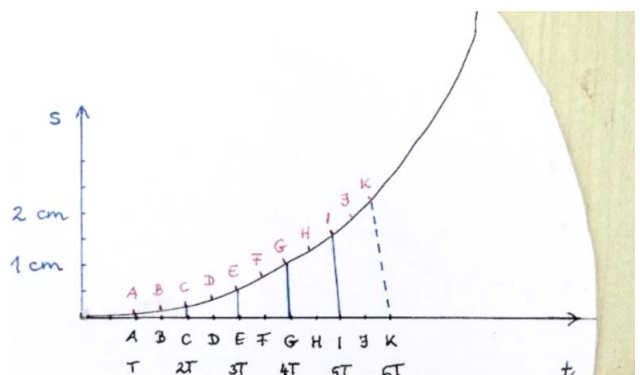
2. ábra. Modern Eötvös-mérleg, amelyet az ELTE TTK Fizikai Intézet készített a fizika OKTV döntőjének mérési feladatához (Szeidemann Ákos felvétele).

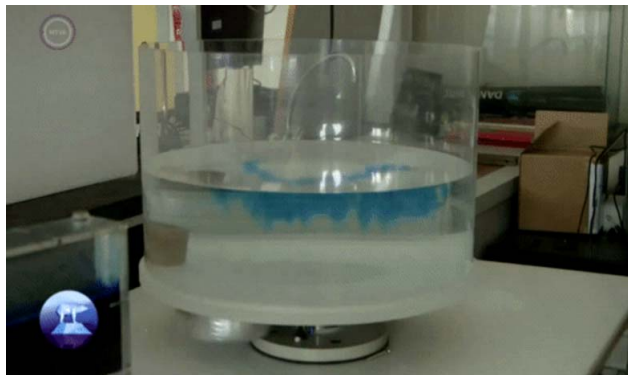
érvényesülő eltérés. A figyelmes diák már itt észreveheti, hogy az Egyenlítőn a Föld szögsebessége a helyi vízszintes síkba esik, $\Omega_v = 0$, a Coriolis-hatás nem érvényesül. Mit mutathatnak akkor a nyitó kisfilmben látott örvénylések?

Közepes szélességeken $\Omega_v = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/s, így az ott-honi lefolyóban ($L = 1$ m, $U = 1$ m/s) $D/L = 5 \cdot 10^{-5}$, a hatás gyenge, a víz foroghat mindkét irányba, azonban ciklonok esetében ($L = 1000$ km, $U = 10$ m/s) a hatás erőssége $D/L = 5$, mutatva, hogy a Coriolis-eltérés nagyon nagy. Vagyis nem véletlen, hogy amit nem találunk a lefolyóban, az erőteljesen jelen van a ciklonok által uralt mindennapi időjárás-előrejelzésekben.

Az összefüggésből az is egyértelműen kiolvasható, hogy erős Coriolis-hatás laboratóriumban is megvalósítható a földnél kisebb méretskálán a Föld szögsebességénél nagyobb, a lemezjátzóénál valamivel kisebb szögsebességgel egy forgó asztalon (4. ábra).

3. ábra. Egy papírlapos kísérletek eredménye, amelynek elemzése arra vezet, hogy a görbe parabolaként indul.





4. ábra. A forgatott edényben levő vízbe fecskendezett kék festék hasonlóan terjed szét, mint ahogy a magas légkörben a sarki fényt kibocsátó ionizált gázok, amelyek áramlását a Coriolis-hatás dominálja (az ELTE Kármán Laboratórium felvétele [8]).

Az e-tananyag hosszú fejlesztési folyamaton ment keresztül, amibe bevontunk diákokat is. Természetesen a továbbiakban is szeretnénk a felhasználók észrevételei alapján javítani a tananyag tartalmát és formáját, ezért fontosnak tartjuk, hogy aki hasznosnak tartja az oldalt a fizikatanítási gyakorlat számára, építő kritikával forduljon a szerzőkhöz bizalommal.

Szívesen vesszük a kollégák bekapcsolódását a kipróbálásba, ezért aki szívesen vesz részt szakmai konzultációban, kérjük, jelentkezzen a szeidiak@gmail.com címen. Az érdeklődők számára létrehoztunk egy szakmai fórumot (kornyifiztan@googlegroups.com).

A jelenleg érvényes NAT a gimnáziumok tizenegyedikes tanulói számára felmenő rendszerben heti kettő óra keretében természettudományok tanulását írja elő. Ennek kihasználására többféle lehetőség is kínálkozik. Azt gondoljuk, hogy e tantárgy keretében az interdiszciplináris témák körüljárása hasznos lehet a tanulók számára. Ötletadó lehet az MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport a fizika középiskolai oktatásának megújításával foglalkozó munkája: az eddig publikussá vált anyagok közül – amelyek szá-

mos környezetfizika vonatkozás mellett a modern fizika több területét, mint például a kvantumfizika, félvezetők, szenzorok, csillagászat, káosz, fraktálok is lefedik – több is alkalmas lehet e célra.⁴ A fizika és földrajz határterületeinek tárgyalására egy modulként a forgó Földön zajló jelenségek bemutatására, azok értelmezésére alkalmasnak tartjuk a Coriolis-hatást feldolgozó e-tananyagunkat, ezért azt gimnáziumban tanító kollégák szíves figyelmébe ajánljuk.

Irodalom

- Groma I.: Az Eötvös-mérleg. *Fizikai Szemle* 69/12 (2019) 408–414., http://fizikaiszemle.hu/uploads/2020/01/fizszem-201912-gromaistvan_09_43_37_1579164217.7359.pdf
 - Gróf A.: Honnan fúj a szél, avagy okosabb-e egy ötödikes, mint Sylvester Stallone?, *Fizikai Szemle* 67/3 (2017) 89–93. http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/magypub/pub/kornyezet/ga_fizszem_2017_3.pdf
 - Gróf Andrea: *Tantárgyak határán: fizikai magyarázatok, földrajzi és környezettudományi ismeretek a középiskolában*. Doktori értekezés, ELTE, 2018. http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/doktorik/ertekezések/grof_andrea.pdf
 - A. Gróf: From Pressure Maps and Wind Velocity to Northern Lights and Other Fascinating Phenomena on the Rotating Earth. *Phys. Teach.* 59 (2021) 103. http://fiztan.phd.elte.hu/english/student/rotating_earth.pdf
 - Szeidemann Á.: Fizika és földrajz határán – Tanítható-e a Coriolis-erő? *Fizikai Szemle* 63/10 (2013) 352.
 - Szeidemann Á.: *Környezetfizika – egy sokoldalú lehetőség a középiskolai fizikatanításban*. Doktori értekezés, ELTE, 2015. <http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/doktorik/ertekezések/sza.pdf>
 - Jánosi I., Tél T.: *Bevezetés a környezeti áramlások fizikájába: Légköri, óceáni folyamatok és éghajlati hatásaik*. Typotex, Budapest, 2012. http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/EJ-Janos-Tel_kornyaram.pdf
 - Vincze, M.: Modeling Climate Change in the Laboratory. In Király, A., Tél, T. (eds.) *Teaching Physics Innovatively*. PhD School of Physics, Eotvos University, Budapest (2016) 107–118.
- Javasolt irodalom: A. Gróf, Á. Szeidemann, T. Tél: Challenges in developing an interdisciplinary teaching material on effects related to the Earth's rotation. *Canadian Journal of Physics* 98 (2020) 719–725. <http://fiztan.phd.elte.hu/english/student/cjp-2019-0447.pdf>

⁴<http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/elearning/index.html>



LEGUTÓBB 793.789 FORINTTAL TÁMOGATTÁK
A TÁRSULAT MUNKÁJÁT, KÖSZÖNJÜK!

SZÁMÍTUNK RÁD, LÉGY
SZERKESZTŐNK KÖZÉ!

Adószámunk: 19815644-2-43

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtktár, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.

Kéziratokat nem örzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulathoz vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyzárlán.

Megjelenik havonta (nyáron duplaszámmal), egyes szám ára: 1000.- Ft (duplaszámé 2000.- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)

AZ ARANYMETSZÉS ÉS MÁS ARÁNYOK

A tudomány és a művészet kölcsönhatása

Stonawski Tamás
Nyíregyházi Egyetem

A reneszánszban megjelenő arany metszés azon arány elnevezése, amely *Eukleidész Elemek* című művében szélső és közbülső arányként szerepel. Maga a szerző nem tulajdonított nagyobb jelentőséget az aránynak, először az ötszög szerkesztésének egyik lépéseként tartotta számon. Az írásunkban azzal foglalkozunk, hogy ez az arány vajon kitüntetett-e az arányok között, vagy csak egyik a sok közül, illetve milyen lehetőséget rejt a fizika oktatásában.

Bevezetés

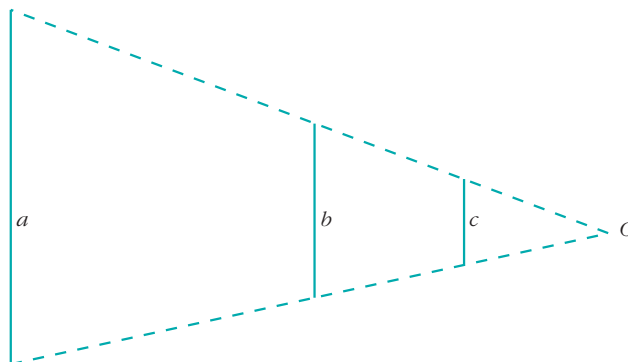
„Az arányosságokat nemcsak a számokban, méreteken találjuk meg, de ott van mindenben, ami hat ránk, a hangokban, mozdulatokban, tájakban, időérzékelésünkben.”

Leonardo da Vinci

Két szakasz általános értelmezésben tetszőleges arányban lehet egymással, azaz a két szakasz hosszának aránya tetszőleges egész, racionális, de akár irracionális szám is lehet, az arányszámot csakis a szakaszok hosszainak hányadosa határozza meg.

További vizsgálódásainkhoz alkalmazzuk a hasonlóság fogalmát, most nem síkidomokra, hanem szakaszokra „kiterjesztve”! Két alakzat hasonló, ha egy nagyítás és egy egybevágósági transzformáció kompozíciójával egymásba vihetők. A definíció alapján elindulva tehát minden szakasz hasonló a másikhoz (például mint minden szabályos sokszög is). Ha viszont nem két szakasz között, hanem legalább három szakasz között értelmezzük a hasonlóságot, akkor *csoport-hasonlóságról* beszélhetünk.

Így az 1. ábrán látható három szakaszt csoport-hasonlónak mondhatjuk, hiszen nagyságrendbe rendezve arányuk páronként megegyezik. Ez a csoport természetesen kibővíthető háromnál több, tetszőleges



1. ábra. Az ábrán szereplő 3 szakasz aránya: $a/b = b/c = \lambda = 2$.

számú szakaszra is. Ha csoport-hasonlóság mellett további feltételt szabunk az összeadás/kivonás műveletével ($b+c = a$, azaz a két kisebb szakasz hosszának összege megegyezik a nagyobbik szakasz hosszával), akkor a hasonlósági arány:

$$\frac{b+c}{b} = \frac{b}{c}. \quad (1)$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalát c/b -vel megszorozva c/b -re másodfokú egyenletet kapunk, amelynek pozitív gyöke irracionális szám:

$$\frac{c}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \approx 1,618. \quad (2)$$

Azaz a feltétel ($a = b+c$) egyetlen hasonlósági aránynál áll csak fent, ha $\lambda = 1/\Phi \approx 0,618$.

Ha más feltételeket szabunk, például $bc = a$ vagy $b^c = a$, akkor a hasonlósági arány az a, b, c paraméterek valamelyikétől függő változó, tehát végtelen sok hasonlósági arányt kapunk megoldásként.

A csoport-hasonló szakaszok hosszainak nagyságrendbe állításával mértani sorozatokat kapunk. Például: ha $\lambda = 2$, akkor: $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$, az (1), (2) egyenletek alapján, pedig:

$$1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}, \dots, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Ha a Φ csoport-hasonlósági arányt figyelmen kívül hagyjuk és csak a kiegészítő feltétellel foglalkozunk ($a = b+c$) és $b = 1, c = 2$, akkor az irracionális tagok helyett egész számokat kapunk (a Fibonacci-számokhoz hasonlóan):

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

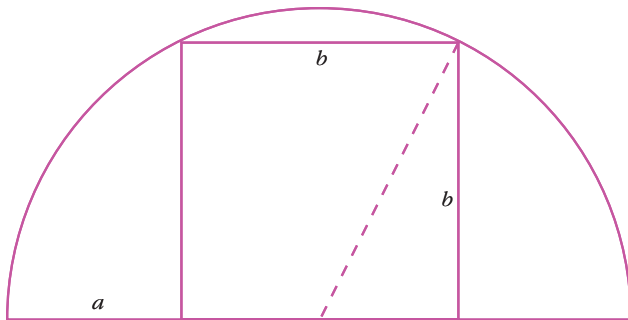
azaz:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 3.$$

A tanulmány a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatásával készült.



Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori program keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.



2. ábra. A b oldalú négyzet oldalfelezőjéből a szemközti oldal csúcsain áthaladó kör átmérője $2a + b$, ahol $b/a = \Phi$.

A szomszédos szakaszok arányaira itt a következő számokat kapjuk: 2, 1,5, 1,67, 1,6, 1,61. Észrevehető, hogy a hasonlósági arány nem állandó, de gyorsan tart Φ -hez.

A Φ arány első írásbeli nyoma Eukleidész *Elemek* című művében (körülbelül i. e. 300) szerepel, ahol a szerző az ötszög szerkesztésének egyik lépéseként említi. Azóta számtalan szerkesztés látott napvilágot, a talán legegyszerűbb szerkesztési eljárás a 2. ábrán látható.

Különösebb jelentőséget csak jóval később nyer az addig szélső és közbülső arányként ismert probléma: a 15. század végén *Luca Pacioli: Divina proportione* műve alapján, amelynek ábráit maga Leonardo da Vinci készítette. Teóriája alapján az egzakt matematikai formulában általános természeti törvényt látat meg. Írásában a világ teremtett rendje és a művészi szépség matematikai szabálya látszik megfogalmazódni. *Vitruvius* római építész, hadmérnök (i. e. 80–70 körül – i. e. 15 után) korábbi írásában Pacioli, az „isten arányt” véli már felfedezni, és az aranymetszés hamarosan az egész olasz reneszánsz egyik vezérlő eszméje lesz. Gondolatmenetéből világosan körvonalazódik: hogyha megtaláltatott a természet legfőbb aránya, mi sem természetesebb, hogy az „igaz” művészek műalkotásai is efféle komponálás szerint készülnek, tehát az arány alapján biztosított a lehetőség a műalkotások és a művészek objektív „osztályozására” is.

A fizika, a tudományok alappillére, a legbővebb természet, a Világegyetem viselkedésének szabályait kutatja, felfedezései a tudományokra, a filozófiára mai napig is nagy hatást gyakorolnak. A szabályosságok, a rendező elvek felfedezése a természetben az esetlegességgel szemben egy teremtett világ szemléletét váltotta ki több elismert fizikusban is. Számos különálló képlet és elmélet egyesítése sugallta az utat a „Mindenség működésének egysoros képletének” megtalálásához.

A világ harmóniáját például *Kepler* is lelkesen kereste, úgy hitte, hogy az akkor ismert hat bolygó (Merkúr, Vénusz, Föld, Mars, Jupiter, Szaturnusz) hordozó szférák (gömbök) közé a szabályos testek illeszthetők be sorban. Kepler az aranymetszésben a végtelen folyamatú újjánemzést látta: „Ez a mértani arány lehetett, úgy vélem, a Teremtő ideája a hasonlónak hasonlóból való nemződésének bevezetésére.”

Ezen elvnek felelnek meg a kristályok fejlődésének egyes szakaszai is, amikor az elemi kristálycellák arányai megegyeznek a makroszkopikus kristálytest arányaival. (Más kérdés, hogy ez az arány nem feltétlenül a Φ -vel kapcsolatos.) A kristálycellát kialakító fizikai törvényszerűségek a makroszkopikus test nemcsak formái, de egyéb fizikai-kémiai tulajdonságait (anyagi minőségét) is meghatározzák, míg a kristályhibák a környezet befolyásoló hatását mutatják. A növényvilágban is találunk önhasonló fajokat (például murok), vagy a Fibonacci-sorozatnak megfelelő levél-, szirmo- és termés-elhelyezkedést (például napraforgó, pagodakarfiol), de nyilvánvalóan a növényeknél még jelentősebb a környezet hatása, így az ideálistól való eltérés, a hibák száma lényegesen nagyobb, mint a kristályoknál. Az állatvilágban leggyakrabban emlegetett példa az aranymetszés kapcsán a Nautilus-polip és az ötkarú csillag. Növekedésükre jellemző a nem szigorú értelemben vett aránytartás, de az állatvilág meglehetősen erős környezeti befolyásoltsága sokkal mélyebb nyomokat hagy az egyes fajok fejlődésénél, mint a növénypopulációkban, ami akár lehet a könnyebb mozgáskoordináció kifejlődése a sikeresebb táplálékszerzés céljából is. A Nautilus-héjforma és annak matematikai leírása *Descartes* érdeklődését is felkeltette: 1638-ban határozta meg azt a spiráltípust, ahol a sugár és a megfelelő érintő által bezárt szög állandó, azaz ahol a sugarak növekvő mértani sorozatban követik egymást.

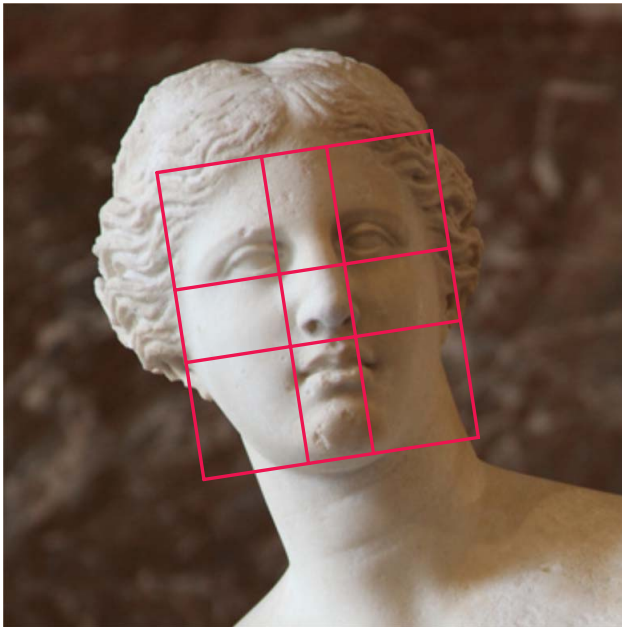
Az „egy törvényének” keresése *Einstein* „álmában” is testet ölt, miszerint létezik az összes fundamentális fizikai kölcsönhatásokat (erőket) magába foglaló elméleti rendszer, az úgynevezett „minden dolgok elmélete”, de említhetnénk a *Planck* által (1920) varázsformulának nevezett finomszerkezeti állandót is ($\approx 1/137$).

Dirac szerint a fizikai törvénynek matematikailag is szépnek kell lennie, *Leibniz* szerint pedig világunk minden világok legjobbjika.

Az emberi test és téglalapok arányairól

Az emberi faj sokféleségét a genetika és a történeti tényezők sorozatai határozták meg napjainkig. Az emberi test igen bonyolult felépítésű: több száz csont és még több izom alkotja. Ebből következően az arányítások lehetőségének száma is rendkívül nagy. A testalkat sokfélesége főként genetikai okokra vezethető vissza. Vitatható lenne egy bizonyos testalkatot vagy testarányt ideálisnak kikiáltani. Mégis, ha a többség által szépnek ítélt emberek arányait megvizsgál-nánk, és ezek az arányok elég nagy számú mintavétel alapján közel megegyeznének, akkor bizonyos törvényszerűséget fedeznénk fel, tudniillik a szépség matematikai megfogalmazását.

A harmonikus testarány és a szépség fogalma már az ókori görög szobrászoknál is összekapcsolódott, hiszen nem valóságos modellek után, hanem bizonyos képletek alapján alkották ideális férfiakat és nőket ábrázoló szobraikat (3. ábra). Ez a kapcsoló-



3. *ábra.* A milói Vénusz szobrának fejrészlete. Az arc az aranymetszés függőleges arányaiban: hajás fejbőr, szemvonal, orrhegy, állcsúcs, vízszintesen (itt a szimmetria is érvényesül): arcélek, belső szemzug, orrcimpák.

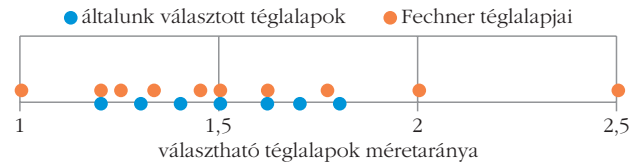
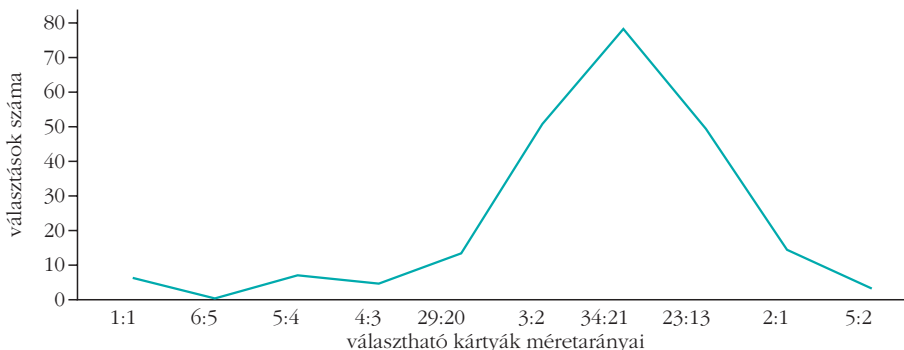
dás napjainkig is végigkíséri számos filozófus és művész állásfoglalását a széppel kapcsolatosan.

Aquinói Tamás szerint: „A szépség az, ami szemlélskor tetszést vált ki” és „a szépség a ragyogásban és a megfelelő arányban áll”. Majd a reneszánszban *L. B. Alberti* harmóniaként és széparányként határozza meg: a szépség a részek harmonikus elrendezésétől függ.

Az arány és a szépség eme összekapcsolása egyértelműen kijelöli a törekvést a „legszebb arány” meghatározására. Természetesen egy matematikai arány önmagában nem lehet szép, inkább valamiféle megnyilvánulása okán nevezhetjük annak. Talán oly módon keresendő, hogy az említett arány elsőbbséget élvez más arányokkal szemben, például praktikussági szempontok alapján mérlegelve éppen az egyszerűségéből fakadóan: „kevesebb utasítással adható meg”, „kevesebb kiindulási adat szükséges hozzá”.

Az aranymetszésre ez igaz, hiszen nem kell konkretizálni az arányt, mint például 1:2, hanem a két rész viszonyát az egészre vonatkoztatja. A természet sok

4. *ábra.* Fechner következtetése: amikor tíz kártya közül választották az alanyok a számukra legtetszősebb téglalapot, a vizsgálati alanyok 34,5%-a szívesebben részesítette a kártyát arányarányban. A második legkedvezőbb választás mindössze 22% volt.



5. *ábra.* A választható téglalapok arányai 1:1-től 1:2,5-ig. Az általunk használt téglalapok arányai egyenletesek az intervallumon, ettől csak az 1,618 tér el kissé.

esetben választja a kevesebb utasítással kivitelezhető folyamatokat, de ez semmiképpen sem bizonyító erejű arra nézve, hogy az aranymetszés lehet csak a szépség kiemelt aránya.

Az a gondolat, hogy az aranymarány esztétikai jelentéssel bír, *Zeisingtől* (1854) származik, *Fechner* pedig az 1876-ban elvégzett kísérletében az „aranymetszés” pszichológiai jelentőségét célozza meg. Fechner kísérletében nem emberi testrészeket tanulmányozott, hanem egyszerű síkidomokat: téglalapokat, amelyek látványukban is hordozzák az oldalaik arányát. Fechner azt vizsgálta és összegezte (4. *ábra*), hogy a kísérleti személyek bizonyos téglalapok közül melyiket találják a legtetszősebbnek (empirikus igazolás).

Fechner kísérletében számos hibát észleltünk: az általa választott téglalapok arányai nem egyenletesen osztották fel az intervallumokat (5. *ábra*) és tartalmaztak „elfajzott” téglalapokat is (például négyzet és erősen megnyújtott csíkszerű téglalap). Az alanyok a kártyákat sorba rendezhették, ilyen esetekben pedig feltehetőleg a középsőket választották szívesebben, illetve Fechner nem vette figyelembe azt a minimális küszöböt, ami alapján érzékileg még egyértelműen eldönthető két arányról, hogy különböző (azaz nagyon közeli arányok szerepeltek a kísérletében).

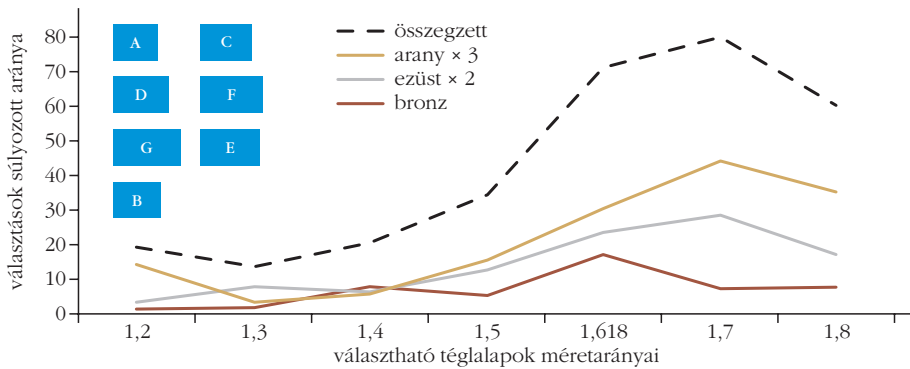
Fechner módosított kísérletét 2020. április elsején végeztük el egy internetes felületen kérdőív formájában, 7 téglalappal (5. *ábra*). A kérdőív leírása a következő volt.

„Téglalap-szépségverseny

Az arányosság és a szépség összekapcsolása már az ókorban is fellelhető. Vajon van-e mindenki által elfogadott szépség, vagy az mindenkinek más és más lehet? Objektív vagy szubjektív? E kérdés tisztázása érdekében kérem töltse ki az alábbi rövid kérdőívet, és vegyen Ön is részt a téglalap-szépségverseny zsűrijében!

Mit gondol, melyik a legszebb, legarányosabb téglalap? (I. helyezett) Melyik legyen a II., melyik a III. helyezett? Neme? Kora?” (A téglalapok a 6. *ábra* bal felső részében látható elrendezésben voltak.)

A kérdőívet 375-en töltötték ki 9 nap leforgása alatt.



6. ábra. A válaszadók többsége az 1,6–1,8-es arányokat részesítették előnyben a többivel szemben. A szaggatott vonal a súlyozottan összegzett választási gyakoriságot mutatja.

Mivel I–III. helyezést kellett adni a kérdezőknek (egy téglalapot csak egyszer lehetett választani a rangsorolásnál) a választásokat súlyozottan vettük figyelembe, az adatokat pedig ennek figyelembevételével ábrázoltuk (6. ábra).

A Fechner grafikonjának egyértelmű kiugrása helyett egy intervallum mutatta a maximumértékeket (1,6–1,8). Az összegzett grafikon értékeire kapott átlag 1,606 volt.

Természetesen a téglalap-szépségversenynél sokkal izgalmasabb a valódi szépségverseny, ahol többtagú zsűri és sok esetben a közönség pontozásai alapján kiáltanak ki valakit (nő, férfi és gyermek kategóriában) egy adott közösség szépségének, vagy ezek közül akár világszépének. A zsűri nem mérícskéléssel, hanem szemle alapján dönt a jelölt külseje, általános megjelenése, mozgása alapján, újabban figyelembe veszik a döntésnél a műveltséget és intelligenciát, stílust és kommunikációs képességeket is.

A több ember által, esetleg egy közösség véleménye alapján kihirdetett szépségek jó szolgálatot tesznek az aranymetszés és a szépség párhuzamba vonásában. A legegyszerűbb, ha egy virtuális rácshálót készítünk el valamilyen szerkesztőprogrammal, ahol a jobb és bal oldali (hasonlóan a fenti és a lenti) vonalak ϕ arányban osztják a háló keretének oldalhosszait. Ezt a hálót grafikus szerkesztőprogrammal ráillesztjük az alany frontálisan készített arcképére úgy, hogy a téglalap oldalai a külső arcélekre, az alsó állvonalra és a homlok tetején a hajás fejbőr kezdetére illeszkedjenek. A szépségversenyek győzteseinél a milői Vénusz arányai (3. ábra) köszönnek vissza.

Más kérdés, ha nem gondoljuk magunkat elég szépeknek, az orvostudománynak köszönhetően, plasztikai mű-

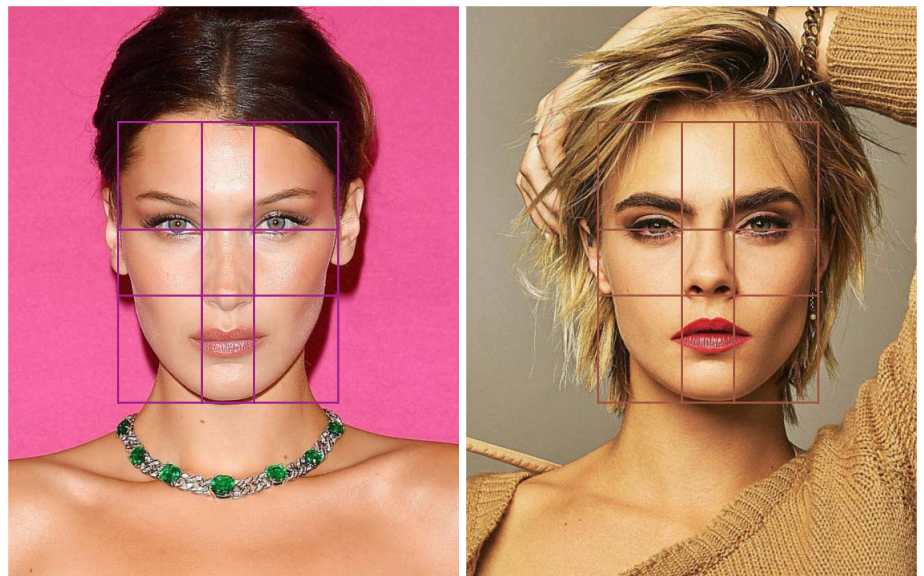
tétekkel megváltoztathatjuk arcunk jellegzetes arányait. De vajon milyen arányokat választunk, hogy elégedettek lehessünk a külsőnkkel? Julian De Silva plasztikai sebész a tudományt hívta segítségül: számítógépes program alapján osztályozta a páciensei véleményei szerint szépnek tartott hölgyeket. A program az aranymetszést kereste az arc objektumainak elhelyezkedése alapján (L. B. Alberti definíciója köszön vissza, lásd ko-

rábban). A kiválasztott személyek fotóin a szoftver szálékosan osztályozta, mennyire követik az arányok az aranymetszést. A kiválasztott szépségek alapján Bella Hadid közelítette meg legjobban az isteni arányt, 94,35%-os mutatóval (7. ábra). A kapott eredményeket egyszerűen ellenőrizhetjük, ha az aranyrácshálónkat ráillesztjük Silva helyzetettjeire: csakugyan majdnem tökéletesen követik az első helyezett arcobjektumai az aranyarányokat, míg a 10. helyezett Cara Delevingne magasabb homloka számottevő eltérést mutat.

Konklúziók

Az aranymetszés és az azt körülszövő misztikus állítások elég nehézkesé teszik az aranymetszés objektív megközelítését. Túlzás lenne azt állítani, hogy a természet egy normáját találtuk volna meg, de nem kétséges, hogy a természet egyszerű struktúráiban számos helyen felfedezhető az aranymetszés és a Fibonacci-sorozat. Az ember természet iránt érzett kíváncsiságának köszönheti, hogy felfedezte, majd alkal-

7. ábra. Julian De Silva plasztikai sebész egy, az aranymetszés szabályait alkalmazó számítógépes program segítségével a 94,35% tökéletességi mutatójú Bella Hadidot találta a legszebb nőnek, míg 10. helyezette Cara Delevingne lett (tökéletességi mutatója 89,99%).



mazta ezt az arányt a művészetekben is dinamikus aszimmetria néven, a mindent leíró „EGY” összefüggésétől azonban bizonyosan távol áll. Ha az arany-metszést egydimenziós önhasonlósági arányként értelmezzük, annak háromdimenziós megnyilvánulásai-ként maguk a fraktálok feleltethetők meg, amelyekben szintén fellelhetjük a természet alapvető rendező elvét. A fraktálok jelenlétét csak fokozatosan fedezte fel a tudomány: hosszú út vezetett a Weierstrass-függvény mellőzött rútkiskacsájától a fraktálművészeti alkalmazásokig, míg mára számos természeti jelenség leírásának kulcsa lett (például a káoszelmélet).

Az arany-metszés tanórai, szakköri alkalmazása izgalmas és sokszínű feladat, de egzaktságának megfelelően csak középiskolában van helye. Jó szolgálatot tehet mérések kivitelezésében, a szórás és átlagszámításban. (Az alábbiakban néhány mérési feladatot olvashatunk, amelyeket a tanulók az iskolai foglalkozásokon, de otthon is elvégezhetnek.)

A tudománytól elvárjuk az objektivitás minél magasabb, a szubjektivitás minél alacsonyabb mértékét. A 6. ábrán látható grafikon szubjektív választások eredményei, az adatok alapján kiszámított átlag pedig már objektív. Az átlag nagyon közel volt a ϕ -hez, de a vizsgálat konklúziójaként mégsem állíthatjuk, hogy a bennünk lévő szépérzék nagy mintavétel esetén minden esetben az arany-metszés alapján determinált lenne. Viszont újabb, hasonló kísérletek elvégzéséhez, mint más nyitott kérdések esetén is, nagymértékben ösztönzők lehetnek a szubjektív példák vizsgálata, ezt tudjuk kihasználni akkor is, amikor nem az osztályteremben lévő padok méreteinek, hanem testméretek (lásd alább a feladatban) átlagát és szórását számítjuk ki (majd az átlaggal és szórással összehasonlítjuk saját testméreteinket) egy célcsoporton, mert a tanítási-tanulási folyamat hatékonyságát az érzelmek köztudottan pozitívan befolyásolják. Az arany-metszés a fizikában főleg a káoszelméletben és a kvantumfizikában bukkan fel, ezen témák középiskolai tárgyalása magasabb matematikai előképzettséget kíván, de étvágygerjesztően hathatnak bizonyos feladatok, példák, amelyek ϕ -vel való egybeeséseket mutatnak (lásd a feladatokban alább). Az ilyen jellegű feladatok izgalmasabbnak tűnnek a tanulóknak, de vigyázni kell, nehogy elveszzenek a misztikum útvesztőjében. Az sem utolsó szempont, hogy a fizika társadalomban és az alapvető gondolkodásunkban elfoglalt helyét is hangsúlyozhatjuk, ha a tudományos szépségről, tudományos egészről beszélünk tanítványainknak.

Feladatok

Téglalap-szépségverseny

Vágj ki papírból olyan téglalapokat, amelyek egyik oldala rendre 5 cm, a másik pedig 6, 6,5, 7, 7,5, 8,09 \approx 8,1, 8,5, 9! Jelöld meg ezeket A, B, C, D, E, F, G betűkkel! Tedd bele egy borítékba, majd a borítékot add át a társadnak, és kérd meg, hogy vegyen részt a játékban, azaz alaposan figyelje meg a téglalapokat, és

rangsorolja szépségük szerint 1., 2. és 3. helyezéssel! Próbáld meg minél több társaddal lezsűrítetni a téglalapokat! Az adatok alapján számold átlagot és szórást, illetve ábrázold grafikonon a kapott értékeket!

Köldökarány

Egy gumiszalag egyik végére olyan hurkot kötünk, hogy a lábfejünk kényelmesen beleférjen, a másik végére pedig egy egyenes vonalzót illesztünk. A gumiszalag hossza 140 centiméteres legyen. Tegyük a lábunkat a hurokba, egyenesítsük ki a szalagot (nem szükséges megnyújtani) és jelöljük meg filctollal a talajtól számítva $140 \text{ cm} \cdot 0,618 \approx 86,5 \text{ cm}$ -nél!

a) Ellenőrző kísérlet: nyújtsuk meg különböző mértékben a szalagot és mérjük meg, hogy a jelöléssel megszabott szakaszok aránya milyen értéket adnak (10 mérés átlagolva, szórással).

b) Lépj bele a hurokba, az egyik társad húzza ki a szalagot úgy a fejed tetejéig, hogy a vonalzót vízszintesen érintse! Egy tollat helyezz a köldöködhöz a hasadra merőlegesen, majd egy másik társad mérje meg vonalzóval a toll és a szalag jelölésének (korábban filctollal) előjeles különbségét! (ha a vonal a toll fölött például 2 cm-re helyezkedik el, akkor $d = -2 \text{ cm}$) (átlagolva, szórással).

Téglalapplasztika

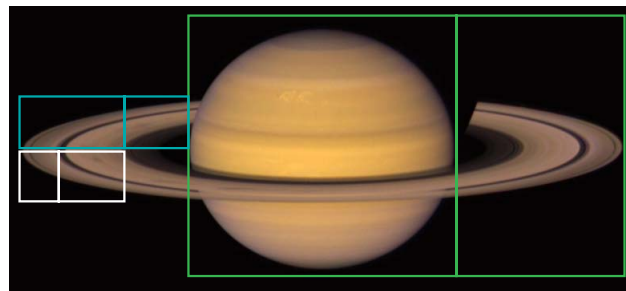
Két papírnégyzetet csúsztass el egymáson úgy, hogy a neked legtetszetősebb téglalapot kapd, majd rögzítsd gemkapoccsal vagy ragasztószalaggal. Mérd meg a téglalapod oldalainak a hosszát és számítsd ki az oldalak arányát! Számítsátok az osztályban az egyénileg kapott értékekből az átlagot és szórást!

Számold ki, hogy a Föld és a Hold sűrűségének aránya hány százalékban közelíti ϕ -t!

Szerinted mitől szép egy fizikai képlet? Keresd meg a neked legjobban tetszőt!

Számold ki a Föld és a Vénusz keringési idejének arányát! Hány százalékban közelíti ϕ -t?

Számold ki a képen látható arányokat! Mit tapasztalsz?



Irodalom

1. Marx György: Szépség és fizika. *Természet Világa* 128/4 (1997) 146–148.
2. Falus Róbert: *Az arany-metszés legendája*. Magvető Könyvkiadó, Budapest, 1982.
3. Hámori Miklós: *Arányok és talányok* Typotex Kiadó, Budapest, 1994.
4. <https://www.goldennumber.net/solar-system>

KÍSÉRLETEK NEMLINEÁRIS MÁGNESES ANYAGOKKAL A NAGYVÁRADI ADY ENDRE LÍCEUM FIZIKUMÁBAN

Bartos-Elekes István
fizikatanár, Nagyvárad, Románia

Mottó: *Egyes tankönyvekben a mágneses indukció egyenesen arányos a mágneses térrel, de ez nem jelenti azt, hogy a valóságban is így van!*

Még az 1960-as évek közepén egy különleges hang-erősítőt terveztem és építettem magamnak. Valódi sztereoó hangforrás nemigen állt rendelkezésre, ezért álsztereoó hatást hoztam létre. A mély és a magas hangokat külön csatornába vezettem, így a két keskenyebb hangsávban jobb hangminőséget tudtam biztosítani a hangszórók felé, ugyanis a kimenő transzformátorok tervezésekor a magas és mély hangok eléggé hű visszaadása egymásnak ellentmondó feltételek biztosítását igényli. A hangszórókat a szimfonikus zenekar szokásos ülésrendjének megfelelően helyeztem el: bal oldalon a magas hangok, jobb oldalon a mély hangok.

Annak idején a fellelhető nagyobb, mély hangú hangszórók mágneses igen gyenge volt, ezért a szétzedés után, a membránt megtartva, új lengőtekerccset és egy új elektromágnezt szándékoztam tenni az eredetiek helyébe. Felmerült a még jól hűthető, de a lehető legnagyobb mágneses teret biztosító elektromágnes megtervezése. Egy mérőkapcsolást állítottam össze a készülék elektromágnes vasanyaga alapvető mágneses tulajdonságainak a felmérésére. A hangszóró elkészült, a rendszer csodálatos, „lehelt” mély hangokat hozott létre.

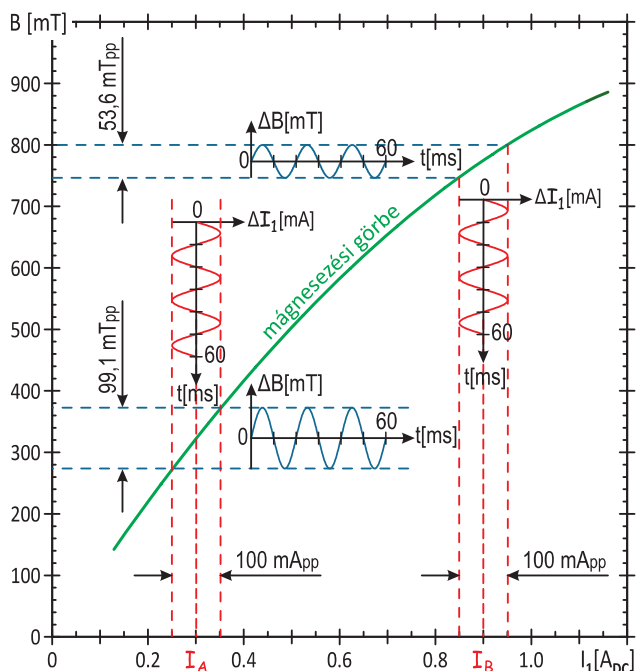
Itt nem álltam meg, a fizikatanári pályám során a mérőkapcsolás elve háromszor is visszaköszönt. A romániai OKTV (*Fizikai Olimpia*) 1997-es döntőjét Nagyváradon rendezték meg, a XI. és a XII. osztály kísérleti feladatainak megszerkesztését, valamint a készülékek elkészítését is rám bízta. A XI. osztály az említett mérőkapcsoláshoz hasonló kísérletet, a XII. osztály az elektron fajlagos töltése kísérleti meghatározását kapta (lásd *Fizikai Szemle* 2010/7–8). Az eredeti hangszórós mérőkapcsolás kísérlete a XVI. Schwartz Emlékverseny adatfeldolgozási versenyének is feladata lett. A két kísérletet az teszi érdekessé, hogy a jelenséget okozó áram növekedése a felülete-

sen megfigyelt következmény mértékét alig változtatja, gyengén, majd erősen csökken, sőt az e/m esetben elvileg meg is szűnhet. Mindkét kísérleti feladat lényege a látszólagos ellentmondás feloldása és magyarázata volt. A verseny után mindkét kísérlet 14-14 mérőhellyel bekerült a Fizikum szokásos laborgyakorlatok közé. A továbbiakban ezt a két kísérletet szeretném bemutatni a Fizikai Szemle olvasóinak.

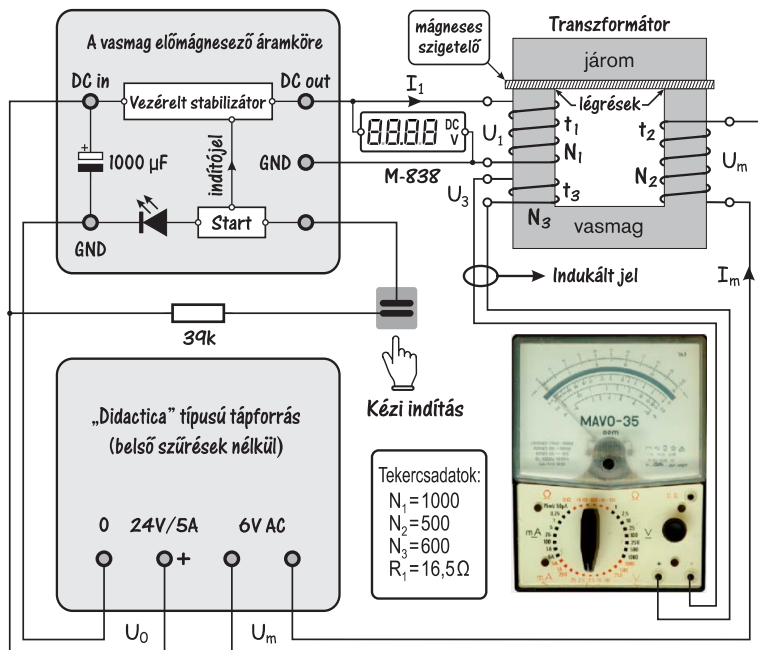
A romániai 1997-es fizikai olimpia döntőjének kísérleti feladata

Az 1970-es évek végén egy ügyetlen egyszerűsítési folyamatban a romániai fizikatanárokból kivették a mágneses tér (H) fogalmát, ami nem lenne nagyon nagy baj, de összekeverték a mágneses indukció (B) fogalmával. A középiskolai fizikában megszűnt a mágneses térben levő anyag tulajdonságaihoz tartozó telítődés, csak egyenes arányosságról volt szó. Ebben a laboratóriumi gyakorlatban egy lényegében hiszterézismentes transzformátorlemez műszakilag nagyon fontos, kezdődő telítődését szerettem volna észrevetetni és kimérteni a diákokkal.

1. ábra. A mágnesezési görbe elektromágneses deriválása.



Bartos-Elekes István a nagyváradai Ady Endre Líceum nyugalmazott fizika- és informatikatanára, kísérleti berendezéseket tervező és építő fizikus-elektronikus. A kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Fizika Karán végzett 1968-ban. 1974–76 között vendégtanár Marokkóban. 1987-ben tudományok doktora címet szerzett. Egy szabadalma alapján (1989) számítógép-vezérelt Fizikumot épített a Líceumban saját fejlesztésű mérőkészülékeiből. 1991 óta szervezi a Schwartz-versenyt.



2. ábra. A mérési összeállítás tömbvázlata.

A kísérlet rövid elve

A változó előmágnevezésre helyezett gyenge váltóárammal (50 Hz, 20 ms) valójában végigderiváljuk a transzformátor vasanyagának $B = f(I_1)$ mágnevezési görbét (1. ábra). A mágnevezési görbe változó meredeksége okozta csökkenő ΔB által indukált feszültségben benne van a mágneses indukció változási sebessége is. Az előmágnevezéstől függő fluxusváltozás sebességének integrálja éppen a keresett mágnevezési görbe első szakasza. Egy kis fizikai-matematikai bravúrral, a deriválás és integrálás szavakat ki sem ejtve könnyen megszerkeszthető a mágnevezési görbe eleje. Két pontban (I_A és I_B) „mértük” a mágnevezési görbe meredekségét az egyenáramú mágneses térre szuperponált ± 50 mA szinuszos áramváltozásra. A valóságban sokkal kisebb áramokat használunk, a ± 50 mA-re csak a jól érthető rajz miatt volt szükség. A t_3 tekercsben (2. ábra) indukált feszültség a két esetben (I_A és I_B) lényegesen különbözik egymástól, az I_B előmágnevező áramnál majdnem a fele az I_A áramnál mértnél. Ez egyértelmű következménye a telítődési folyamat megkezdésének, a mágneses indukció lassúbb növekedésének. A pp az oszcilloszkópos méréseknél használatos peak-peak, azaz a csúcstól-csúcsig mért görbeértéket jelenti, ugyanis az oszcilloszkópok esetében nehéz pontosan mérni az amplitúdót (a nullvonal elvándorol). Ráadásul az egyre erősödő telítődés miatt a pozitív és a negatív irányba vett amplitúdók nem is egyenlők,

ez enyhe torzítást is okoz. A ΔI_1 áram az I_A vagy az I_B egyenáram körül változva hozza létre a ΔB indukcióváltozást, ami a mágneses fluxusváltozás sebessége által okozza a mérhető következményt, azaz az U_3 indukált feszültséget. Összefoglalva: az előmágnevezés függvényében a t_3 tekercsben (2. ábra) mért indukált feszültség nagysága egyértelmű kapcsolatban áll a mágnevezési görbe formájával, vagyis bizonyára kimutatható a mágneses indukció telítődése.

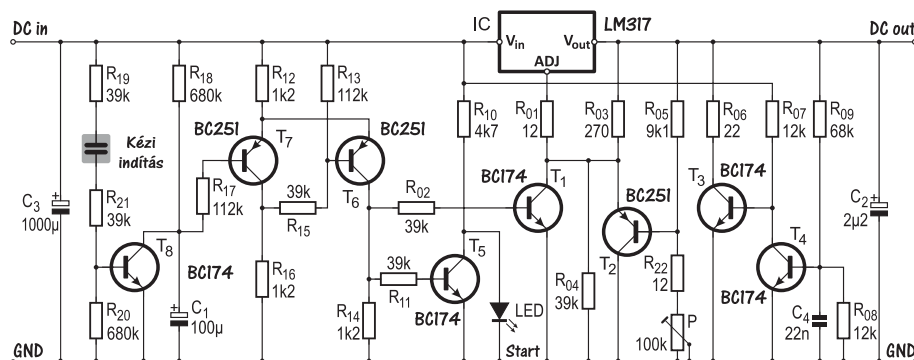
A mérési összeállítás

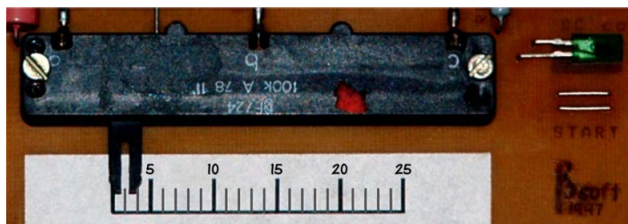
A mérési összeállítás tömbvázlata a 2. ábrán látható. Egy U alakú, szétszedhető transzformátor t_2 primer tekercse a t_3 szekunder tekercsben jól mérhető U_3 feszültséget indukál. A vasmagot a t_1 tekercs egyenárammal létrehozott mágneses térrel előmágnevezjük. A szükséges egyenáram jóval 1 A felett van, ehhez 20 W feletti teljesítmény szükséges, ami percekben belül leégetné a tekercset. A vezérelt stabilizátor külső, érintésre működő indítása után tíz másodpercig szolgáltatja a beállított feszültséget, majd automatikusan kikapcsol, és csak egy percnyi várakozás után szabad újraindítani. Ezalatt a kísérletező lejegyezheti a mért U_3 indukált feszültséget, és beállíthatja az újabb U_1 feszültséget. A feszültség nagysága a fluxusváltozás sebességétől függ. Ha a t_1 tekercsben folyó egyenáram mágneses terével előmágnevezjük a vasmagot, az indukált feszültség erősen függ az előmágnevező áram nagyságától, ugyanis a mágneses doméneket már „megfogta” az erős egyenáram által keltett mágneses tér, így a t_2 -ben az U_m által létrehozott gyenge váltóáramú mágneses tér kevésbé tudja megmozgatni őket.

A vasmag előmágnevező áramköre (vezérelt stabilizátor)

Az iskolai egyedi diák kísérleteknél egy egyszerű (esetleg áramkorlátozós), változtatható tápegységet is használhatunk, elégséges a tekercs hőmérsékletének kézi ellenőrzése, de a tömeges kísérleteknél nem volt ennyi ilyen tápegység, és azok biztos ütemű be- és kikapcsolás

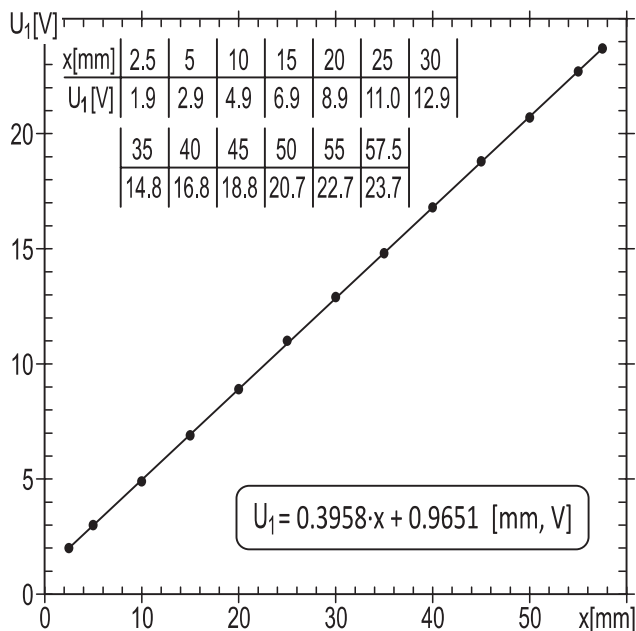
3. ábra. A vasmag előmágnevezőt kézi indítással működésbe hozható elektronikus áramkör.





4. ábra. Feszültségválasztó potencióméter.

lását nem bízhattam az ország minden részéről idesereglett idegen diákokra. Egy automatikusan kikapcsolódó tápegységet kellett építenem (a két évfolyam számára valójában vagy százötvenet). A szinte teljesen automatikus tápegység kapcsolási rajza a 3. ábrán látható. A kiindulópont a Bihar-megye iskoláiból összegyűjtött, a „Didactica” cég által gyártott robusztus tápegység volt, az 5 A-ig terhelhető kimeneteivel, amelyek az általános átvizsgálás és a sok „szegbiztosíték” kigyomlálása után kitűnően megfeleltek a célnak. A kapcsolás lelke az LM317 áramkorlátozott (1,5 A), ellenállással vagy feszültséggel szabályozható feszültségű integrált áramkör. A feszültséggel való szabályozást választottam, mert nagy mennyiségű 100 k Ω -os tolós és egyben lineáris potencióméterhez jutottam (4. ábra), azzal szabályoztam a kimeneti feszültséget (T_2 tranzisztor emitterkövető kapcsolásban). A T_6 és T_7 tranzisztorok egy Schmitt-triggerrel alkotnak, a T_6 vezérli a T_1 indító tranziszort. Alapértelmezésben a T_6 vezet, így T_1 is vezet, tehát kikapcsolja a T_2 emitterkövetőt és az IC kimenőfeszültségét alacsony szintre (körülbelül 2 V) állítja. A Schmitt-trigger alapállapotát a feltöltött C_1 kondenzátor biztosítja, ekkor a T_7 nem vezet, ez garantálja a T_6 vezetési állapotát. Ha legalább 250 ms-ig megérintjük a zöld LED alatti kézi indítás két ezüstözött érintkezőjét, akkor a T_8 tranzisztor vezetésbe vált, ennyi idő alatt kisüti a C_1 kondenzátort, de a Schmitt-trigger már jóval előtte átváltott és az ismert úton kikapcsolódik a T_1 tranzisztor, majd átadja a vezérlést a P potencióméterrel már beállított T_2 emitterkövetőnek. Közben a C_1 kondenzátor az R_{18} ellenálláson keresztül töltődni kezd, és körülbelül tíz másodperc alatt eléri a Schmitt-trigger visszabilenési szintjét, ekkor a rendszer alapállapotba vált, és úgy marad. A kapcsolás összeállításakor (a t_1 tekercs nélkül) a kimeneti C_2 kondenzátor feszültsége alatt maradhatna, de az időzített T_3 és T_4 , az R_{06} ellenállással (22 Ω) kisüti a kondenzátort. A t_1 tekercs jelenlétében a C_2 kondenzátorral egy rezgőkört alkot, a tápegység kikapcsolásakor rezgések keletkeznének, de az „élő” R_{06} ellenállás meggátolja a rezgések kialakulását. Oscilloszkópon is megvizsgálva a jelenséget, csendes kikapcsolódás történik. Ezután feljegyezzük a mért U_3 feszültséget, majd a P potencióméter skáláján lehet beállítani a kívánt új U_1 feszültséget. Újabb indítást csak egy perc múlva ajánlunk, különben a tekercs



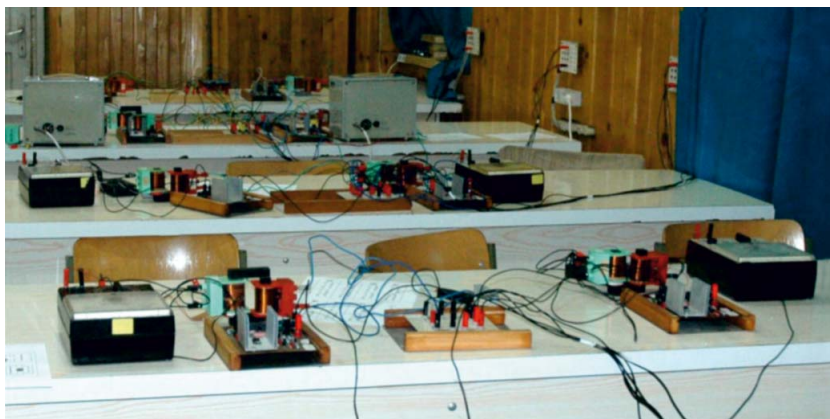
5. ábra. A potencióméter skálájának kalibrálási görbéje.

leégne. A Fizikumban végzett egyedi mérésekhez egy M-838-as digitális mérőműszer is rendelkezésre áll, de az U_1 feszültség értékét csak „vakon” állíthatjuk be, mert az csak az indítás után jelenik meg. Elvettem az automatikus tiltó-időzítő beépítését, ugyanis az 50-60 másodperc várakozási időt az adatlejegyzések és az újabb beállítás miatt alig lehet lerövidíteni. Az 5. ábrán a potencióméter skálájának megrajzolásához szükséges feszültségkalibrálás látható a tolóka középen a bal oldali szélső helyzetéhez mért x (mm) távolság függvényében. A skála megrajzolása után a tolóka rése közepéhez rendeltük a kimeneti feszültség értékét, a 4. ábrán ez 3,0 V.

Mérési adatok

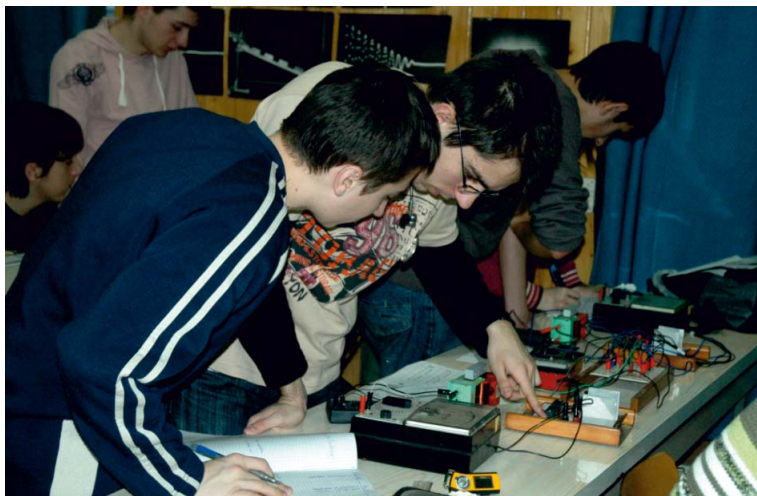
A Fizikumban ez a kísérlet évekig 14 mérőhelyes volt (6. ábra). A méréseknél két szempontból is vigyázni kell a t_1 tekercs túlmelegedésére. Itt a melegedés miatti ellenállás-növekedésre és az esetleges leégésre

6. ábra. A transzformátor mágnesezési görbéjének felvétele. Az ablakok mellett nyolc, a másik oldalon hat mérőhely van. A mérések alatt halk háttérzene szólt.



gondolok. Árammérő műszerre nem számíhattunk, ezért az I_1 áramot a tekercs R_1 ellenállása értékéből, és a beállított (esetleg mért) U_1 feszültségből számítottuk ki. A tekercs rézvezetéke ellenállása $\alpha_{Cu} = 3,93 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$ hőmérsékleti együtthatójú. A kézmeleg külső felület esetében a belső rétegek hőmérséklete 40°C felett van, ez mintegy húsz fokos melegedést jelent. A 20°C -on mért $R_1 = 16,5 \Omega$ -os tekercs ellenállása $17,8 \Omega$ lesz, ez 7,86%-os hibát jelent, amit csak a percnkénti vagy annál ritkább mérésekkel kerülhetünk el. A t_3 tekercsben indukált feszültség mérését a diákok három transzformátorszerkezettel végezték el. A levehető járom az egyetlen lehetőség a tekercsrel ellátott vasmag lezárásának, ezért először járom nélkül (0), azután a felhelyezett járommal, de egy vékony légréssel (1), majd a síkköszőrűvel felületcsiszolt járommal (2) végezték el ugyanazt a kísérletsort, az I_1 előmágnesezési áramtól függő U_3 indukált feszültség mérését. A 7. ábrán levő csoport mérési eredményeit az 1. táblázatban foglaltam össze. A Fizikumban a diákok a 2. ábra szerinti mérési összeállításban a feszültségmérésre egy M-838 típusú digitális műszert is kaptak. Ez nagyon megkönnyítette a mérést, mert a potenciométerrel csak egy körülbélüli feszültséget kellett beállítaniuk, a pontos értékét erről a műszer-

7. ábra. Indul a mérés, tíz másodperc áll rendelkezésre.



1. táblázat

A t_3 tekercsben indukált U_3 feszültség függése az I_1 előmágnesezési áramtól.

n	$R_1 (\Omega)$	0. járom nélkül			1. járom és légrécs			2. járommal lezárva		
		$U_{10} (\text{V})$	$I_{10} (\text{A})$	$U_{30} (\text{V})$	$U_{11} (\text{V})$	$I_{11} (\text{A})$	$U_{31} (\text{V})$	$U_{12} (\text{V})$	$I_{12} (\text{A})$	$U_{32} (\text{V})$
1	16,5	2,12	0,128	0,78	2,12	0,128	0,76	2,12	0,129	0,73
2	16,5	2,85	0,173	0,78	2,78	0,168	0,75	2,85	0,173	0,72
3	16,5	3,99	0,242	0,78	4,18	0,253	0,74	3,96	0,240	0,71
4	16,5	5,15	0,312	0,78	5,13	0,311	0,74	5,10	0,309	0,69
5	16,5	6,21	0,376	0,78	6,15	0,373	0,73	6,15	0,373	0,68
6	16,5	7,13	0,432	0,78	7,25	0,439	0,72	7,13	0,432	0,66
7	16,5	8,22	0,498	0,78	8,23	0,499	0,71	8,16	0,495	0,65
8	16,5	9,43	0,572	0,78	9,32	0,565	0,70	9,37	0,568	0,63
9	16,5	10,30	0,624	0,78	10,47	0,635	0,69	10,30	0,624	0,61
10	16,5	11,37	0,689	0,78	11,36	0,688	0,69	11,22	0,680	0,60
11	16,5	12,22	0,741	0,78	12,30	0,745	0,68	12,15	0,736	0,58
12	16,5	13,33	0,808	0,78	13,28	0,805	0,67	13,21	0,801	0,57
13	16,5	14,25	0,864	0,78	14,14	0,857	0,67	13,99	0,848	0,56
14	16,5	15,19	0,921	0,78	14,99	0,908	0,66	15,15	0,918	0,54
15	16,5	16,20	0,982	0,78	16,00	0,970	0,65	15,87	0,962	0,53
16	16,5	16,89	1,024	0,78	16,75	1,015	0,64	16,76	1,016	0,52
17	16,5	17,70	1,073	0,78	17,53	1,062	0,64	17,72	1,074	0,51
18	16,5	18,48	1,120	0,78	18,54	1,124	0,63	18,34	1,112	0,50
19	16,5	19,20	1,164	0,78	19,10	1,158	0,62	19,14	1,160	0,49

A járomnak fontos szerepe van a mágneses fluxus létrehozásában, ezért három esetet vizsgáltunk.

ről olvasták le. A versenyen nem jutott volna mindenkinek analóg műszer, ezért a versenyzők az U_3 mérésére digitális műszereket kaptak.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kísérletezők betartották az ajánlott mérési ritmust, ezért nem vesszük figyelembe a t_1 tekercs melegedéséből származó ellenállás-változást. A nyitott mágneskör esetében az U_3 feszültség gyakorlatilag állandó, egyáltalán nem tapasztalható a telítődés kezdete. A bevezetőben említett kimenőtranszformátor¹ tervezésénél kísérletileg úgy határozzák meg a légrécs vastagságát, hogy az kompenzálja a végerősítő nyugalmi anódáramának előmágnesező hatását, ilyenkor a telítődés miatti „S” formájú $B = f(I_{\text{anód}})$ karakterishti-

¹A kimenőtranszformátor az elektroncsöves erősítő végfokozatát illeszti a hangszóró néhány ohmos ellenállásához. A primer oldalon a hangszóró ellenállása a transzformátor áttételének négyzetével besorozva látszik. A hatásfok is beleszól ebbe az összefüggésbe, de a 90% körüli értéke nem sokat zavar. Külön gondot jelent az elektroncső nyugalmi árama által létrehozott előmágnesezés, mert eltolja a nullpont körüli szimmetriát, torzítani fog az erősítő, ezért légrécs alkalmaznak, amely lényegesen lecsökkenti az előmágnesezés mértékét, szinte teljesen visszaáll az eredeti szimmetria. Ebben a kísérletben ezt a több évtizedes tapasztalatomat használtam fel.

ka nyugalmi munkapontja valahol a szimmetria-középpont környékére kerül, ettől lényegesen lecsökken a torzítás. Az ellenütemű végfokozat nyugalmi anódáramai ellentétes irányú mágneses indukciókat keltenek, ezek kioltják egymást, így teljes szimmetria áll elő. A nagyáramú tranzisztorok képesek vezérelni a néhány ohmos hangszórókat, ezért a tranzisztoros erősítőknél már nem használnak kimenőtranszformátorokat. Manapság a nagy nyugati cégek visszatértek az elektroncsöves végfokozatokhoz, mert a tranzisztoros erősítők kis kimeneti belső impedanciája leterheli a hangszórót, az nem képes szabadon mozogni, ezért nem tud lágy mélyhangokat kiadni.

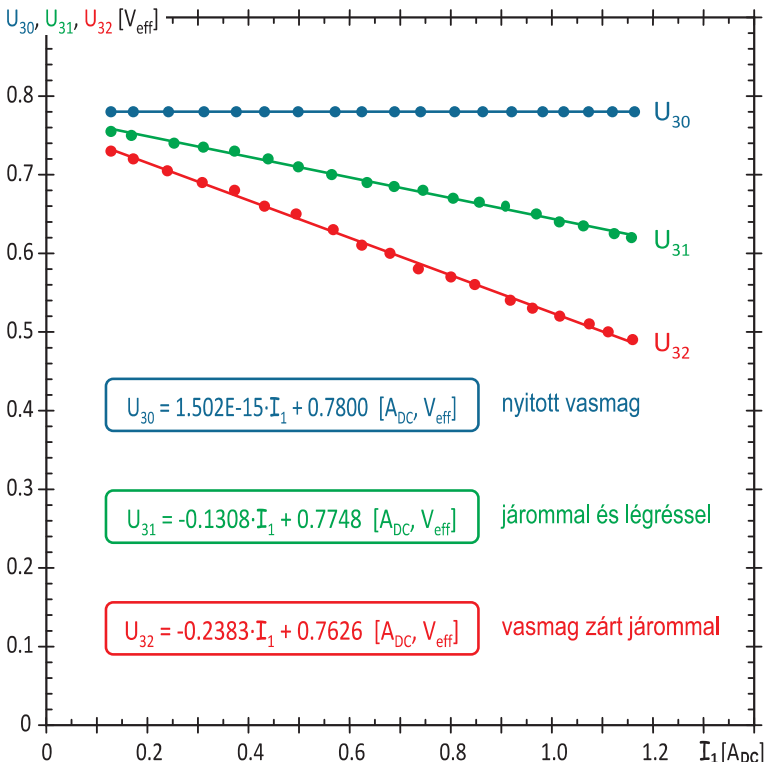
A mérési adatok értékelése

A számszerű mérési adatok önmagukban általában nem sokat mondanak fizikusnak, ezért ábrázolni szokta őket. A 8. ábrán az 1. táblázatból kiolvasható mérési adatok grafikus képe látható. Első értékelésként vizsgáljuk meg az illesztőgörbék pontosságát. Mindhárom esetben kiszámítottuk a mérési pontok távolságát a j -vel jelzett illesztőgörbétől (j a járom helyzetéhez rendelt 0, 1, 2 index), majd az illesztőfüggvényre normált értéket $b_j(n)$ hibafüggvénynek neveztük el, az n a mérési index:

$$b_j(n) = \frac{U_{3jn} - (a_j I_{1jn} + b_j)}{a_j I_{1jn} + b_j} \quad (1)$$

A legkisebb négyzetek elve segítségével az $n = 19$ pontra kiszámítottuk a légréssel és légrés nélküli já-

8. ábra. Az U_3 indukált feszültség függése az előmágnesezési áramtól a nyitott vasmag, a légréssel ellátott járom és a teljesen zárt mágneskör esetében.



rommal felvett relatív hibafüggvény σ_j standard eltérést, majd a 68,27% biztonságu

$$\sigma_{kj} = \frac{\sigma_j}{\sqrt{n}}$$

varianciát. A járom nélkül az illesztőgörbe iránytényezője 10^{-15} nagyságrendű, a szabad tag pedig állandó, így e számításnak nem volt értelme, annyira kicsi a kiszámított hiba, míg az adatok pontossága jobb is lehetne.² Az illesztőgörbe pontosságára azért van szükség, mert annak egyenletéből fogjuk meghatározni a mágnesezési görbe egyenletét. A b_1 hibafüggvény standard eltérése, a $\sigma_1 = \pm 3,45\%$, a 68,27%-os biztonságu értéksáv pedig $\sigma_{k1} = \pm 0,79\%$. Ugyanezek az értékek a b_2 hibafüggvényre: $\sigma_2 = \pm 5,62\%$, $\sigma_{k2} = \pm 1,29\%$.

A mágnesezési görbe adatainak meghatározása

A telítődés mértéke a teljesen zárt vasmagban a legnagyobb, ezért az U_{32} illesztőgörbét fogjuk feldolgozni. Jelölje E az U_{32} mindenkoros amplitúdóját, E_0 pedig az előmágnesezési áram nélküli értéket. Az előmágnesezési áram növekedésével az E a következő összefüggés szerint fog csökkenni:

$$E = E_0 - k I_1 \quad (2)$$

A (2) egyenletet összehasonlítjuk az U_{32} tapasztalati egyenletével:

$$E_0 = 0,7626 \cdot V_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} = 1,0785 \text{ V} \quad (3)$$

Valamint

$$k = 0,2383 \cdot V_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} / A_{\text{DC}} = 0,3370 \text{ V/A}_{\text{DC}} \quad (4)$$

Az elektromágneses indukció törvénye alapján felírhatjuk az indukált feszültség amplitúdójának értékét:

$$E = N_3 \frac{d\Phi}{dt} \quad (5)$$

Az amplitúdó csökkenése egyértelműen a telítődésnek tulajdonítható, ezt a μ abszolút mágneses permeabilitás csökkenésének fogjuk fel:

$$\mu = \mu_0 - m I_1 \quad (6)$$

ahol a μ_0 az abszolút mágneses permeabilitás előmágnesezés nélküli értéke, az m az

²Hibaszámítással kapcsolatban Gránásy László írását (<http://fizikaiszemle.hu/extra/hibaszamitas.pdf>) és W. H. Press és társai *Numerical Recipes* könyvét ajánlom (kis keresgéléssel a pdf szabadon letölthető, 20,4 MB).

egyenes irányítványozója, a mértékegysége $H/(A \cdot m)$. A mágneses fluxus a meghatározás szerint $\Phi = B \cdot S$, ahol S a mágneses indukcióra merőleges vasmagfelület a $B = B_0 + B_m$. A B_0 az egyenáramú előmágnesezés által létrehozott mágneses indukció, a B_m a mágneses indukció váltóáramú komponense, vagyis a B_0 -t moduláló mágneses indukció. A tekercsek formája nagyon távol áll a középiskolában egyetlen létezőnek elfogadott szolenoidétól, így nem tudjuk kiszámítani az általuk keltett mágneses indukciót. A mágneses indukció kiszámításánál feltételezünk egy ismeretlen értékű G formafaktort (dimenziója $1/m$), amely azonos a transzformátor két tekercse esetében, vagyis mágneses indukció általános képlete így alakul: $B = \mu \cdot N \cdot G \cdot I$. Ezek szerint az I_1 egyenáram és az I_m amplitúdójú váltóáram által keltett mágneses indukciót a következő módon számíthatjuk ki:

$$B = (\mu_0 - m I_1) G (I_1 N_1 + N_2 I_m \sin \omega t). \quad (7)$$

Az N_3 menetes t_3 tekercsben indukált feszültség pillanatnyi értékének modulusát az elektromágneses indukció törvénye alapján írhatjuk fel, de figyelembe kell vennünk a transzformátor η hatásfokát is:

$$|e| = N_3 \eta S \frac{dB}{dt}. \quad (8)$$

A román középiskolákban a matematikából tanítják a differenciál- és integrálszámítást, ezért ott könnyen elvégezzük a dB/dt deriválást. A fizikában már előbb felmerül a mágneses térben forgó keretben indukált feszültség kiszámítása. Ilyenkor a szinuszfüggvény növekedését viszonyítjuk az argumentum növekedéséhez, és a trigonometriai képletek alapján megkapjuk a szinuszfüggvény változási sebességét, azaz deriváltját.

$$|e| = N_3 \eta S (\mu_0 - m I_1) G \omega N_2 I_m \cos \omega t. \quad (9)$$

A pillanatnyi érték amplitúdója felírásakor a (9) képletben elhagyjuk a $\cos \omega t$ függvényt:

$$E = N_2 N_3 \eta S G \omega I_m (\mu_0 - m I_1). \quad (10)$$

Felbontjuk a zárójelet:

$$E = \mu_0 N_2 N_3 \eta S G \omega I_m - m N_2 N_3 \eta S G \omega I_m I_1. \quad (11)$$

Összevetjük a (2) és a (11) képletet, ebből megkapjuk az indukált feszültség előmágnesezés nélküli amplitúdóját:

$$E_0 = \mu_0 N_2 N_3 \eta S G \omega I_m \quad (12)$$

és az amplitúdócsökkenés iránytényezőjét:

$$k = m N_2 N_3 \eta S G \omega I_m. \quad (13)$$

A (7) egyenletből kiszámítjuk az előmágnesezésből eredő mágneses indukciót:

$$\begin{aligned} B_0 &= (\mu_0 - m I_1) G N_1 I_1 = \\ &= \mu_0 G N_1 I_1 - m G N_1 I_1^2. \end{aligned} \quad (14)$$

A B_0 függvénye az I_1 szerint másodfokú. A másodfokú tag negatív előjele egy maximum létét jelzi, ez lenne a telítődés befejezésének pontja. A (12) egyenletből kifejezzük $\mu_0 G$ -t, a (13) egyenletből az $m G$ -t és behelyettesítjük a (14) egyenletbe. Megszabadultunk az ismeretlenektől, és megkaptuk a B_0 indukció képletét:

$$B_0 = \frac{N_1 (E_0 I_1 - k I_1^2)}{\eta N_2 N_3 S \omega I_m}. \quad (15)$$

A $B_0 = f(I_1)$ mágnesezési görbe megrajzolásához szükséges egy adattáblázat, de ennek nagyon sok sora lenne. Ezért a (15) egyenletet tagokba bontjuk, a táblázatban csak a tagok kiszámított értékei szerepelnek. A következő jelöléseket vezetjük be:

$$Q = \eta N_2 N_3 S \omega I_m = \eta N_2 N_3 S 2 \pi \nu I_m, \quad (16)$$

azaz Q a B_0 -t kifejező (15) képlet nevezője. Másrészt:

$$P(I_1) = N_1 (E_0 I_1 - k I_1^2), \quad (17)$$

ami a (15) tört számlálója.

A tekercs adatokat a 2. ábráról olvassuk le, a hálózati frekvencia, $\nu = 50$ Hz, a vasmag keresztmetszete, $S = 2$ cm², a transzformátor hatásfoka, $\eta = 91\%$. A t_2 tekercsbe vezetett 6 V_{eff} váltófeszültség által keltett I_m moduláló áram értéke 19 mA_{eff}. Ennek mérése igen körülményes volt, mert a t_1 egyenáramú tekercs is „látja” ezt az indukáló áramot, ráadásul egy kondenzátorban végződő tápegységre van kötve (3. ábra), ezen kívül a stabilizátorkapcsolás szabályozza az általa zavarónak látszó 50 Hz-es változásokat is, ez növeli az I_m áramot. Míg minden mást egyenként határoztunk meg, addig ezt az áramot csakis működés közben mérhettük meg. Itt is az amplitúdót kell megadnunk, így az értéke $I_m = 19$ mA_{eff} · $\sqrt{2} = 26,87$ mA_{AC} lett. Az „A” mértékegység melletti DC vagy AC index az egyen- vagy a váltóáramot jelenti. Ezekkel az adatokkal a $Q = 921,81$ Am²/s. B_0 maximuma az eddig ismert adatok alapján az

$$I_{1\max} = \frac{E_0}{2k} = 1,6 \text{ A}$$

pontban lenne, a (17) szerint a $B_{0\max} = 936$ mT. Az előmágnesező tápegység 1,5 A felett áramgenerátoros módba vált, így biztosan nem érhetjük el a telítési maximumot.

A mágnesezési görbe megrajzolása

Az eddigi grafikonjainkat lényegében a közvetlen mérések alapján rajzoltuk meg. A mágnesezési görbe egy hosszabb adatértelmezés eredményeként került megrajzolásra. A (2) ... (17) képletekben láthattuk az

2. táblázat

A transzformátor mágnesezési görbéjének megszerkesztéséhez szükséges adatok összesítése.

n	I_{12} (A)	Q (Am ² /s)	E_0 (V)	k (V/A)	N_1	P (VA)	P/Q (T)	B_0 (mT)
1	0,128	921,81	1,0785	0,3370	1000	133,01	0,1443	144,3
2	0,173	921,81	1,0785	0,3370	1000	176,23	0,1912	191,2
3	0,240	921,81	1,0785	0,3370	1000	239,43	0,2597	259,7
4	0,309	921,81	1,0785	0,3370	1000	301,16	0,3267	326,7
5	0,373	921,81	1,0785	0,3370	1000	355,17	0,3853	385,3
6	0,432	921,81	1,0785	0,3370	1000	403,12	0,4373	437,3
7	0,495	921,81	1,0785	0,3370	1000	450,95	0,4892	489,2
8	0,568	921,81	1,0785	0,3370	1000	503,78	0,5465	546,5
9	0,624	921,81	1,0785	0,3370	1000	541,92	0,5879	587,9
10	0,680	921,81	1,0785	0,3370	1000	577,55	0,6265	626,5
11	0,736	921,81	1,0785	0,3370	1000	611,44	0,6633	663,3
12	0,801	921,81	1,0785	0,3370	1000	647,45	0,7024	702,4
13	0,848	921,81	1,0785	0,3370	1000	672,17	0,7292	729,2
14	0,918	921,81	1,0785	0,3370	1000	706,15	0,7660	766,0
15	0,962	921,81	1,0785	0,3370	1000	725,56	0,7871	787,1
16	1,016	921,81	1,0785	0,3370	1000	747,79	0,8112	811,2
17	1,074	921,81	1,0785	0,3370	1000	769,57	0,8348	834,8
18	1,112	921,81	1,0785	0,3370	1000	782,42	0,8488	848,8
19	1,160	921,81	1,0785	0,3370	1000	797,59	0,8652	865,2

Az I_{12} (A) oszlop az előmágnesezési áramot, az utolsó oszlop ezen áramnak megfelelő B_0 (mT) mágneses indukció értékét tartalmazza. A köztes oszlopok a (2) ... (17) képlet alapján végzett számítások részértékeit tartalmazzák.

adatértelmezést, a 2. táblázatban pedig előkészítettük a mágneses indukció komplex képletének ábrázolásához szükséges részalkulációkat. A biztonság kedvéért mindenütt kiszámoltuk a mértékegységeket is, a számítások így könnyen ellenőrizhetők. Mivel a részszámításokat számítógépes programcskával végeztem el, megtörténhet, hogy a kerekített részeredmények már nem pontosan a táblázatbeli végeredményeket adják. Nagy szerencsénk volt a (16) képletben meghatározott Q függvénnyel, mert benne áramfüggetlen tagok vannak, így elég volt egyszer kiszámolni, és később készülékállandóként kezelni.

A 9. ábrán a vasmag kísérletileg meghatározott mágnesezési görbéjének egy része látható. Az előmágnesezési tápegység (3. ábra) nem képes 2 V alatti feszültségek előállítására, mert az LM317-es stabilizáló áramkörnek ehhez egy kicsi negatív referenciazfeszültségre lenne szüksége, ezért hiányzik a mágnesezési görbe „eleje”. Az U_1 feszültség mérésére a diákok az M-838 digitális műszert használták a 20 V-os skálán. A mérés közben nem ajánlott a méréshatár váltása, mert a következő, 200 V-os méréshatár elején már csak három számjegyes kijelzés van, így a műszer alacsony pontosságát is beleszámítva 20 V felett „szakadás” jöhet létre a feszültségmérésben. Már a (14) képlet értelmezésekor

látszott a „tisza” másodfokú görbe (nincs szabad tag), ezért rögtön ki is számítottuk a maximum helyét és értékét. Mivel ez egy matematikai leírás, egy mérési sor extrapolálása, ezért szaggatott vonallal jelöltük a meghosszabbítást. A telítődés kezdetéből nem következtethetünk a jóval később befejeződő lényegében ismeretlen fizikai folyamat végére.

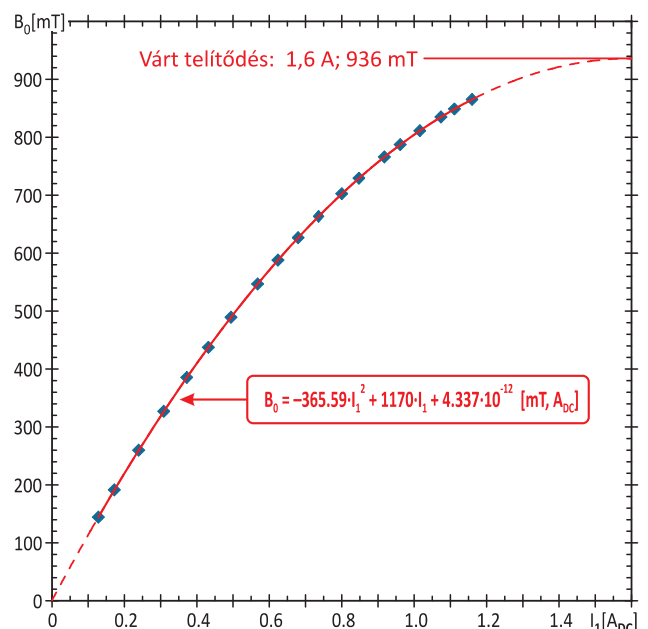
Hibaforrások, problémák, értékelések

Először egy pozitív tartalmú megjegyzés: az összes mérést áttételesen összegző mágnesezési görbe egyenletének szabad tagja (9. ábra) mintegy tíz nagyságrenddel kisebb a $B_0(I_1)$ origó körüli értékeinél, vagyis nagyon jól eltaláltuk az origót. A bemérések és a számtalan készülék tesztelése felszínre hozta a tervezéskor figyelmen kívül hagyott, vagy előre nem látható megoldásokat.

- A laboratóriumi gyakorlat fő hozadéka, hogy makroszkopikus eszközökkel mértünk és határoztunk meg az anyag belsejében történt, a középiskolában már nem tanult fizikai jelenséget. A kísérlet sokat segít az elektromágneses indukció mélyebb megértésében. Mi megkerestük azt a jelenséget, amelynek csökkenő változási sebessége csökkenő feszültséget keltett egy transzformátor szekunder tekerésében.

Külön érdekesség, hogy a növekvő intenzitású ok hozta létre a csökkenő okozatot.

9. ábra. A vasmag kimért mágnesezési görbéjének egy része.



- A síkköszörült járom és nyitott transzformátor nem igazán volt helyes művelet a transzformátor szempontjából. Az igaz, hogy a mágneskör szinte tökéletesen zárt lett, de elrontottuk a lemezelés lényegét, mert az „összeérő” lemezekben sokkal nagyobb örvényáramok keletkeztek, a transzformátor veszteségebb lett.

- Matematikai szempontból fontos lehet a fizikai jelenséget leíró deriváltból megkapni a primitív függvényt, vagyis az elektromágneses indukció okát. Ez egy igazi kapocs a fizika és a matematika között.

- Bár a moduláló áram értéke állandó, de mérése nagyon körülményes, kiszámítani pedig szinte lehetetlen. A transzformátor egyik szekundere, az előmágnesező t_1 tekercs nehezen meghatározható terhelést jelent. A terhelés nagyon komplex módon jelentkezik, mert a tápegység C_2 kondenzátora egy váltóáramú terhelés, az LM317 csak a feszültségcsökkenéseket kompenzálja, a feszültségnövekedést, nem képes kezelni (nem az LM317 feladata), ezért aszimmetria keletkezik, tehát a mért érték nem lenne helyes.

- A kis sorozatú gyártásnál kiderült, hogy a más célra készült 100 k Ω -os potencióméterek valódi ellenállása nagyon is különböző lehet, ezért vagy egyedi skálát, vagy pótellenállásokat kellett volna elhelyeznünk. A potencióméterek linearitása megmaradt, ezért a névérték alattiaknál az előmágnesező áramkör (3. ábra) R_{05} ellenállását „megrövidítettem” egy néhány tíz k Ω nagyságrendű párhuzamos ellenállással, a nagyobbaknál pedig egy M Ω nagyságrendű ellenállást kötöttem párhuzamosan a potencióméterrel. A kisebb-nagyobb-megfelelő típusú osztályozás után a 10. ábrán látható ellenállásdekáddal mértem be a szükséges ellenállásokat, majd az E24-es szabványú ellenállás-sorozatból kiválasztottam a megfelelő ellenállást.

- Egyedi méréseknél az ipari eredetű tápot a szükségesnél jóval nagyobb feszültségen, áramgenerátoros módba helyezjük, és az áramgenerátor állítgatásával rögzítjük a szükséges áramot. A t_1 tekercs melegeése már nem probléma, mert a mágneses teret nem az U_1 feszültség, hanem az áramgenerátor áramstabilizált I_1 árama adja. Az U_m moduláló feszültség „nyitott” szekunder tekercsnek látja az eddig kondenzátorral és feszültségstabilizátorral terhelt előmágnesező t_1 tekercset. Az igazán jó megoldás egy házilag erre a célra készült áramgenerátoros tápegység lenne, amelynek kimenetén nincs kondenzátor.

- Tovább ragozva ezt a témát, felhívom a tisztelt kísérletező kollégák figyelmét a gyári készülékek áramgenerátoros módja árambeállításának problémáira. Az áramgenerátoros mód egy olyan tökéletes rövidzárbiztos rendszer, amely a kimenő feszültség terhelés miatti néhány mV-os csökkenéskor automatikusan áramgenerátoros módba vált, itt csak az esetleges belső melegedések okozhatnak problémát, de azt természetesen kapcsolásokkal kivédik. „Papíron” még azt a hibát is elbírák, hogy a kimeneti feszültség he-



10. ábra. Finoman szabályozható ellenállásdekád 1,2 M Ω -ig.

lyett a kimeneti áramot mérjük (Úristen!). A tápegységek bírják, de a műszer biztosítéka nem. A kiolvadó biztosítékokat nagyon nehéz lenne 2000 μ A-re készíteni, ezért egy áramfigyelő rendszer a méréshatáron megengedett legnagyobb áram néhány százalékos túllépésekor kiegyeti a jóval erősebb, minden áram- és feszültségáthárta érvényes egyetlen biztosítékot. Minden tápegység kimenetén van egy kondenzátor, ami a kimeneti feszültségen megjelenő zajfeszültségeket szűri. Ha kimeneti áramot mérünk, akkor a rövidzár keltésekor a kondenzátorban levő energia bőségesen elég ahhoz, hogy a műszerünk áramtúllépést érzékeljen, áramot nem mér, de túllépést mutat, és kiolvasztja a biztosítékot. A megoldás igen egyszerű: egy huzallal (esetleg csipesszel) először rövidre zárjuk a kimenetet, és a rövidzár megtartása mellett bekötjük a mérőműszert, ekkor „nincs” kondenzátor, nem olvad ki a biztosíték. Hiába van önműködő méréshatárváltónk, a néhány Ω -os söntellenállás (R_s) a kondenzátort U_C/R_s kezdőárammal süti ki. Az elektronikus biztosíték reakcióideje néhány μ s, de a kisütés néhány száz μ s-ig tart. A műszerünk csak biztosítékcseré után tud áramot mérni.

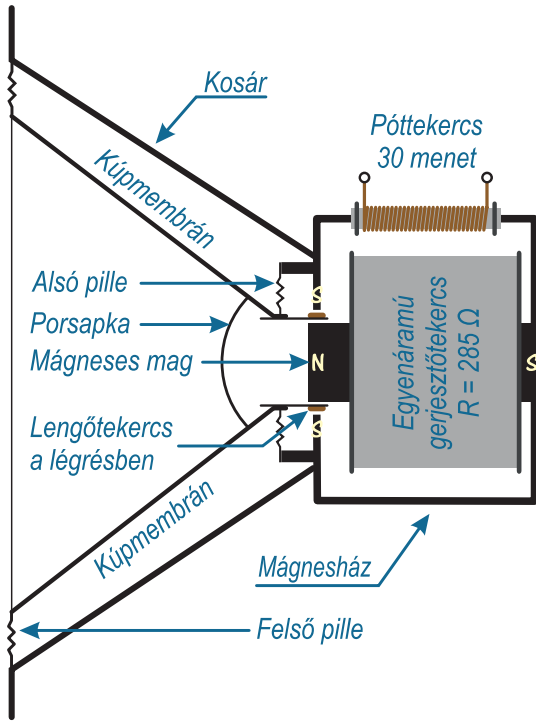
Kísérleti feladat

a XVI. Schwartz Emlékversenyen

Amint a felsejtőben írtam, ez egy nagyon régi feladat, egy saját célra készült kísérlet. Azt szerettem volna meghatározni, hogy meddig érdemes növelni egy elektrodinamikus hangszóró gerjesztőáramát, ha minél nagyobb hangerőt szeretnénk kihozni belőle. A kiindulópont a fentebb tárgyalt jelenség volt, féltem a telítődéstől, ahol már nem lenne értelme a gerjesztőáram további lényeges növelésének. Amint látni fogjuk, csak egy mérőkísérlet döntheti el egy ilyen súlyú konstrukció sorsát.

Az elektrodinamikus (gerjesztett) hangszóró felépítése

A 11. ábrán a kísérlethez előkészített elektrodinamikus hangszóró keresztmetszete látható. Az egyenáramú gerjesztőtekercs erős mágneses teret kelt a légrésben. Az erősítőben ezt a tekercset az egyenirányító két kondenzátora közé kapcsolták, ezért átment rajta a készülék által felvett egyenáram, és 10-20 V-ot csökkent. A kétütemű egyenirányító 100 Hz-es zajele



11. ábra. Elektrodinamikus hangszóró a kísérlethez szükséges póttekerccsel.

szempontjából ez az induktivitás igen nagy reaktanciát képviselt, így egy kitűnő szűrés is létrejött. A légrésben egy 100 Hz-cel modulált mágneses tér keletkezett, de a nagy reaktancia miatt a legyengült váltóáramnak alig volt hatása. A lengőtekerccs a néhány voltos hangjelet kapja, rezgéseit átadja a membránnak. Egy 30 menetes póttekerccs kizárólag a kísérlet elvégzéséhez szükséges, és később került a mágnesházra.

Még a '60-as évek közepén ezt az elektrodinamikus hangszórót a fenti dolgozathoz hasonló transzformátornak képzeltem el. A primer tekerccs a 40-60 menetes lengőtekerccs, a póttekerccs a szekunder tekerccs, az egyenáramú gerjesztőtekerccs pedig az előmágnesezést valósítja meg. A lengőtekerccs egy eléggé homogén mágneses térben van a mágnesház és a mágnesmag között. A lengőtekerccsben folyó váltóáramú hangjel indukált áramot kelt a póttekerccsben és a sze-

kunderként felfogott gerjesztőtekerccsben is. Az indukált jel nagyságának csökkenése a mágneses indukció csökkenő növekedését jelzi. *Várható volt a mágneses telítődés megjelenése, amiből az érdekesnek tartott, legnagyobb gerjesztőáramot kívántam meghatározni.*

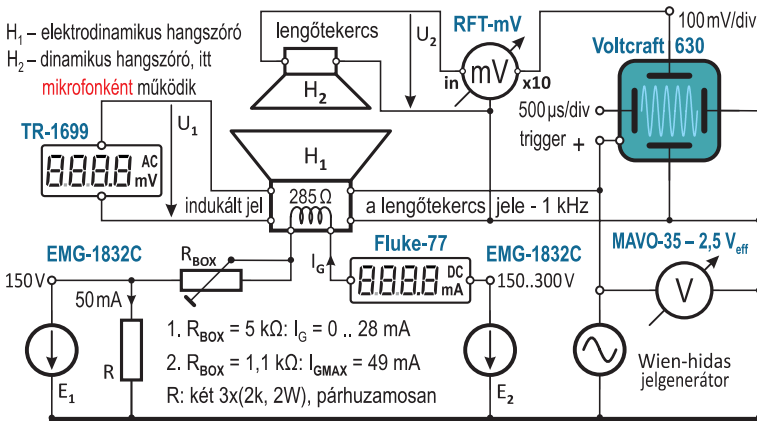
A kísérleti berendezés bemutatása

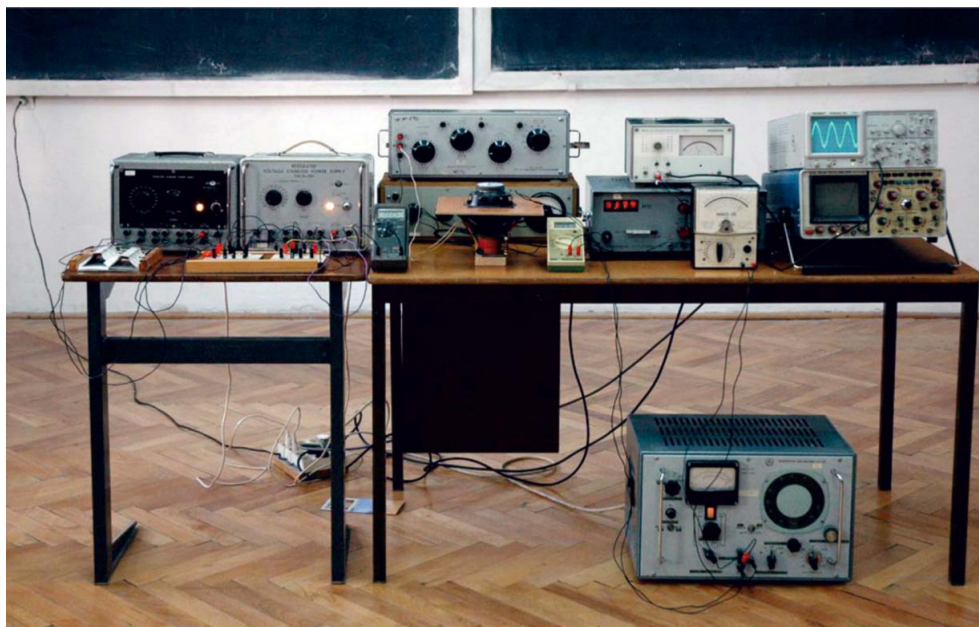
Az eredeti kapcsolás megszerkesztése idején szó sem lehetett változtatható kisfeszültségű tápegységekről, ráadásul nullától induló, változtatható tápforrás sem létezett, talán még nem jöttek rá az ehhez szükséges negatív feszültségű referenciára. A kolozsvári egyetem fizikakarán mindent a pincétől a második emeletig laboratóriumonként leágazó, 120 voltos, nagyáramú akkumulátorhálózattal és helyi egyedi akkumulátorokkal oldottak meg. Az igényes kísérletekhez LC szűrők csökkentették a töltési zajfeszültséget, vagy kikapcsolták a töltést.

A kísérleti berendezés tömbvázlata a 12. ábrán látható. Klasszikus műszerekkel állítottam össze, de a versenyfeladat esetében már digitális műszerek és modern oszcilloszkópok is rendelkezésre álltak. Mai szemmel nézve a gerjesztés megoldása nagyon komplikált, talán elég lett volna egy tápegység is, de nullától indulót nem találtam. Maradt a rendelkezésre álló két EMG-1832C típusú, robusztus elektroncsöves tápegység, amelyek a maximális 100 mA-es terhelés mellett 150 és 300 V között szolgáltatnak stabilizált egyenfeszültséget. Meg kellett oldanom a gerjesztőtekerccs „szabadságát”, hogy a tápegység ne terhelje le a tekerccsben indukált feszültséget. Legegyszerűbbnek egy soros ellenállás kínálkozott (R_{BOX}), ezzel egyúttal finomabban szabályozhatóvá tettem a gerjesztőáramot. A két elektroncsöves tápegység differenciálkapcsolásban van, az E_1 mindig 150 V-ot ad, az E_2 150 és 300 V között szabályozható. Az elektroncsöves tápegységek még nem ismerték a nagyáramú sorba kötés lehetőségét, ugyanis az alsó tápegység kimenetét a felső felfele húzza, amit a csökkenésre tervezett szabályozórendszer nem tud kompenzálni. A várható legnagyobb, 49 mA-es áramot egy 50 mA-es előterheléssel kompenzáltam. Ilyenkor a felső tápegység 49 mA-t szolgáltat, az alsó 99 mA-t. Hiába növelném a

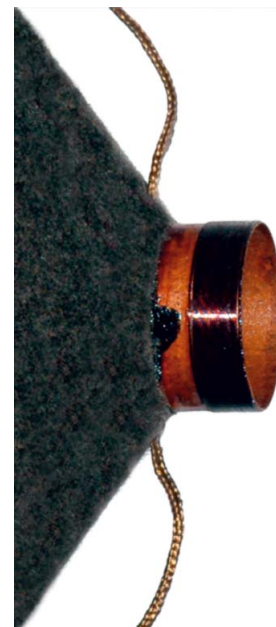
felső tápegység feszültségét, az alsó kikapcsol, és „elengedi” a saját kimenetét. Marad a 3 k Ω -os előterhelés sorba kötve az R_{BOX} (10. ábra) 1,1 k Ω -os ($11 \times 100 \Omega$) ellenállásával. A kisebb áramokat az ellenállásszekrény 5 k Ω -os ($5 \times 1 \text{ k}\Omega$) ellenállásával oldottam meg. Mindkét esetben figyelembe kellett vennem az ellenállásszekrény 30 mA-es (1 k Ω -osok) és 100 mA-es (100 Ω -osok) terhelhetőségét. A H_1 hangszóró a jelgenerátortól kap egy jelet, a H_2 hangszóró ezt mikrofonként felfogja, és az oszcilloszkóp számára tízszeresen fel is erősíti. A gerjesztőáram függvényében meghatározható a H_1 hangszóró hangerejé-

12. ábra. A kísérleti berendezés tömbvázlata – XVI. Schwartz Emlékverseny.





13. ábra. A kísérleti berendezés a XVI. Schwartz Emlékversenyen (2006).



14. ábra. A lengőtekercs.

nek változása. Az előzetes elképzelésem szerint a hangerő telítődését kellene detektálnunk.

A kísérlet másik ágában az előmágnesezési áramtól függő indukált feszültséget vizsgáltam a transzformátornak felfogott lengőtekercs \rightarrow vasmag \rightarrow póttekercs struktúrában. Ez lényegében azonos az előbbi kísérlettel. Az alsó oszcilloszkóp eredetileg a jelgenerátor jelét mutatta, de a fénykép készítésekor már nem volt bekapcsolva. Valójában arra hívtam fel a verseny résztvevőinek figyelmét, ahogyan a Wien-hidas jelgenerátor egy izzószálas kiségő segítségével beszabályozza a pozitív visszacsatolás mértékét, és a megadott szinten tartja a kimenőfeszültséget. A diákok először arra kérdeztek rá, hogy a frekvencia változtatásakor miért „lebeg” a felső oszcilloszkóp jele. Azért, mert ilyenkor felbomlik a rezgés *Barkhausen* által meghatározott feltétele, és az égő ellenállásától (*bőmérsekletétől*) függő negatív-pozitív visszacsatolás egyensúlya néhány „tapogatódzó” felvillanás után beállítja a normál kimeneti feszültséget. A felső oszcilloszkóp a H_2 „mikrofon” felerősített jelét mutatja, szerepe a mérőrendszer működésének jelzése.

Mérési eredmények

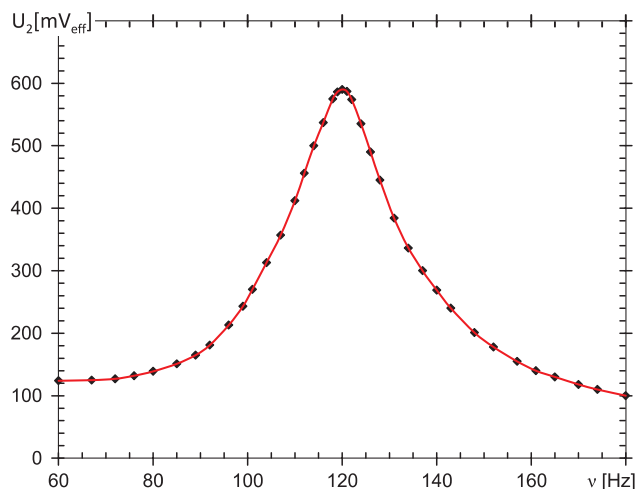
A H_2 hangszóró egy szabadon lengő rendszer, amely bizonyos frekvenciájú hangokra rezonálhat, és így befolyásolhatja méréseinket, ezért meghatároztam a rezonanciafrekvenciáját. A látszólag egyszerű mérést az bonyolította, hogy a H_1 hangszórónak is van rezonanciapontja, nehogy azt mérjem meg. Ezért 20 mA gerjesztőáram mellett (a 12. ábra 1. mérési módja, $R = 5 \text{ k}\Omega$) nem a hangerőt, hanem a lengőtekercs (14. ábra) által felvett áram értékét mértem, illetve egyszerűen az oszcilloszkópon figyeltem az áramfelvétel minimumát, ugyanis az oszcilloszkóp gyakorlatilag frekvenciafüggetlen egészen az egyenáramig. Egyszerű volt megál-

lapítanom, hogy az áramminimum 47 Hz körül jött létre, vagyis biztosan nem fogja zavarni a kis hangszóró működését, amelynek rezonanciafrekvenciáját száz Hz fölé saccoltam, de megmérve (15. ábra), $\nu_0 = 120 \text{ Hz}$ -nek adódott. A kis mikrofon-hangszóró (H_2) rezonanciagörbéjének mérési adatait a 3. táblázatban foglaltam össze. A hangerővel arányos, három számjegyes pontosságú U_2 (mV_{eff}) feszültséget a tükörskálás RFT millivoltmérőről könnyedén leolvastam. További lényeges rezonanciapontokat 2 kHz-ig nem találtam, ezért a nagy hangszóró (H_1) mágneses tulajdonságait 1 kHz-nél fogom tanulmányozni, itt majd kevésbé fognak zavarni az 50 Hz-es hálózati zajok.

A mérések érdemi részét a mágnesezési görbével kapcsolatban végeztem el. A jelenségeket és így a méréseket is két részre osztottam:

- egyrészt az indukált feszültség függése a gerjesztési áramtól,
- másrészt a hangerő függése a gerjesztési áramtól.

15. ábra. A H_2 hangszóró rezonanciagörbéje.



3. táblázat

A mikrofonként működő H₂ hangszóró rezonanciagörbe-felvételeinek 38 adatpárja.

index	ν (Hz)	u_2 (mV _{eff})	index	ν (Hz)	u_2 (mV _{eff})
1	60	124	20	120	590
2	67	125	21	121	587
3	72	127	22	122	574
4	76	132	23	124	535
5	80	139	24	126	490
6	85	151	25	128	445
7	89	165	26	131	384
8	92	181	27	134	338
9	96	213	28	137	300
10	99	243	29	140	269
11	101	270	30	143	240
12	104	313	31	148	201
13	107	357	32	152	178
14	110	412	33	157	155
15	112	456	34	161	140
16	114	500	35	165	130
17	116	537	36	170	118
18	118	575	37	174	110
19	119	586	38	180	100

Az összefüggéseket keresendő, szimultán mértem a 28 különböző gerjesztési áramhoz tartozó indukált jelet és a mikrofon-hangszóróban keletkezett hangerőjelet is. Mindkét kísérletcsoport az elektrodinamikus hangszóró gerjesztőárama megfelelő értékének kiválasztásáról szólt.

Az indukált feszültség függése a gerjesztési áramtól

Ez a kísérlet lényegében a cikk első részében tárgyalt jelenséghez hasonló, azzal a nem kis különbséggel, hogy a gerjesztés kikapcsolásakor a gerjesztőtekerics önindukált árama ellentétes polaritással átmágnesezi a H₁ hangszóró gerjesztőtekericsének vaskeretét, ez értelmezési gondokat okozott. A probléma abból származott, hogy az elvárt lineáris jelcsökkenés helyett egy gyengén másodfokú, de erősen „púpos” mérési sor keletkezett.

A hangszórós kísérlettel kapcsolatos mérési eredményeket a 4. táblázat tartalmazza 28 sorban. A szokásos oszlopok mellett van néhány magyarázatra szoruló is, a többihez érdemes megnézni a kísérleti berendezés tömbvázlatát (12. ábra). Először az I_G gerjesztőáram által meghatározott hangerősségből származó H₂ mikrofon-hangszóró jeleit ábrázoltam. Az

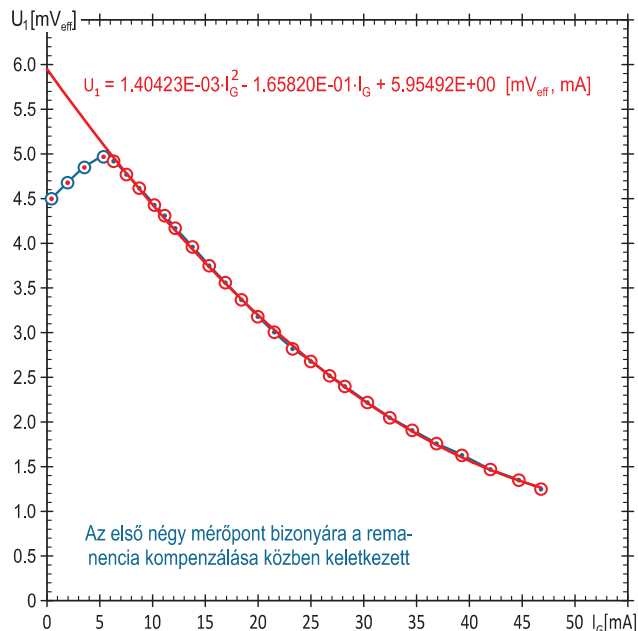
4. táblázat

Mérési adatok és a grafikonok megrajzolásához szükséges kiszámított értékek.

index	I_G (mA)	U_1 (mV _{eff})	U_2 (mV _{eff})	U_{2max} (mV _{eff})	U_2/U_{2max}	$\int U_1 dI_G$
1	0,45	4,50	2,03	33,37	0,061	–
2	1,97	4,68	3,21	33,37	0,096	–
3	3,55	4,85	4,50	33,37	0,135	–
4	5,38	4,97	6,00	33,37	0,18	–
5	6,32	4,92	6,92	33,37	0,207	34,44
6	7,54	4,77	8,05	33,37	0,241	40,39
7	8,76	4,62	9,30	33,37	0,279	46,12
8	10,19	4,43	10,6	33,37	0,318	52,57
9	11,17	4,31	11,6	33,37	0,346	56,82
10	12,15	4,17	12,5	33,37	0,375	60,95
11	13,80	3,96	13,8	33,37	0,414	67,62
12	15,37	3,75	15,2	33,37	0,454	73,64
13	16,90	3,56	16,4	33,37	0,492	79,22
14	18,44	3,37	17,8	33,37	0,533	84,55
15	19,97	3,18	18,9	33,37	0,566	89,58
16	21,54	3,00	20,2	33,37	0,605	94,48
17	23,27	2,82	21,4	33,37	0,641	99,57
18	24,99	2,68	22,6	33,37	0,677	104,3
19	26,77	2,52	23,8	33,37	0,713	109,0
20	28,21	2,40	24,8	33,37	0,743	112,5
21	30,4	2,22	26,0	33,37	0,778	117,4
22	32,5	2,05	27,1	33,37	0,812	122,0
23	34,6	1,91	28,2	33,37	0,845	126,2
24	36,9	1,76	29,2	33,37	0,875	130,4
25	39,3	1,63	30,3	33,37	0,907	134,4
26	42,0	1,47	31,3	33,37	0,938	138,5
27	44,7	1,35	32,2	33,37	0,965	142,3
28	46,8	1,25	32,7	33,37	0,98	145,1

ötödfokú illesztőfüggvény jól mutatta a telítődési tendenciát, ezért egy Pascal-programmal megkerestem a maximum helyét (52,15 mA) és értékét, ez $U_{2max} = 33,37$ mV. Létrejött a várt telítődés. Előkészítettem az ábrázoláshoz szükséges U_2/U_{2max} arányokat is.

A fizikusnak sokkal többet mondanak a táblázat alapján készült grafikonok! Az U_1 indukált feszültség egy igen érdekes formát mutat, ezért az ábrázolásakor a méréseket a negyedik mérőpont után kettévágtam, ugyanis itt fejeződik be a már említett, a kikapcsolásakor keletkezett átmágnesezés legyőzése. Az első négy mérőpontot kék körben piros pont jelzi, a többit a felcserélt színezésű. Megtartottam a kék összekötővonalakat, ezek a mérőpontok alá kerültek. Az indukált feszültség jól láthatóan csökken egy gyenge másodfokú

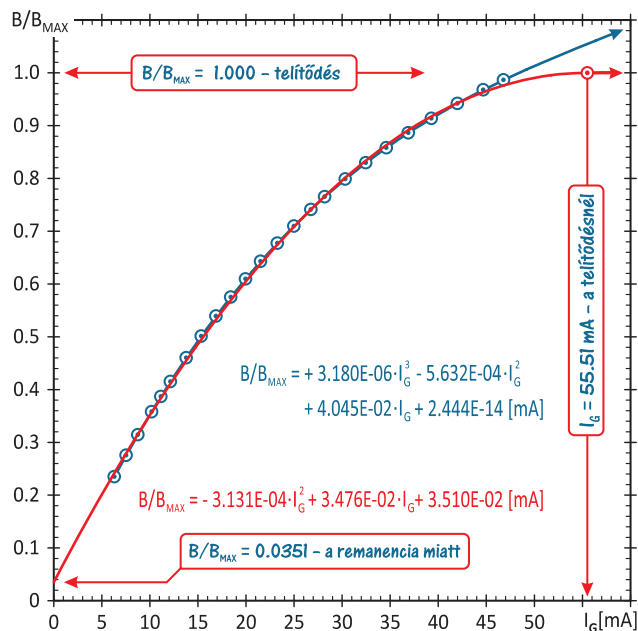


16. ábra. Az indukált feszültség változása a gerjesztőáram függvényében a remanencia kompenzálása előtt és után.

görbe szerint (16. ábra). A piros színű illesztőgörbe egy másodfokú polinomfüggvény, alatta pedig itt-ott a méréseket összekötő kék vonal látszik. Az „itt-ott” az illesztés pontosságát mutatja. Az illesztőgörbe csökkenő tendenciája a mágnesezési görbe telítődésre utal, de elsőfokúra számítottam, annak másodfokú primitívfüggvénye jobban kifejezné a telítődés végkifejletét. E másodfokú görbének van egy minimumpontja az $I_G = 59,04$ mA áramnál, ez a szülőgörbe, a mágneses indukció telítődésére utal (a minimumpont könnyen meghatározható az illesztőgörbe egyenletéből). Még játszottam egy kicsit: az indukált feszültség csökkenése jellegzetesen lineáris kellene, hogy legyen, ezért meghatároztam az elsőfokú, nagyon „nem-illesztő”, a mérőpontokat csúnyán keresztülszelő görbe egyenletét. Ez nem illesztés, csak a tendenciát mutatja:

$$U_1 = -9,3349 \cdot 10^{-2} I_G + 5,2310 \text{ (mV}_{\text{eff}}, \text{ mA)}, \quad (18)$$

majd ebből a mérőpontokra kiszámított primitívfüggvényének maximumhelyét: $I_G = 56,04$ mA. Ez kísérletesen hasonlít a másodfokú illesztőgörbe fent kiszámított minimumhelyéhez. Tovább lépve, ha a mérőpontokon kiszámítjuk a másodfokú illesztőgörbe integrálját (az egy harmadfokú polinomfüggvény lesz), akkor az elektromágneses indukció törvénye alapján a mágneses fluxus változási görbéjének pontjait kapjuk meg (lásd a 4. táblázatot). Ezek az ordinátatengelyi mérőpontok közvetlen kapcsolatban vannak a vasmagban keletkezett mágneses indukció értékével. A kapcsolat néhány állandó fizikai mennyiség szorzatából áll, ami lehetővé teszi az ismeretlen fizikai tartalmú y ábrázolása helyett a telítési indukcióra normált indukció, a B/B_{max} függvény számszerű ábrázolását is, hiszen a szorzók leegyszerűsödnek. A 17. ábrán



17. ábra. A másodfokú illesztőgörbe jól kimutatja a telítődést.

ez valósult meg. A különleges formájú mérőpontok arra utalnak, hogy azok nem valódi mérésekből származnak, a mérőpontokat a másodfokú illesztőgörbe integrálja értékeinek alapján számítottam ki, ezért senkit se tévesszen meg azok tökéletesnek tűnő értéke. (Méréseim pontosak, de azért ennyire mégse!) A rajzolóprogram μm pontossággal helyezte el a harmadfokú szülőgörbe függvényértékeiből kiszámított mérőpontokat, innen van a látszólagos pontosság.

Nagyon bíztam a harmadfokú görbe „igazában”, de nagyot csalódtam. A görbe telítéskeresésre való használhatatlansága már B/B_{max} harmadfokú függvényénél is látható volt, ugyanis a szabad tag szinte tökéletesen zérus, mintegy tizenhárom-tizennégy nagyságrenddel kisebb a függvény origó körüli értékeinél. A kimért remanencia léte ellentmond ennek, ugyanis a H_2 hangszóró gerjesztés nélkül is szólt, a H_1 mikrofonhangszóró pedig mérte ezt a hangerőt (lásd a következő kísérletet!). Keresendő a grafikus maximumot (az illesztőgörbe egyenlete szerintit), kétszeresére hosszabbítottam a görbét, de az az egekbe szökött. Ezután „tudományosan” próbáltam megkeresni a szélsőértéket, de a deriváltból származó szélsőérték-kereső másodfokú egyenletnek negatív lett a diszkriminánsa, vagyis nincs szélsőérték! Ezután a piros színű másodfokú illesztőgörbe megrajzolása következett, ennek van némi remanenciára utaló szabad tagja, de igen fontos az eddigi értékek közelében található szélsőértéke. A 17. ábrán látható a telítődés kezdő áramértéke, az $I_G = 55,51$ mA.

A hangerő függése a gerjesztési áramtól

A kísérlet eredeti célja, hogy meghatározzam azt a gerjesztőáramot, aminél a hangszóró már leadja a várható hangteljesítményt $p\%$ -át, de az elektromágnes melegezése még nem lazítja fel a lengőtekercs ragasz-

tását. Az adatok feldolgozása előtt nemigen láttam számszerű kapcsolatot a mikrofon-hangszóróban keltett hangjel és a mágnesezési görbe meghatározó elemei között. Amint látni fogjuk, a mágnesezési görbe és a mikrofon-hangszóróban keltett hangjel közötti logikai út szinte közvetlen, mert az első mérési sor már rögtön a mágnesezési görbéhez hasonló görbét adott. A H_1 gerjesztett hangszóró az 1 kHz-es szinuszos jelet hanggá alakítja, amelyet a H_2 mikrofon-hangszóró elektromos jellé alakít át. A H_1 hangszóró légréseben levő mágneses indukció és lengőtekercsben folyó áram között elektromágneses kölcsönhatás lép fel. Ez a mágneses indukció a vasmagban keletkezett mágneses indukció „meghosszabbítása”. A hangerőben benne van a vasmag mágneses indukciója is. A hangkapcsolat behoz egy szorzót, erre rátevődik a mikrofon-hangszóró hang \rightarrow jel átalakítási tényezője is. Végül az U_2 -ben, a főhelyen a vasmagban keletkezett mágneses indukció szerepel, amit egy sor ismeretlen, de állandó értékű szorzó alakít mérhető feszültséggé. Ezt a közvetlenséget az is igazolja, hogy az ötödfokú illesztőgörbe szinte tökéletesen illeszkedik a mérőpontokra. Az illesztés pontosságához az is hozzájárult, hogy a mikrofon-hangszóró jelét az RFT millivoltmérő tükrös skálájáról sikerült három számjeggyel leolvasnom.

A mérések mérőpontjai gyenge S-forma mentén helyezkednek el, ezért a görbeillesztéskor csak páratlan fokú polinomfüggvények jöhetnek szóba. Próbálkoztam egy harmadfokú illesztőfüggvénnyel is. Az illesztés kevésbé volt pontos, a remanencia miatti mért feszültség csak $1,23 \text{ mV}_{\text{eff}}$, de a telítődés az előbbiekhöz hasonló értékeknél jött létre ($55,55 \text{ mA}$, $33,08 \text{ mV}_{\text{eff}}$). Ebben a kísérletsorozatban is sikerült kimutatnom a mágnesezési görbe telítődését, és meghatároznom az elfogadható melegeledést produkáló gerjesztőáramot.

Összefoglalás

Két kísérlet leírását láttuk, mindegyiket számos kitéréssel, valójában megpróbáltam körbejárni a felvetődött közös problémát, a mágneses indukció telítődése kezdetének kimutatását. A megoldás makroszkopikus eszközökkel próbálta feltárni a mikroszkopikus jelenséget. Ez a megfogalmazás azt is jelentheti, hogy ezeket a kísérleteket gimnáziumi szinten is elvégezhetjük (én számtalanszor elvégeztem), a diákokkal megfejtethetjük a mélyebb tartalmú kísérleteket. Az első kísérlet problémáiról már szóltam a bemutatás végén, most a másodikkal kapcsolatos szubjektív véleményemet próbálom összefoglalni, megpróbálom rámutatni a kísérlet eredményeire, buktatóira és hibáira.

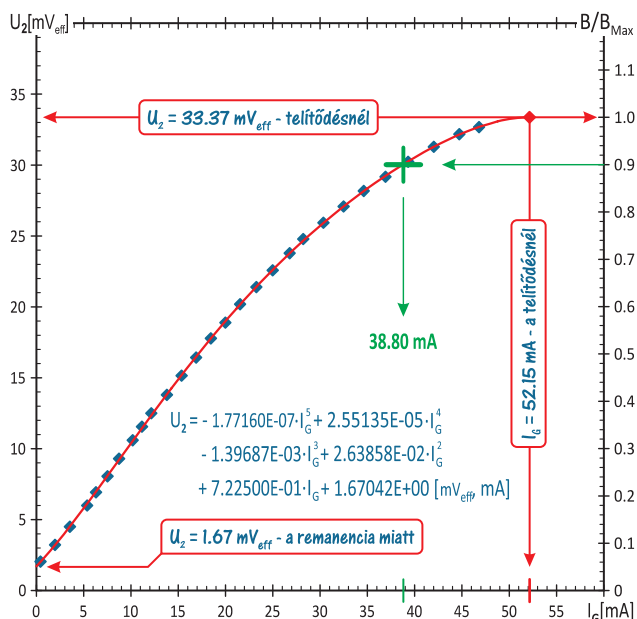
• Rögtön az elején, a 12. ábra szerinti kísérleti berendezés korszerűtlenségét szeretném megokolni. Ez egy régi kísérletem nosztalgizáló megismétlése, egyúttal az „ez van, ezzel dolgozunk” lehetőségének bemutatása is. Ma már végtelenül egyszerűen, egy áramgenerátoros üzemmódú tápegységgel oldanám

meg ugyanezt, de a mágneses indukció telítődését legegyszerűbben egy Hall-szondával lehetne meghatározni. Ekkor kimaradna a fizika, az ok megértése és magyarázata, ez nem az én asztalom. (Ugyanez, mint a számtalan 9,81-es feladat, aminek semmilyen fizikai értelme nincs addig, amíg nem szembesültél a nehézségi gyorsulás meghatározásának gyötrelmeivel!) Ismerek olyan filozófust, aki a számológép nélküli időkből rámaradt kerekítésekéből ($g = 10 \text{ m/s}^2$, $\pi^2 = 10$) a g és a π közötti valósi kapcsolatra következtetett (ez nem vicc!). Hosszú vita után, csak a holdjáró kerekével tudtam megértetni vele a hibás premisszáját.

• Félretéve az eszközök korszerűtlenségét, kiemelném a jelenségek értelmezésének fontosságát. A kezdeti cél a telítődési tendencia kimutatása volt, annak idején csak a görbevonalzót segített megtalálni a telítődést létrehozó áramot. Ennek értékére nem is volt szükség, hiszen azt akartam elkerülni. A mágneses indukció értékének meghatározására két párhuzamos kísérlet született: az indukált feszültség és a hangerő függése a gerjesztőáramtól.

• Az impulzusüzemű tápegységek és a tranzisztoros hangerősítők korában már nem használnak klasszikus transzformátorokat, de a ma divatos retró elektroncsöves erősítők kimenő transzformátorának igényes tervezésekor elkerülhetetlen az első kísérlet módszereinek alkalmazása. Szerintem a jól megtervezett triódás végerősítő hangminősége sokkal jobb a tranzisztoros végfokozatok hangminőségénél (nagyon hosszú a magyarázat). Bernben egy elektronikai világkiállításon a gyönyörű, szuperlapos, világmarkás erősítők között több olyat is láttam, amelyek tetejéből kiálltak az EL34-es végfokozat csövei. Az árukat nem értettem, hiszen sokszorosa volt az előbbieknél, de felvilágosítottak, hogy minősége miatt még mindig ez a „trendi”.

18. ábra. A H_2 mikrofon-hangszóró jele az I_G függvényében.



• Az indukált feszültség függése a gerjesztőáramtól. Az indukált áram értéke egyértelmű kapcsolatban áll a mágnesezési görbe lokális hajlásszögével (lásd az 1. ábrát), de a mágnesezés indukcióhoz csak az indukált feszültség illesztőgörbéje függvényének integrálása árán jutunk el. Fizikailag ez egy szép feladat, de mérésekre nemigen alkalmas a kettős függvénykapcsolat elkerülhetetlen hibái miatt. Ebben én csak az áttételes fizikai jelenségeket értékeltem.

• A hangerő függése a gerjesztőáramtól olyan, mint egy Hall-szondás indukciómérő eszköz, hiszen a hangerő egyenes kapcsolatban áll a mágnesezés indukcióval, a H_1 mikrofon-hangszóró által mért hangjel pedig lineáris kapcsolatban áll a hangerővel. Ezt a közvetlen kapcsolatot jól illusztrálja a 18. ábra, ahol a hangjel áttételes függése a gerjesztőáramtól megtevesztően hasonlít a mágnesezési görbéhez.

• A megengedhető legnagyobb gerjesztőáram. Valamikor egy ilyen görbe segített a helyes értékű gerjesztőáram meghatározásában. Ha megengedünk egy 10%-os hangerőcsökkenést ($B/B_{\max} = 0,9$), akkor a gerjesztőáramot 52,15 mA értékről 38,80 mA-re csökkenthetjük (lásd a 18. ábrát), ez a telítési áram 0,744-szeresének felel meg. A termikus teljesítmény

akkor a $0,744^2 = 0,554$ -re csökken, azaz az eredetinek 55,4%-a lesz. Egyszerűbben: ha elfogadunk egy körülbelül 10%-os hangerőcsökkenést, akkor a gerjesztőáram 25%-os csökkenése eredményeként a felvett hőenergia szinte a felére csökken. Bármennyire nehéz volt a sok mérés-számítás, ez az eredmény bőven megérte!

• Itt még nem álltam meg! Azt már előre tudtam, hogy teljesen reménytelen lenne energetikailag leírnom a lengőtekerics hőmérsékletének függését a gerjesztőáramtól, ezért kísérletileg határoztam meg a még elfogadható gerjesztési hő maximumát. Egy erre a célra készült mérőhidat szerkesztettem, az egyik ágba az összeszerelt hangszóró lengőtekercse, a másikba az etalon pót-lengőtekerics került. A 6000 menetes gerjesztőtekerics már készen volt, a tápfeszültséget változtattam. A híd kiegyensúlyozása után lemértem az órákon át a 75%-os gerjesztőáram által létrehozott melegedést. A saccolt $\Delta t = 10$ °C helyett elfogadtam a picivel magasabb hőmérséklet-emelkedést. A működés közben fellépő tíz amperes áramokat az elmozdulás miatti ellenindukált áram a rézben szinte kioltja, csak a fázistolások miatt keletkezett egyenlőtlenlégek melegítik a lengőtekercsot.

ÜVEG MEGFÚJÁSÁVAL KELTETT HANG FREKVENCIÁJÁNAK VIZSGÁLATA AUDACITY PROGRAMMAL

Tóthné Juhász Tünde

Karinthy Frigyes Gimnázium, Budapest
és ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola

Amikor elfújunk egy üres, vagy részben vízzel teli palack fölött, az hangot ad. Az üveg által kiadott hang magassága (frekvenciája) függ az üvegben lévő víz mennyiségétől: minél több a víz (kevesebb a levegő) az üvegben, annál magasabb a hang.

Ezt a jelenséget mindenki ismeri, az egyszerű „hangszer” fizikaórán vagy -szakkörön való használá-

Köszönöm témavezetőmnek, *Jubász Andrásnak*, hogy kritikái és észrevételeivel és kísérleti ötleteivel segítette a cikk megírását. A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.



Tóthné Juhász Tünde matematika–fizika szakos tanár a budapesti Karinthy Frigyes Gimnáziumban. Az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola hallgatójaként 2019-ben szerzett doktori fokozatot, kutatási területe a számítógéppel segített középiskolai kísérletek volt. Ennek keretében elsősorban egyszerű, ingyenesen letölthető programok segítségével igyekezett mindenki számára elérhetővé tenni a számítógépes kísérletezést. 2016 óta az ELTE–MTA Fizika Tanítása Kutatócsoport tagja.

tát mások is ajánlják [1], mégsem elterjedt és közismert (és nem is magától értetődő) annak magyarázata, hogy pontosan mivel is van összefüggésben a létrejövő hang frekvenciája. Első ránézésre könnyű a jelenséget ahhoz az emelt szintű érettségi kísérlethez hasonlítani, ahol egy hangvilla adott frekvenciájú hangját egy vízbe süllyesztett üvegcsőben lévő levegőoszlop felerősíti, és megmutatható, hogy ekkor az üvegcső hossza körülbelül a hullámhossz negyede [2].

Ha azonban egy borosüveg által kiadott hang elméleti hátterét részletesebben megvizsgáljuk, egy, a diákok által is érthető egyszerű modell segítségével levezethetjük, hogy a létrejövő hang hullámhossza nem az üvegben levő levegő magasságával, hanem a levegő térfogatának négyzetgyökével arányos. Az ingyenesen letölthető Audacity program [3] segítségével pedig az általános egyszerű kvalitatív megfigyelésnél jóval érdekesebb mérőkísérletet is végrehajthatunk, amelynek eredménye – a kísérlet egyszerűsége ellenére – jól egyezik az elméleti modell által megjósolt összefüggéssel, ezért a mérés kifejezetten alkalmas iskolai laborgyakorlatnak is.



1. ábra. Borosüveg megszólaltatása szívószálon keresztül kifújott levegővel. Az üveg megszólaltatásához a szánból kiáramló levegő neki kell ütközzön az üvegnyak belső peremének.

Elméleti háttér

Amikor az üveg felett elfújunk, az üveg nyakában lévő levegő kezd rezegni. Ennek kiváltó oka, hogy amikor megfújunk az üveget, kissé lefelé fújunk, úgy, hogy a szántól elhagyó levegő nekiütközzön a nyak szántól távolabbi végének. (Azt, hogy valóban ilyen irányban kell fújunk az üveg megszólaltatásához, ellenőrizhetjük, ha egy szívószálon keresztül áramoltatjuk ki a levegőt. Az üveg akkor ad hangot, ha az 1. ábrán lévő pozícióban áll a szívószál.)

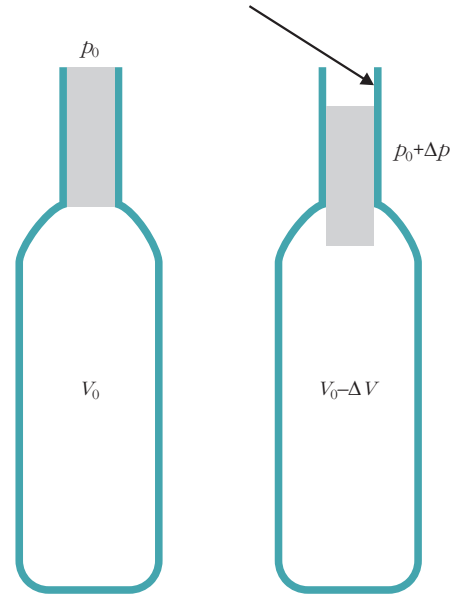
A jelenség értelmezéséhez válasszuk külön a nyakban és az üveg testében lévő levegőt! Az általunk kifújott levegő az üveg nyakának ütközve az ott lévő levegőt hirtelen lefelé nyomja, és ezáltal ezt a kis levegő-adagot rezgésbe hozza, hasonlóan ahhoz, mint ahogy egy rugóra függesztett test a nyugalmi állapotából való kitéréssel rezgésbe hozható [4]. A 2. ábra ezt a folyamatot mutatja.

Mivel a folyamat gyors, feltételezhetjük, hogy adiabatikus, így

$$pV^\kappa = \text{állandó}, \quad (1)$$

ahol p és V az üveg belsejében lévő nyomás és térfogat, κ pedig az adiabatikus kitevő vagy fajhőviszony, értéke levegő esetén körülbelül 1,4.

Ha a nyomás és a térfogat kis megváltozásait vizsgáljuk, implicit deriválással kapjuk, hogy:



2. ábra. Üres üveg nyakában lévő levegő nyugalmi állapotban (bal oldalon) és az üveg felett való elfújáskor (jobb oldalon).

$$\Delta p V^\kappa + p \kappa V^{\kappa-1} \Delta V = 0, \quad (2)$$

azaz

$$\Delta p = -\kappa \frac{\Delta V}{V_0} p_0, \quad (3)$$

ahol V_0 az üveg testében lévő levegő mennyisége, p_0 pedig a légnyomás.

Nézzük meg, hogy az üveg nyakában lévő levegőre mekkora erővel hat az üvegben lévő adiabatikusan összenyomott levegő, amikor a levegőoszlop lefelé mozdul el (3. ábra)!

3. ábra. Az egyensúlyi helyzettől x távolságra lefelé elmozdult levegőoszlop miatt az üveg testében összenyomódik a levegő.

Ha az üveg nyakának hossza L , keresztmetszete A , a levegő sűrűsége pedig ρ , akkor a rezgő levegőoszlop tömege:

$$m = \rho AL. \quad (4)$$

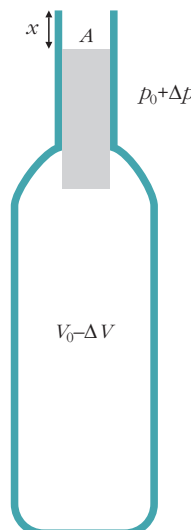
Newton II. törvénye szerint a levegőoszlop gyorsulása:

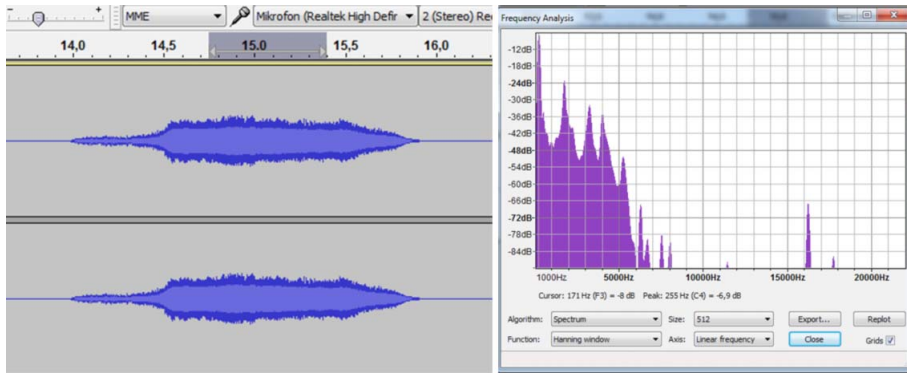
$$a = \frac{F}{m} = \frac{A \Delta p}{\rho AL} = \frac{\Delta p}{\rho L}. \quad (5)$$

Tételezzük föl, hogy az üveg nyakában rezgő levegőoszlop az egyensúlyi helyzettől x távolságot mozdult el lefelé. Beírva Δp helyébe az (3) egyenletet, és kihasználva, hogy $\Delta V = Ax$, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\rho L} \left(-\kappa \frac{\Delta V}{V} p \right) = \\ &= -\kappa \frac{p}{\rho L V} Ax. \end{aligned} \quad (6)$$

Azaz a levegőoszlop gyorsulása ellentétes irányú és egyenesen ará-





4. ábra. A borosüveg által kiadott hang felvétele és spektrumelemzése az Audacity programmal ($V = 157 \text{ cm}^3$, $f = 255 \text{ Hz}$).

nyos az egyensúlyi helyzetéből való kitérésével, tehát harmonikus rezgőmozgást végez. A (6) egyenletet összehasonlítva a harmonikus rezgőmozgás feltételével ($a = -\omega^2 x$), kapjuk, hogy a rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho L V} A}. \quad (7)$$

Mivel $\omega = 2\pi f$, a levegőoszlop rezgésének – és egyben a létrejövő hang – frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho L V} A}. \quad (8)$$

Kihasználva, hogy a hang terjedési sebessége

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}, \quad (9)$$

a frekvenciára kapott képlet az alábbi végső formába egyszerűsödik:

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{LV}}. \quad (10)$$

Az elméleti levezetéssel kapott képletből látható, hogy a frekvencia több, az üveg nyakára jellemző állandó mellett egyedül az üvegben lévő levegő térfogatától függ. Így szerencsésebb, ha az üvegben lévő víz mennyisége helyett az üvegben maradt levegő térfogatára fogalmazzuk át kvantitatív tapasztalatunkat is: ha az üvegben lévő levegő térfogata kisebb, magasabb lesz a kialakuló hang frekvenciája.

Kihasználva, hogy $\lambda = c/f$, azt is megmutathatjuk, hogy a bevezetőben említett érettségi kísérletről eltérően itt a hullámhossz valóban nem a magassággal arányos. Ennek ellenőrzésére – ha az idő engedi – érdemes elvégezni az alábbi egyszerű kísérletet. Vegyünk két műanyag ásványvizes PET-palackot, az egyik legyen fél, a másik másfél literes. Az ásványvizes palackok nyaka egyforma, így a bennük kialakuló hang frekvenciáját a nyak különbsége nem befolyásolhatja. Töltsük tele a nagyobbik palackot vízzel, majd töltsük át belőle a kisebbikbe pontosan annyit, hogy az tele legyen, végül ürítsük ki a kisebbik palackot. Ezzel a

módszerrel kaptunk két olyan palackot, amelyekben ugyanakkora a levegő térfogata, de a levegőoszlop magassága jelentősen különbözik, mivel a másfél literes palack jóval szélesebb. A két palackot megfújva hallható (és mérhető), hogy a kialakuló hangok elfogadható hibán belül egyformák, így belátható, hogy az üvegben kialakuló hang valóban a térfogattól, és nem a levegőoszlop magasságától függ.

Tanulói mérőkísérlet

Az elméleti levezetéssel kapott eredmény ellenőrizhető egy egyszerűen végrehajtható tanulói méréssel. Egy borosüveget töltünk föl a nyakáig vízzel, majd mérjük meg a tömegét. Ezután öntsünk ki belőle valamennyi vizet, és újra mérjük meg a tömegét. Így az üveg testében lévő levegő térfogata meghatározható a hiányzó víz tömegének segítségével. Ezek után indítsuk el az Audacity programban a felvételt és szólaltassuk meg az üveget. A hangfelvételt kielemezve (spektrumelemzés) határozzuk meg a létrejövő hang frekvenciáját. A 4. ábra egy ilyen felvételt és a hozzá tartozó spektrumot mutatja.

Apránként kitöltögetve az üvegben lévő vizet, ismételjük meg a mérést legalább 10-15 alkalommal. Így egy térfogat-frekvencia adatsort kapunk (5. ábra).

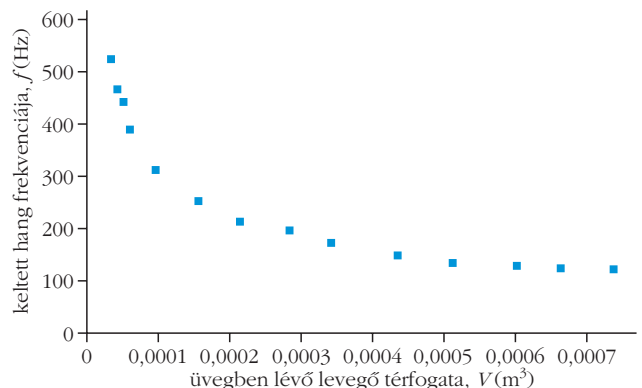
Erről az ábráról még nehéz eldönteni, hogy milyen kapcsolat van a térfogat és a frekvencia között, ezért valamilyen adatkezelő programmal (például Excel) tovább kell elemeznünk.

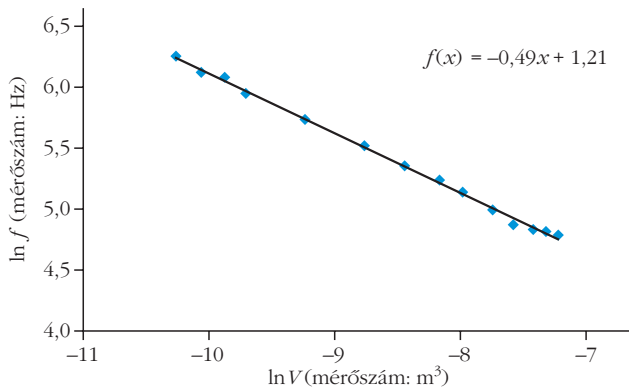
Ha feltételezzük, hogy a frekvencia a térfogat valamilyen hatványával arányos, azaz

$$f = a V^b, \quad (11)$$

ahol a és b konstans, és szeretnénk kideríteni, hogy mi lehet V kitevőjének az értéke, akkor a frekvencia

5. ábra. Az üveg megszólaltatásakor hallható frekvencia a borosüvegben található levegő térfogatának függvényében.





6. *ábra.* Az $f = V^a$ összefüggésben lévő a értékének meghatározása. Az ábrázolt egyenes meredeksége a térfogat kitevőjét adja.

logaritmusát a térfogat logaritmusának függvényében ($\ln f - \ln V$ kapcsolat) érdemes ábrázolnunk (6. *ábra*), mert a logaritmus azonosságai miatt

$$\ln f = b \ln V + \ln a, \quad (12)$$

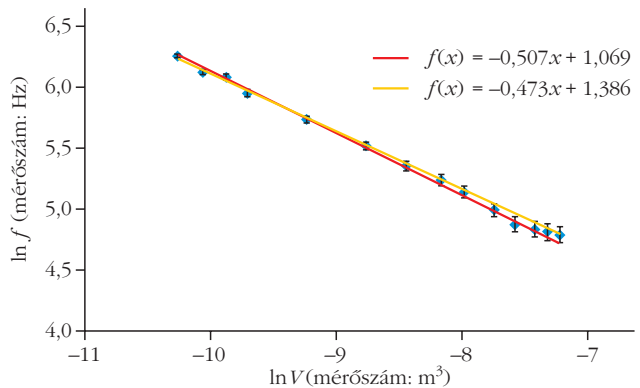
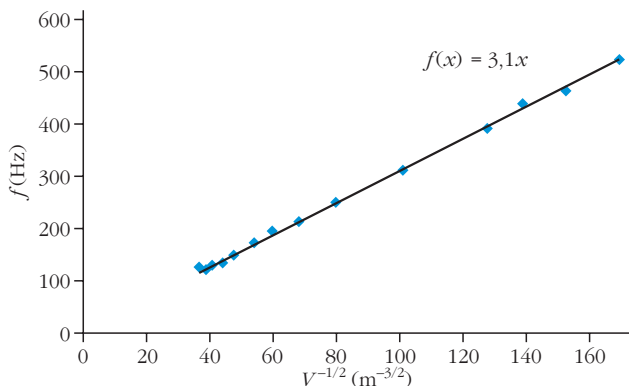
azaz ilyenkor a kapott grafikon meredeksége megadja a keresett hatványkitevőt.

Az egyenes meredeksége $-0,5$ körüli érték, azonban az elmélettel való egyezés igazolásához meg kell vizsgálnunk a meredekség hibáját is. Ehhez megrajzoltuk a hibákkal ábrázolt adatoknak megfelelő legnagyobb és legkisebb meredekségű egyeneseket (7. *ábra*), és ezek segítségével megbecsültük a meredekség hibáját. A kísérletben a legnagyobb hibát a frekvencia mérése adja, ezt több megismételt mérés alapján 8 Hz -re becsültük, ez adja a függőleges hibásávok alapját.

A 6. és 7. *ábra* alapján megállapíthatjuk, hogy az illesztett egyenes meredeksége $m_1 = -0,49 \pm 0,02$, így az elméletileg várt $-0,5$ érték benne van a mérés által kapott intervallumban, azaz az elméleti modellel összhangban a kísérleti eredményeink is azt mutatják, hogy a frekvencia a térfogat reciprokéinak négyzetgyökével arányos. Most már készíthetünk egy olyan grafikont (8. *ábra*), ahol a frekvenciát $V^{-1/2}$ függvényében ábrázoljuk.

A mérőkísérlet tehát igazolta a modell segítségével levezetett összefüggés azon részét, hogy $f = \text{konst.} \cdot V^{-1/2}$.

8. *ábra.* Borosüveg által kiadott hang frekvenciája $V^{-1/2}$ függvényében. (V az üveg testében lévő levegő térfogata). Az illesztett egyenes meredeksége, $m_2 = 3,1$.



7. *ábra.* Az $f = V^a$ összefüggésben lévő a hibájának meghatározása. Az ábrán a hibásávok által megengedett legnagyobb és legkisebb meredekségű egyenest ábrázoltuk.

Az illesztett egyenest tovább vizsgálhatjuk: megpróbálhatjuk meredekségének értékének helyességét is ellenőrizni. A (10) egyenlet alapján a meredekség elméletileg várt értéke:

$$m_2 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{L}}. \quad (13)$$

Behelyettesítve a hangsebességet ($c \approx 340 \text{ m/s}$) és a vizsgált borosüveg adatait (nyak hossza, $L = 9 \pm 0,5 \text{ cm}$, nyak sugara pedig $r = 1 \pm 0,05 \text{ cm}$), azt kapjuk, hogy az elméletileg várt meredekség:

$$m_2 = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\pi} \sqrt{\frac{0,01^2 \pi \text{ m}^2}{0,09 \text{ m}}} = 3,2 \frac{\text{m}^{1,5}}{\text{s}}, \quad (14)$$

hibája pedig

$$\delta m_2 = \delta r + 0,5 \delta L = 0,078, \quad (15)$$

amiből $m_{2,\text{elméleti}} = 3,2 \pm 0,25 \text{ m}^{1,5} \text{ s}^{-1}$ adódik. A kísérletileg kapott meredekség tehát benne van az elméletileg várt intervallumban, ami tovább erősíti az elméleti levezetés és a kísérleti eredmények egyezését.

Összefoglalás

A borosüveggel végzett mérés jó példa arra, hogy egy középiskolás szinten viszonylag bonyolult háttérű jelenség hogyan mérhető egyszerűen az Audacity programmal. Az eredmények kielemezése (akár az elméleti levezetés nélkül is) tanulságos a diákok számára, jó alkalmat ad a grafikonelemzés, linearizálás és a mérési kiértékelés gyakorlására, ezáltal hasznos részévé válhat az iskolai laboratóriumi gyakorlatoknak.

Irodalom

1. Nagy A., Papp K.: Hangszerek a semmiből. *Fizikai Szemle* 59/2 (2009) 65–72.
2. http://dload.oktatas.educaio.hu/erettsegi/nyilvanos_anyagok_2018tavasz/fizika_emelt_szobeli_meresek_2018maj.pdf
3. <https://www.audacityteam.org/download/windows/>
4. https://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu_lectures/lecture3%20/ho_helmholtz/ho_helmholtz.html

ULTRAHANGHULLÁMOK INTERFERENCIÁJÁNAK DEMONSTRÁLÁSA ARDUINÓVAL

– egy automatizált ultrahangszkenner alkalmazása fizikaórán

Vitkóczy Fanni,^{1,2} Piláth Károly,¹ Kopasz Katalin³

¹ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium

²Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

³Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Írásunkban egy saját fejlesztésű és alacsony költségvetésű ultrahangszkenner elnevezésű eszköz alkalmazási lehetőségeit mutatjuk be egy középiskolai fizikaóra keretei között. A kísérleti eszköz alkalmas több ismert interferenciakísérlet demonstrálására ultrahangok segítségével. Az osztálytermi alkalmazáson túl röviden beszámolunk a kísérletsorozathoz kapcsolódó kiscsoportos felmérés eredményeiről, amely az eszköz hatékonyságát vizsgálta az attitűdformálás és az ismeretátadás terén.

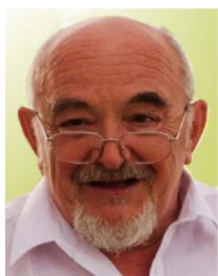


Kísérleti eszközünk megtervezésekor olyan automatikus mérőrendszert igyekeztünk fejleszteni, amellyel érzékletesen bemutathatjuk, hogy az ultrahanghullámok is mutatnak interferenciajelenségeket. Ultrahangforrásként egy UH távolságmérőből származó adót használtunk. E piezoelektromos elven működő hangforrások rezonanciafrekvenciája 40 kHz, így az eszköz által keltett hullámok hullámhossza levegőben 8,5 mm. Ez a hullámhossz lehetővé teszi, hogy a keletkező hullámtér intenzitását akár mm-es felbontásban is letapogassuk egy vonal mentén mozgatott detektorral

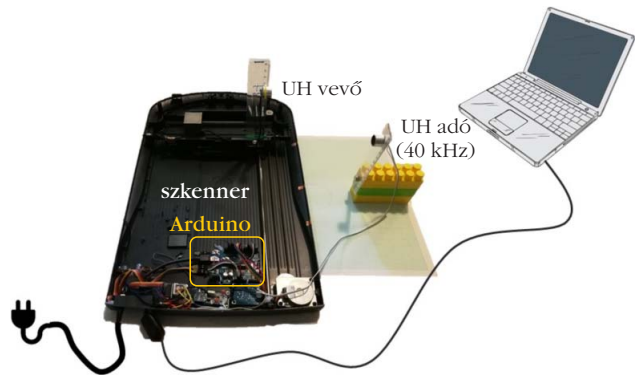
A tanulmány elkészítésében nyújtott támogatásért szeretnénk köszönetet mondani a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programjának, valamint az MTA–SZTE Műszaki Informatika Szakmódszertani Kutatócsoportnak.



Vitkóczy Fanni az ELTE Fizika Tanítása Doktori iskola PhD-hallgatója, valamint 2015 óta az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium fizika és matematika tanára. Fontosnak tartja, hogy diákjai nyitottak legyenek a tudományos ismeretekre, és betekintést nyerjenek a modern, számítógéppel vezérelt mérések világába, az MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport Szenzorok munkaközösségének tagja.



Piláth Károly kutatótanár 1979-ben végzett az ELTE fizika–kémia szakán. Ezt 2005-ben informatikatanári végzettséggel egészítette ki a Veszprémi Egyetem Informatika Karán. Korábban a Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnáziumban tanított, majd 2005 óta a Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium tanára, vezetőtanára. 2013-tól 2018-ig a Trefort fizika–informatika munkaközösségének vezetője. 2017-től nyugdíjas óráadó az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnáziumban.



1. ábra. Kísérleti elrendezés az ultrahangszkennerrel végzett alapmérés esetén.

(mikrofonnal). A mozgatott mikrofon jelét mérve a hanghullámok intenzitásáról kapunk képet a hely függvényében. A hullámtér letapogatásához egy lesejtett síkágvas szkennert mechanikáját használtuk fel. A berendezés egy Arduino mikrokontroller segítségével vezérelhető. A mérés közben a COM-portra küldött adatokat egy Excel adattáblában gyűjtjük a Microsoft Data Streamer bővítmény segítségével, majd egy x - y változós pontdiagramon ábrázoljuk.

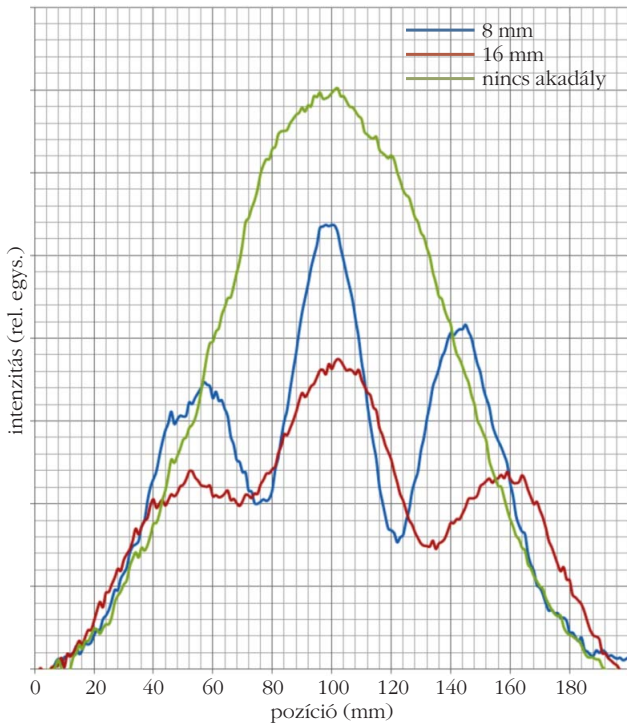
Az eszköz megépítéséhez szükséges részletes leírás és az Arduino kód megtalálható egy korábbi publikációban [1].

Az ultrahangszkenner működése

A kísérleti összeállítás az 1. ábrán látható. Az alapkísérlet során az ultrahangadó pozíciója igény szerint változtatható, a szkennert mechanikája pedig a mikrofont mozgatja a mintavételező szakasz mentén. Az elrendezés a különböző interferenciakísérletek bemutatásához szükséges módon átalakítható.



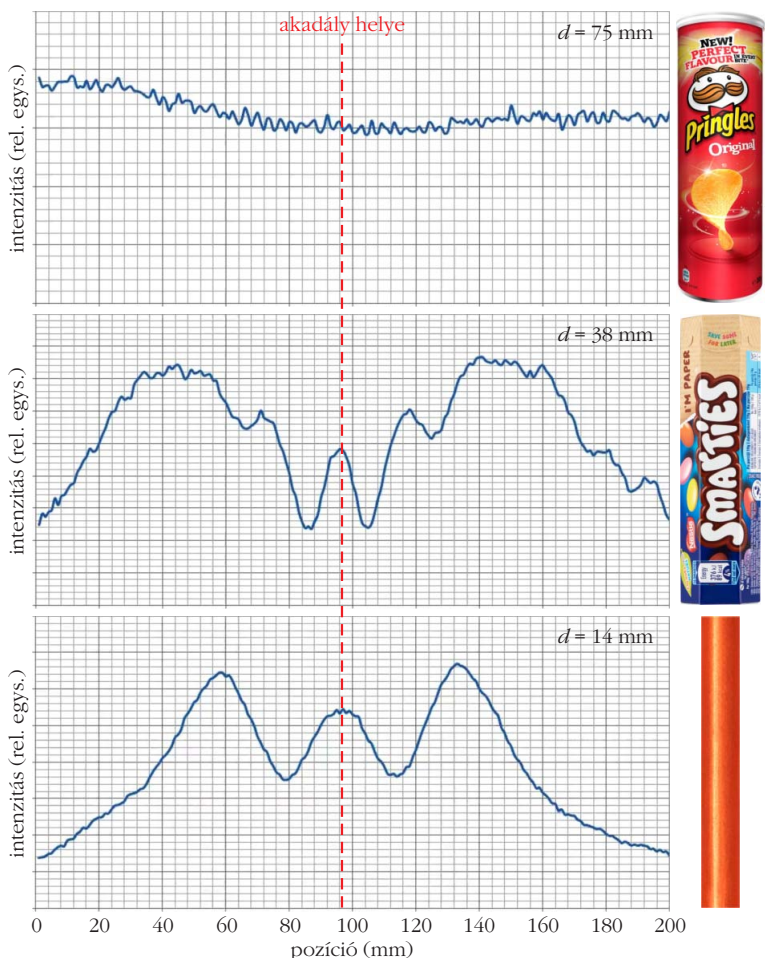
Kopasz Katalin az SZTE Optikai és Kvantumelektronikai Tanszékének adjunktusa, az SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola matematika–fizika szakos tanára. Szakmódszertani órákat tart fizikaszakos hallgatók számára. Kutatómunkája a számítógéppel segített kísérletezés és mérés témaköréhez kapcsolódik, az MTA–SZTE Műszaki Informatika Szakmódszertani Kutatócsoport tagja.



2. ábra. A mért hangintenzitás a hely függvényében akadály nélkül (zöld görbe) és két különböző átmérőjű hengeres akadály esetén (piros és kék görbe).

A program az Arduino-kód futtatásakor inicializálja a működéséhez fontos változókat, majd megkezdji a hardver működtetését. Egy új mérés kezdetén fontos rögzíteni a nulla hangintenzitáshoz tartozó egyenfeszültség szintjét, ezért a szkennelés kezdete előtt, amikor a mikrofon még a 0 mm koordinátájú helyen áll, kikapcsoljuk a hanggenerátor kimenetére adott jelet, majd megmérjük és eltároljuk a csendhez tartozó jelszintet, és a mikrofont kezdő pozícióba állítjuk vissza. Miután eltároltuk ezt az értéket, bekapcsoljuk a hullámforrás hangját. Ezt követően megkezdjük a mikrofon mozgatását a hullámterben. Mozgatás közben adott lépésközönként (5 lépésenként végezzük a mérést) megmérjük a hang intenzitását, majd a mért értékből levonva a csendhez tartozót kiküldjük az így számított intenzitást, valamint az intenzitáshoz tartozó lépésszámértéket arra a COM-portra, amelyen keresztül az Arduino kommunikál a vele kapcsolatban lévő PC-vel. Amikor a mikrofon elérte pályájának legszélső pontjához – ez a lépésszámból kiszámítható – az előre léptetés megáll, és a mikrofon a lehető legnagyobb sebesség mellett visszatér a

3. ábra. Intenzitásgörbék az ultrahang hullámhosszával különböző mértékben összemérhető szélességű akadályok esetén.



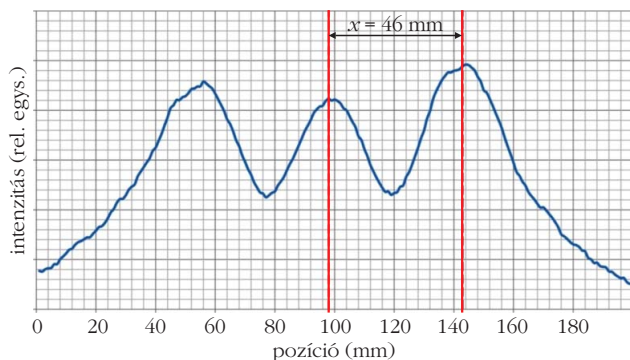
kiindulási helyére. A mikrofon ebben a pozícióban várja a parancsot egy újabb szkennelési folyamat végrehajtására.

Az Excelben az intenzitásértékeket a függőleges tengelyen, a helykoordinátákká konvertált lépésszámokat pedig a vízszintes tengelyen vesszük fel. Mivel a léptetőmotor lépésszáma 20 cm-en 1000, így 1 lépés 0,02 cm távolságnak felel meg. Ezért az 5 lépésenként végzett mérés pontossága éppen 1 mm.

Interferenciakísérletek az ultrahangszkennerral

Az első próbaméréseink egyikében először egy hangszűrő ($f = 40$ kHz) iránykarakteristikáját vettük fel úgy, hogy az ultrahangforrás a mikrofon pályájától 10 cm távolságra, a pálya középpontjára merőlegesen helyezkedett el. Ezt követően a hullámterbe helyeztünk egy 8 mm, majd egy 19 mm átmérőjű hengeres akadályt. A három mérés eredményét egy diagramon ábrázoltuk, amely a 2. ábrán látható. A kapott kvalitatív eredmény könnyedén meggyőzhet bárkit mérőrendszerünk használhatóságáról.

A mérést különböző átmérőjű akadályokkal elvégezve (3. ábra) szemléletesen meggyőződhetünk a hullámhossz és az akadály méretének összemérhetőségének fontosságáról az interferencia esetén.



4. ábra. Az intenzitásgörbe a hely függvényében 14,1 mm széles hengeres akadály esetén, 67 mm távolságban a detektor egyenesétől.

Precíz beállítás mellett a mérés kvantitatív módon is alátámasztja az interferenciáról tanult ismereteket.

Ebben az esetben egy körülbelül 16 cm magas és $14,1 \pm 1$ mm széles hengeres akadályt helyeztünk a vevő útvonalának középpontjától $L = 67 \pm 1$ mm-re, az ultrahangforrás hullámterébe. A mérés során kapott görbe a 4. ábrán látható. Az intenzitásgörbén két szomszédos csúcs távolsága $x = 46 \pm 4$ mm, az ultrahang hullámhossza pedig $\lambda = 8,5 \pm 1$ mm. A hengeres akadály átmérője a jól ismert módon [2] a

$$d = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

összefüggés segítségével meghatározható, ahol α kiszámítható a csúcsok távolsága, valamint a detektor-akadály távolság ismeretében:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{L}$$

Ügyelnünk kell azonban arra, hogy ebben az esetben az akadály és a detektor távolsága nem kellően nagy, így a megszokott $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$ közelítés most nem alkalmazható!

A mérési eredmények alapján az akadály átmérője 15 mm-nek adódik, ami megbízható eredménynek tekinthető, ha megvizsgáljuk a mérés pontosságát.

A hibaterjedés szabályai a középiskolai fizikaórán még kevésbé ismertek a diákok körében, de a mérési pontosság lényeges eleme a mérőkísérleteknek, így – a tanulók számára is érthető módon – mindenképpen ajánlatos kitérni rá néhány mondat erejéig. Ehhez érdemes végiggondolni, milyen eredményre jutunk, ha a mért adatok abszolút hibájából származó szélsőséges értékekkel végezzük el a számítást. Természetesen ügyelni kell rá, hogy a felső határ becsléséhez a művelettől függően a megfelelő értékkel számoljunk tovább. Például szorzás esetén a maximális értékeket szorozzuk össze, osztásnál pedig a maximális értéket osszuk a minimális értékkel. A számítás részeredményei az 1. táblázat tartalmazza.

Látható, hogy a mérőeszköz pontatlanságainak figyelembevételével

az akadály átmérőjének 13,9 mm és 16,4 mm közé kell esnie, azaz a 15 mm-es mért érték és hibája összhangban van a ténylegesnek tekinthető 14,1 mm-es értékkel.

A kísérleti berendezés további interferenciakísérletek demonstrálására is alkalmas. Mint az az 5. ábrán is jól látható, az akadályt megfelelő szélességű résre vagy kettősrésre (például $d = 0,8$ mm) cserélve az optikából ismert interferenciamentához nagyon hasonló intenzitásgörbét kaphatunk.

A kísérlethez használt rések 2 mm vastag sörkartonból készültek. Ez az anyag már kellően szilárd, de nem túl vastag, így külső tartóeszköz nélkül, saját lábazzal is stabilan elhelyezhető vagy befogható a legtöbb iskolában megtalálható, fából készült optikai tartóelemekbe. Vastagsága miatt a réseket lézergravírozással vágattuk a lemezbe, de megfelelő rés szilárdbb kartonpapírból házilag is elkészíthető.

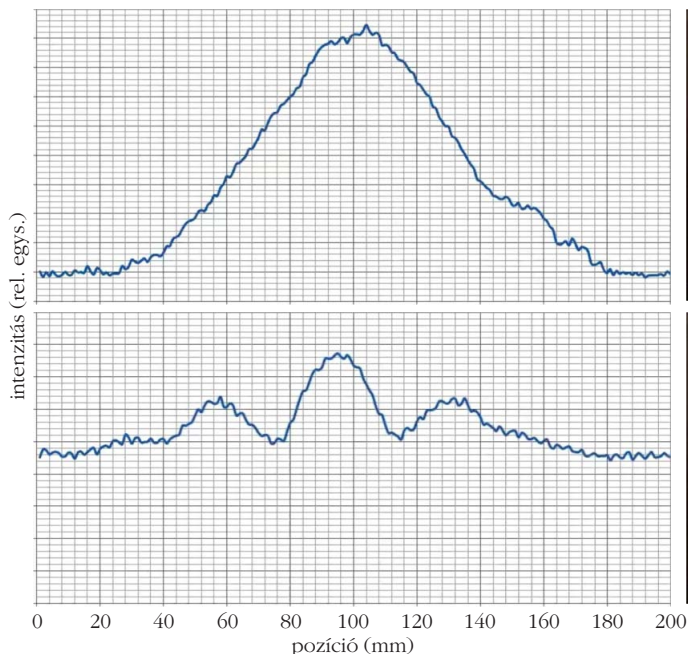
A kísérleti összeállítás gyorsan és könnyedén átalakítható, hogy alkalmas legyen a Lloyd-féle interferenciakísérlet bemutatására is. A mozgó mikrofon egyetlen csavar segítségével leszerelhető a szkennert mozgatómechanikájáról. Helyére egy vastagabb kartonlapból kivágott táblát erősítünk, amely a mozgó tükör szerepét játssza majd a kísérlet során. A leszerelt mikrofont az adóval egy vonalban, a szkennertüloldalán helyezzük el úgy, hogy a mozgó tükör az adó-vevő pár között félfúton helyezkedjen el. A szimmetrikus elrendezés megkönnyíti a kísérlet kvantitatív értelmezését, demonstrációs kísérlet esetén azonban eltekinthetünk tőle. Az adó és a vevő stabil, de igény szerint átalakítható, méretezhető talpzata néhány duplo kocka és mágnesek segítségével egyszerűen kivitelezhető.

A kísérleti elrendezés és az intenzitásgörbe a 6. ábrán látható. Az intenzitásgörbéről a maximális erősítéseket jelző szélsőérték helyek könnyen leolvashatók, így jó becslést készíthetünk az ultrahangforrás hullámhosszára.

Osztálytermi tapasztalatok, avagy a szkennert bevetésen

A kísérleti eszköz tanórai alkalmazására is sor került. Első alkalommal 11. évfolyamon mutattuk be az eszközt és a fent említett interferenciakísérletek közül néhányat olyan fizikacsoportoknak, ahol alapóraszámban tanulták a fizikát. Tapasztalataink alapján az

1. táblázat							
A mérési pontatlanság becslésének részeredményei							
	x	L	$\operatorname{tg} \alpha = x/L$	α	$\sin \alpha$	λ	$d = \lambda / \sin \alpha$
mért	46 mm	67 mm				8,5 mm	
hiba	± 4 mm	± 1 mm				$\pm 0,1$ mm	
min.	42 mm	66 mm	0,6176	$31,701^\circ$	0,5255	8,4 mm	13,91
max.	50 mm	68 mm	0,7576	$37,147^\circ$	0,6039	8,6 mm	16,36



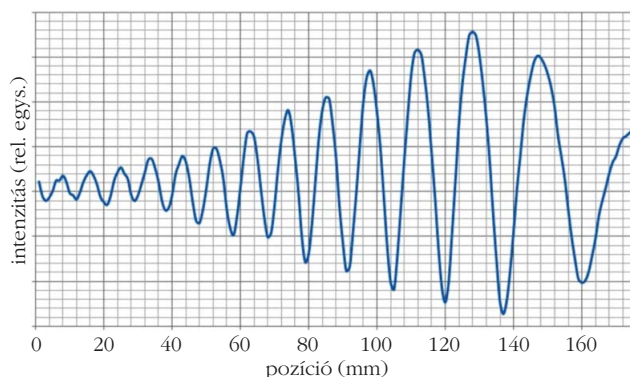
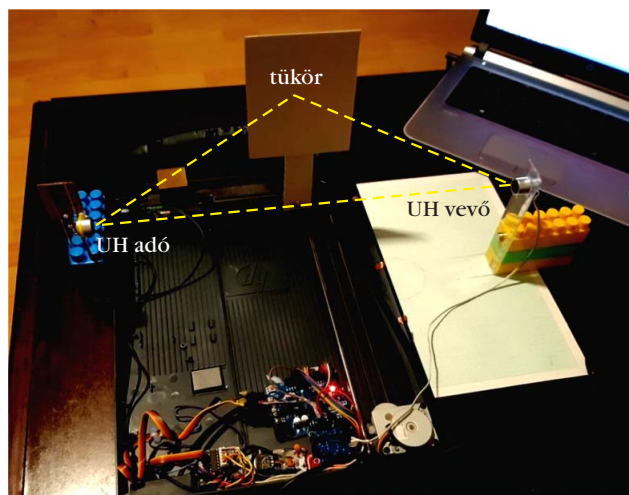
5. ábra. Intenzitásgörbe a hely függvényében rés és kettősrés esetén.



vizsgáltuk, mennyire sikerült felkelteni a tanulók érdeklődését, és azt, hogyan korrelált az eszközhöz és a kísérletekhez való viszony a csoport általános attitűdjével a fizika tárgy iránt. A kérdőívet összesen 30 tanuló töltötte ki, a válaszokat 1-től 6-ig terjedő skálán kellett megjelölni (1: egyáltalán nem, 6: teljes mértékben). A válaszok elemzését követően az alábbi főbb következtetésekre jutottunk. Bár a csoport általános érdeklődése a fizika iránt nem túl magas (átlagosan 3,4), a kísérleti eszközt érdekesnek találták, átlagosan 4,7 pontot kapott. A válaszok megoszlása a 7. ábrán látható. Szembetűnő eredmény volt, hogy a tanulók több mint 86%-a találta érdekesebbnek az eszközt, mint általában a fizikát. Érdeemes megjegyezni, hogy a diákok saját véleményük alapján átlagosan 3,1 pontot adtak arra, a fizikai jelenségek számukra

eszköz jól kezelhető, a diákok számára jól látható, a kísérletek bemutatása sikeresen megtörtént. A bemutatóhoz kapcsolódóan kérdőíves felmérést végeztünk a diákok körében. A felmérés során elsősorban azt

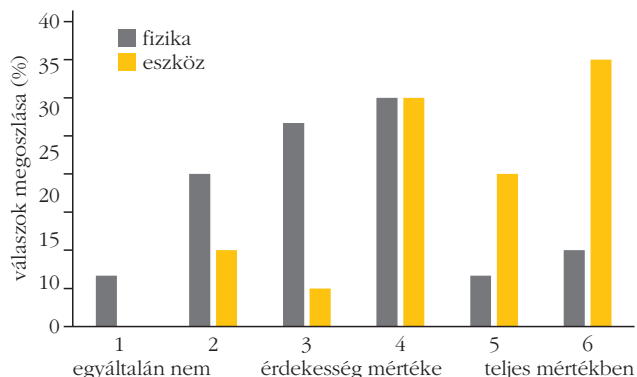
6. ábra. A Lloyd-féle interferenciakísérlet elrendezése és a kapott intenzitásgörbe a hely függvényében.



általában mennyire érthető, az eszközzel bemutatott interferenciakísérletek és az eszköz működésének érthetőségét azonban 4,7 pontra értékelték.

A 2019/2020-as tanév végén a digitális munkarend mellett lehetőségünk nyílt egy átfogóbb felmérésre. Két 11. osztályban, összesen 55 tanuló bevonásával végeztünk attitűdre és ismeretátadásra fókuszáló felmérést. Az optika témakör befejezését követően a teljes modern fizika anyagrészt a digitális oktatás keretei között zajlott. A két osztály tanulói teljesen azonos digitális tananyagot kaptak a témakör elsajátítása során, elsősorban magyarázattal ellátott prezentációk formájában. Azonos volt a feladatok ütemezése és a számonkérések módja is. A témakör kezdetén a tanulók kitöltötték egy előzetes kérdőívet, amely az általános kérdéseken túl attitűdre, előzetes ismeretekre és hipotézisekre vonatkozó kérdéseket is tartalmazott az optika és a modern fizika témaköréből egyaránt. A tanegység végén a kísérleti csoport (25 fő) kiegészítésként kapott egy körül-

7. ábra. A 11. osztályos tanulók körében készített felmérés során, általában a fizika és az ultrahangszkenner iránt mutatott érdeklődésre vonatkozó kérdésre kapott válaszok (1: egyáltalán nem, 6: teljes mértékben) eloszlása.



belül 25 perces kiegészítő prezentációt, amely az ultrahangszkennelrel végzett kísérletsorozatról készült videókat és a mérési eredmények bemutatását és elemzését tartalmazta, a kontrollcsoport (30 fő) azonban nem. A témakör végén mindkét csoport tanulói kitöltötték egy utólagos kérdőívet is.

A kiegészítő anyag a fent említett interferenciakísérletek közül majdnem az összes variációt tartalmazta. Megvizsgáltuk az interferenciamintázatot helyettesítő intenzitásgörbét résen és különböző átmérőjű hengeres akadályokon történő diffrakció esetén, valamint az ismert Young-féle kettősrés-kísérletet ultrahang segítségével.

Az előzetes kérdőívre beérkezett válaszok alapján a kísérleti csoport fizika iránti általános érdeklődése kis mértékben, de nem szignifikánsan alacsonyabb, 5 fokozatú skálán mérve 3,42 pont, míg a kontrollcsoport esetén az átlagos pontszám 3,63 pont, 0,63 és 0,88 pontos szórás mellett. Hasonló, nem szignifikáns eltérés tapasztalható az előző tanév végi érdemjegyek átlagát vizsgálva a kontrollcsoport javára (az érdemjegyek átlaga 4,13 és 4,82, a szórással pedig 0,95 és 0,48 pont). Az előzetes tudásra vonatkozó kérdések során a kísérleti csoport által elért átlagos pontszám nem mutatott szignifikáns eltérést ($9,88 \pm 2,59$ pont) a kontrollcsoport pontjaihoz képest ($9,67 \pm 2,40$ pont). A tanegység végén kitöltött utólagos kérdőív során a kontrollcsoport átlagos pontszáma $9,70 \pm 2,49$ pont lett, míg a kísérleti csoport tanulói $10,33 \pm 2,11$ pontot értek el. Az elektronrészecske és hullámtermészetére vonatkozó kérdések azt mutatják, hogy a kísérleti csoport pontszáma majdnem kétszeres növekedést mutat a kontrollcsoport pontszámához képest.

A fizikával és az új kísérletsorozattal kapcsolatos, attitűdformálásra irányuló kérdések során jelentős változást tapasztaltunk a kísérleti csoport válaszainak áttekintésekor. Az eszközre és a megtekintett kísérletekre vonatkozó kérdésekre kapott átlagos értékeket minden

esetben a fizika iránt mutatott általános attitűdvizsgálat során elért pontszámokhoz viszonyítottuk. Az ultrahangszkennel, mint kísérleti eszközt 14,53%-kal találták érdekesebbnek, és 18,66%-kal érthetőbbnek, a kísérleteket pedig 10,98%-kal érdekesebbnek és 21,34%-kal érthetőbbnek a tanulók. A válaszokból az is kiderült, hogy a tanulók általában kevésbé érdeklődnek a számítási feladatok iránt a fizikaórán, az eszközzel végzett kísérletek kvantitatív elemzése azonban 16,67%-kal érdekesebb lenne számukra a megszokott számítási feladatokhoz képest. Bár látható, hogy az eszköz a digitális oktatás során is alkalmazható és a kontrollcsoport tanulóinak 29,1%-a szerint nem vesztett az érdekességéből az online bemutatás miatt, 58,3% úgy gondolta, számára még érdekesebb lett volna a bemutató a hagyományos oktatás keretei között. Tovább árnyalja azonban a képet, hogy a tanulók kevesebb, mint fele (46,3%) gondolta úgy, hogy élő bemutatón esetleg jobban érthető lett volna számára a kísérletsorozat, míg az előző kérdéshez hasonlóan 29,1% számára nem csökkent a bemutatott kísérletek érthetősége a digitális munkaforma következtében.

Összefoglalva a felmérés eredményeit, a feldolgozott adatok azt mutatják, hogy az ultrahangszkennelrel végzett kísérletek segítettek a tanulóknak a hullámoptikai és geometriai optikai szemlélet közötti különbségek megértésében, az interferenciajelenségek értelmezésében, az elektronnal kapcsolatos ismeretek megújításában és az anyaghullám-szemlélet elfogadásában. Ezen túl árnyalta és formálta a tanulóknak kialakult képet a fizika, mint tudományterület hatásáról a mindennapjainkra és a tudományos fejlődésre más tudományágak esetében is.

Irodalom

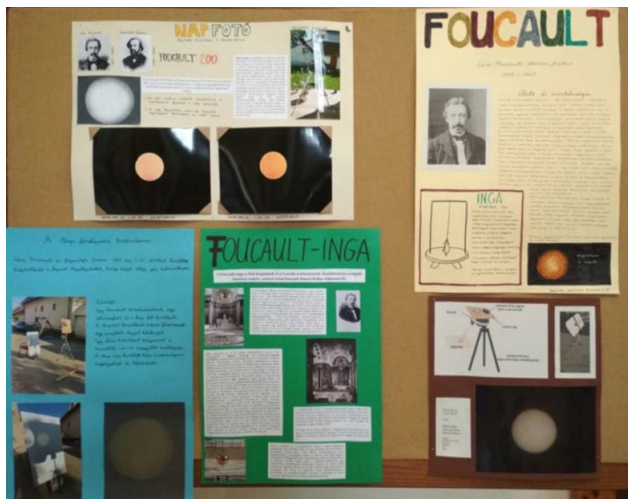
1. Vitkóczy F., Piláth K.: Measuring interference with ultrasound and Arduino, IJIER 8/7 (2020) 60–75.
2. <http://fft.szies.hu/fizika/Turkalo/labor/lezer/lezer.pdf>

ÚJRA LENGETT A KESZTHELYI FŐ TÉRI TEMPLOMBAN KUNC ADOLF FOUCAULT-INGÁJA

Farkas László
Keszthelyi Vajda János Gimnázium

A Foucault-féle ingakísérletet Magyarországon először 1880-ban *Kunc Adolf* (1841. december 18. – 1905. szeptember 12.), gimnáziumunk volt premontrei diákja, majd fizikatanára végezte el a szombathelyi székesegyházban. E szoros kötődés miatt is kötelességünknek éreztük, hogy az *ifj. Zátonyi Sándor* tanár úr által meghirdetett országos rendezvényhez csatlakozzunk. Az évforduló kapcsán *Foucault 200* elnevezéssel az egész iskolát megmozgató prográ-

mokat szerveztünk, amelyeken megemlékeztünk *Léon Foucault* (1819. szeptember 18. – 1868. február 11.) és Kunc életéről, munkásságáról és bemutattuk tudományos tevékenységüket. Külön öröm volt, hogy a fizikatanárokon kívül a magyar és francia szakos tanárkollégák és diákjaik is csatlakoztak a meghirdetett kétnapos programjainkhoz. A poszter-, fotó- és eszközkiállítás egy hétig volt megtekinthető a gimnázium folyosóján.



A két nap programja

2019. szeptember 17., kedd. Tizenöt diákunk igényes, kreatív plakátot készített Foucault munkásságáról, amelyeket poszterbemutató keretében tártak a látogatók elé. Fotókiállításon mutattuk be hét tanulónk Foucault-féle módszerrel készített Nap-fényképét. Az eszközkkiállításon hat darab, „újragondolt” Foucault-inga modellje és egy „örvényáramos fék” szerepelt.

A második napon, szeptember 18-án rendhagyó fizikaórákat tartottunk – 7-et magyarul és 4-et franciául – Foucault életéről, munkásságáról. Vetélkedőt szerveztünk, a 13+1 kérdéses, Foucault munkásságával és annak keszthelyi kapcsolódásával foglalkozó totótesztet 78, míg francia nyelvű változatát 50 diák töltötte ki.

Bátran mondhatjuk, hogy e két nap fénypontja a Foucault-féle ingakísérlet felelevenítése volt a Fő téri templomban Kunc Adolf eredeti, 1880-as ingájával. Az ELTE Gothard Asztrofizikai Observatóriumában (Szombathely) őrzik azt a 30 kg tömegű, vasból esztergált fémgömböt, amellyel a tudós tanár Magyarországon először igazolta a Föld forgását. Ezt a gömböt hoztuk el a keszthelyi templomba, és akasztottuk fel a 16 méter hosszú acélsodronyra, míg a huzal másik végét a templom kupolájában elhelyezett felfüggesztéshez rögzítettük. A kupola tetején lévő csillárnyílásba még 2005-ben a Fizika Éve és Kunc Adolf halálának 100. évfordulója alkalmából tartott ingakísérlet során helyeztük be a speciális felfüggesztő szerkezetet.



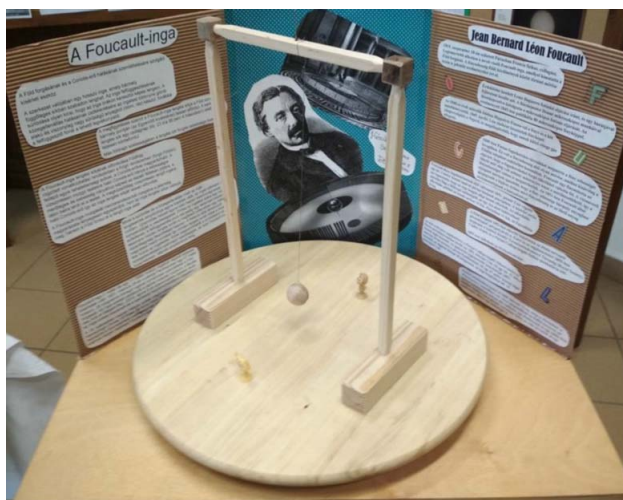
Farkas László közel 30 éve tanít matematikát és fizikát a keszthelyi Vajda János Gimnáziumban. Munkaközösség-vezető, szaktanácsadó, mesterpedagógus. A bő negyedszázada minden évben megrendezésre kerülő keszthelyi Newton Kupa komplex természettudományi verseny elindítója. 16 éven át volt az ELFT Középiskolai Tanári Szakcsoport vezetőségi tagja. Kiténtetései: 2002 Ericsson-díj, 2007 Mikola-díj, 2013 Bonis Bona – A Nemzet Tehetségeiért-díj, 2020 Rátz Tanár Úr Életműdíj.



tet. Azóta felújították a templomot, a teljes tetőt lecserélték, de szerencsénkre e szerkezet a régi helyén, a kupola felett maradt.

Az Foucault-évforduló napján gimnáziumunkban rövidített órák voltak, hogy a tanítás végén az egész iskola, 400-nál több diák és felnőtt átvonuljon a szomszédba, a Fő téri templomba, és szemtanúja lehessen az immár második alkalommal elvégzett tudománytörténeti eseménynek. A kísérlet előtt *Farkas László* tanár úr vetítéssel egybekötött előadás keretében méltatta Foucault és Kunc munkásságát.

A kitérített inga gömbjének rögzítő fonalát a házigazda, *Tál Zoltán* plébános úr égette el, és ezzel 8 másodperces periódusidővel elkezdett lengeni a Fou-





cault-, illetve Kunc-féle inga. A gömb alján lévő 6 cm hosszú túske körülbelül 5 perc múlva döntötte fel az első bábut a közönség óriási ovációja közepette.

Ez a két nap a Vajda János Gimnáziumban nemcsak Foucault-ról és Kuncról való megemlékezésről szólt, hanem egyben a fizika ünnepe is volt!

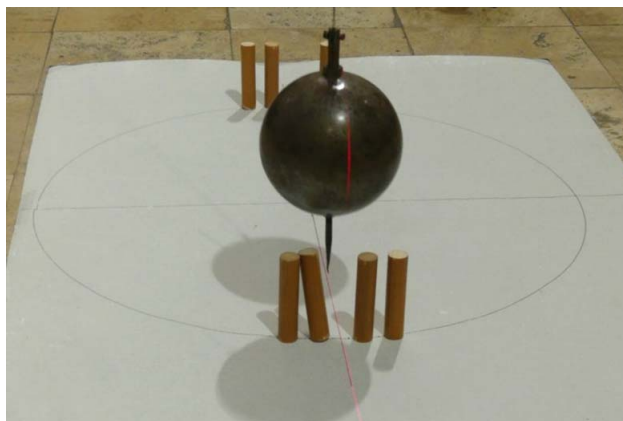
A Foucault 200 pályázat díjazottjai

A Foucault 200 eseménysorozat magánkezdeményezés volt, az egyes eseményeket önként csatlakozó magánszemélyek, illetve intézmények szervezték. A rendezvénysorozathoz való csatlakozás ösztönzésére ifj. Zátonyi Sándor pályázatot hirdetett a kollégák számára. Eredendően három díj kiosztását tervezte, de végül két-két második és harmadik díjat osztottak ki az alábbi pályázóknak.

1. díjat nyert Farkas László, a Keszthelyi Vajda János Gimnázium tanára az előbb leírt események elismeréseként. Jutalma egy SkyWatcher BK709 EQ1 távcső és állvány.

Megosztott 2. díjat kapott *Csorba Imre*, a Bibó István Gimnázium tanára. Kiskunhalason a következő eseményeket tartották: 1. a Föld forog – ingakísérelt bemutatása; 2. a Foucault-inga mozgásának bemutatása modellíngával; 3. ingamozgás „alulról” – filmkészítés mobiltelefonnal az ingamodell mozgásáról; 4. Foucault munkássága – plakátokkal, prezentációval; 5. a Napfelszín tanulmányozása veszélyek nélkül.

A másik 2. díjazott *Tepliczky István*, a Herman Ottó Gimnázium (Miskolc) tanára volt. Ők Foucault 200. születésnapján bemutatták a gimnázium Foucault-ingáját, rendhagyó órákat tartottak az inga mellett,



poszterbemutatót készítettek, kísérleti bemutatót tartottak az örvényáramokról, az ingáról és sok más érdekességről, vendégül látták más iskolák tanulóit is.

A második helyezettek jutalma egy-egy LuxTools lézeres távolságmérő volt.

Megosztott 3. helyezést ért el *Sinkő Andrea*, a Kanizsai Dorottya Gimnázium (Szombathely) tanára. Náluk, a Csodák Folyosóján a két híres inga (Foucault- és Eötvös-inga) történetéről, hasznáról, működésük magyarázatáról kaphattak betekintést a látogatók magyarázó tablók és makettek, modellek, kísérleti eszközök segítségével.

A másik 3. díjat *Csatári László*, Kratochvil Károly Honvéd Középiskola (Debrecen) tanára kapta. Ott több módszerrel megmérték a fény sebességét, ingát lengettek, giroszkópot készítettek, örvényáramos bemutatót tartottak, megfigyelték és fényképezték a Napot.

A harmadik helyezettek jutalma egy-egy, az örvényáram kimutatására szolgáló eszköz volt.

Tesztvetélkedő Léon Foucault-ról



A résztvevők be kellett karikázzák az általuk helyesnek gondolt állítás betűjelét, minden kérdésnek csak egy helyes megoldása volt.

- Foucault a középiskola után milyen irányban kezdett el tanulni az egyetemen?
A) mérnöki B) orvosi C) tanári
- Kivel készítette el közösen Foucault a Nap felszínéről első dagerrotípiákat?
A) Kunccal B) Gay-Lussac-kal C) Fizeau-val
- Elsőként Foucault mérte meg a fény sebességét vízben. Körülbelül mekkora értéket kapott?
A) 500 000 km/s B) 300 000 km/s C) 225 000 km/s
- Foucault-féle áramot hogyan hívjuk másképp?
A) örvényáram B) kóboráram C) váltóáram
- A Foucault vagy Kunc ingájának gömbje volt nehezebb?
A) Kuncé B) Foucault-é C) azonos súlyú

6. Magyarországon hol végezték el elsőként a Foucault-féle ingakísérletet?
A) Budapest B) Keszthely C) Szombathely
7. Hol fordul el legnagyobb szöggel egy nap alatt a Foucault-inga lengési síkja?
A) Párizs B) Budapest C) Keszthely
8. Mekkora szöggel fordul el egy óra alatt a Foucault-inga lengési síkja az Egyenlítőn?
A) 0° B) 90° C) 180°
9. Foucault az ingakísérleten kívül milyen más eszközzel mutatta ki a Föld forgását?
A) giroszkóp B) periszkóp C) teleszkóp
10. Hol található Foucault-kráter?
A) Franciaországban B) Marson C) Holdon
11. Foucault alkalmazott először a csillagászati távcsövekben fémréteggel bevont ...
A) lencsét B) üvegtükröt C) prizmát
12. Mi forgatta a tükröt annál a mérésnél, amellyel Foucault meghatározta a fény sebességét vízben?
A) villanymotor B) dízelmotor C) gőzturbina
13. Foucault fedezte fel, hogy forgó fémkorongban a mágneses mező áramot indukál. Ezt napjaink egyes járműveinek mely részében használják fel?
A) fékberendezés B) motor C) lámpa
- +1. A keszthelyi Fő téri templom kupolájának teteje 16 méter magasan van. Az ide felfüggesztett, lengő Kunc-féle inga milyen gyakran fog megállni?
A) 2 s B) 4 s C) 8 s

SZÓRAKOZTATÓ FIZIKA

HUMOR A TUDOMÁNYBAN, TUDOMÁNY A HUMORBAN

Horváth Dezső
Wigner FK

Mottó: *Általános szabály, hogy az okos ember bülyéskedik, a bülye meg okoskodik. Okoskodást olvasunk eleget, nézzük meg a másik oldalt, mit bülyéskednek tudós kollégáink.*

Az ötletet kedvenc olvasmányaim, a Vagabund kiadó viccgyűjteményei adták: *Hallók Ákos* 16 kötetnyi viccet gyűjtött, kötetenként 1000-nél több viccel. Ha van is némi átfedés a viccek között, akkor is legalább 15 000 viccről van szó. Találtam közöttük jó néhány tudományos tartalmút, azután a világhálón is kutattam, íme egy válogatás. (Lesz még folytatás!)

Matematika és természettudományok

Matematika felső fokon

Rejtély: hogyan tévesztheti össze egy amerikai matematikus Mindenszenteket Karácsonnyal?

Megoldás: Oct 31 = Dec 25 (nyolcas és tízes számrendszerben).



Horváth Dezső Széchenyi-díjas kísérleti részecskefizikus. 1970-ben végzett az ELTE-n, vizsgálatait Dubnában és Leningrádban kezdte, a kanadai TRIUMF-ban, az amerikai BNL-ben, a svájci Paul-Scherrer Intézetben, az olasz INFN-ben, majd a CERN-ben folytatta. Budapest–Debrecen kutatócsoportokat szervezett CERN-kísérletekre. 2006 óta koordinálja a magyar fizikatanárok részecskefizikai oktatását a CERN-ben. Emeritus professzor, magántanárként részecskefizikát oktat a Debreceni Egyetemen.

Két matematikus a vendéglőben vitatkozik, mennyire jártasak az egyszerű emberek a matematikában. Az egyik félrehúzza egy pincéernőt és megkéri: *Sétáljon el az asztalunk mellett. Én megállítom és kérdezek valami, maga nem fogja érteni, de mondja azt, hogy „x-köb per három”.*

A pincéernő odasétál, és az első matematikus megkérdezi: *Mondja kedves, tudja, mennyi x-négyszet integrálja?*

– *Persze* – mondja a pincéernő –, *x-köb per három.*

– *Na ugye!* – mondja az első matematikus.

Mire a pincéernő, a vállá felett, már elmenőben: *Plusz konstans!*

Mit mond a nulla a nyolcasnak? *Klassz az öved!*

A fűrésztelep vezetője és a római polgár két ujját fenntartva kér 5 sört.

Egy matematikaprofesszor észrevette, hogy eltört a cső a konyhai lefolyójában, kihívta hát a vízvezeték-szerelőt. A mester rendesen megcsinálta a lefolyót, a matematikus is elégedett volt, amíg kézhez nem kapta a számlát, amely a havi fizetésének harmada lett. Panaszkodott hát a szerelőnek, aki elmondta, hogy sajnálja, meg megéri, de hát ez van, jöjjön el ő is a céghez dolgozni, ott sokkal jobban fog keresni, csak tagadja le a végzettségét, mert a főnökei nem szeretik a túlképzett embereket.

A matematikus jelentkezett a vízvezeték-céghez, és fel is vették, mivel azt hazudta, hogy csak 7 általánosos van. Ezek után mint szerelő dolgozott, és egyre

többet keresett. Egy nap a cég vezetése kitalálta, hogy elküldik esti iskolába azokat a munkásokat, akiknek nincs meg a 8 általános. Így a professzort is elküldték. Az első ilyen órán, amely történetesen matematika volt, a tanár, hogy tisztába jöjjön az osztály tudásával, megkérdezte tőlük, ki tudná megmondani, mi a kör területének a képlete. Épp a professzort kérdezte meg, aki ki is ment a táblához, de azt vette észre, hogy hirtelenjében nem jut eszébe a képlet. Elkezdte hát levezetni és azt kapta, hogy $-r^2\pi$. Nem tetszett neki az a mínusz, idegesen körbetekintett az osztályon és hallotta, ahogy a többi szerelő ezt suttogja: – „Cseréld fel az integrálási határokat!”

Fizika

Az elmeotthon vezetője felülvizsgálja fizikus ápolójukat.

- Mondja meg nekem – kezdi –, ha elengedjük, mit akar kezdeni az életével?

A páciens azt mondja:

- Csodálatos lenne visszamenni a valós életbe. Magfizikus voltam, és ha újra kezdek, én a továbbiakban csak elmélettel foglalkozom. Abban bízom, hogy az kevésbé lesz megterhelő.

- Nagyon jó! – mondja a főorvos.

- Lehet, hogy tanítanék. – folytatja az ápoló – Van jó néhány dolog, amit át kell adni a tudósok új nemzedékének, hogy a további felemelkedésünk biztosítva legyen.

- Remek!

- Aztán meg írhatnék is. Jelentős szükség van a nagyközönség számára a tudományra vonatkozó könyvekre. Talán még regényt is írhatok a tapasztalataim alapján.

- Érdekes lehetőség – bólogat az igazgató.

- És végül, ha ezek közül egyik sem jönne össze, még mindig maradhatok teáskanna.

Két atom beszélget:

- Képzeld, elvesztettem egy elektronomat!

- Most mihez kezdesz?

- Mit is csinálnék, pozitívan állok hozzá.

Figyelmeztetések az eladott tárgyak használati utasításaiban:

- Vigyázat, ez a tárgy meggömbíti maga körül a teret, de az nem befolyásolja a használhatóságát.
- Az eszköz anyaga 99,99%-ban üres tér, rengeteg gyorsan mozgó, apró részecskét tartalmaz és kis intenzitású infravörös sugárzást bocsát ki.
- Az eszköz anyagában az entrópia (azaz a káosz) állandóan növekszik, az ebből eredő problémákért a gyártó nem vállal felelősséget.
- Az eszköz anyaga egy kisváros megsemmisítéséhez elegendő energiát tartalmaz, ezért szigorúan tilos azt energiává alakítani, tehát tilos antianyaggal érintkezésbe hozni.
- A vásárolt anyaghoz a gyártó pontosan ugyanolyan elektronokat, protonokat és neutronokat használt, mint más, drágább áruhoz.

A technikusok szerint a probléma a billentyűzet és a székem között van.



Mágnesfiú a mágneslány: amikor hátulról nézlek, vonzónak találak, szemből mégis taszítasz.

A hélium belép a kávézóba és sört kér.

Pultos: Sajnálom, nemesgázt nem szolgálunk ki.

A hélium nem reagál.

Csillagászat

Anyja a kis Kopernikusznak: – Mikor fogsz végre rájönni, hogy nem körülöttem forog a világ?

- Lőrinc, ha megígéred, hogy nem könnyezel, elmegyünk hullócsillagot nézni.

- Persze, Ida!

A professzorom szerint a fekete lyuk nagyon érdekes, szerintem szívás.

Vigyázz, a jobb oldali ábra közepén fekete lyuk van, ne kattints rá!

Sherlock Holmes és Watson kirándulnak. Éjjel kettőkor Sherlock felébreszti Watsonot és megkérdezi: Nézz körül, mit látsz?

Watson: Látom a fogyatkozó Holdat, a Göncöl-szekeket, ott a Sarkcsillag, a Vénusz és a Mars is. Látom a Tejútrendszer milliárdnyi csillagát, és tudom, hogy egy nagy fekete lyuk van a közepén. Milliányi bolygó kell, hogy legyen a csillagok körül, némelyiken még élet is.

Sherlock: Vedd észre, hogy ellopták a sátrunkat!

Vizsgakérdés: *Definiálja maximum 400 szóban a Világegyetemet és adjon rá három példát.*

Tudományterületek együttműködése

A matematikus szerint két pont meghatároz egy egyenest, de a fizikusnak több adatra van szüksége.

Éhesek a tudósok, konzerv van, nyitó nincs.

Mérnök: kővel óvatosan verjük szét!

Fizikus: tűz fölött magától szétduzzan, csak össze kell szedni.

Matematikus: tegyük fel, hogy nyitva van, és együnk!

Filozófus: igazából miért is kell kinyitni, miért nem jó csukva?

Most majd lassabban fogok az e-mailekre válaszolni.



Egy fazék forró vízre van szükség a főzéshez.

A mérnök vizet tölt a fazékba és alágyújt.

A fizikus fogja a tele fazekat és újból alágyújt.

A matematikus kiönti a fazékból a vizet, és azzal visszavezeti a feladatot az elsőre.

Füstre ébred a szállóban a mérnök. Észleli a tüzet és egy vödör vízzel eloltja.

A fizikus is felébred, látja a tüzet, megkeresi a tűzoltókészüléket, üzembe helyezi és eloltja a tüzet.

A matematikus is észreveszi a tüzet, megkeresi a tűzoltókészüléket, „Van megoldás!” állapítja meg, és visszafekszik aludni.

A matematikus, a fizikus és a biológus problémamegoldó képességét tesztelik, megoldást kell adniuk a következő problémára:

Egy üres liftbe beszálltak a földszinten 20-an, majd megállás nélkül felmentek a 10. emeletre, ahol viszont 21-en szálltak ki. Hogyan lehet ez?

Biológus: biztosan volt a beszállók között egy terhes anyuka, aki menet közben megszült.

Fizikus: ez csak mérési probléma lehet, pontatlanul számolták meg őket a be- vagy kiszállásnál, Poisson-eloszlást feltételezve 20 főnél már $\pm 4,5$ lehet a bizonytalanság.

Matematikus: definiáljuk úgy az üres liftet, hogy van benne egy ember!

Itt a pilóta beszél, ma otthonról dolgozom.



Egy matematikusnak, egy fizikusnak és egy mérnöknek meg kell határozniuk egy kis piros gumilabda térfogatát.

A matematikus megméri a labda átmérőjét és kiszámolja a térfogatot.

A fizikus megtölt vízzel egy mérőpoharat, beleszórtja a labdát, és a kiszorított víz mennyiségéből megkapja a térfogatot.

A mérnök megnézi a labda sorozatszámát, majd Google-keresés után a kis-piros-gumilabda-katalógusból kikeresi a pontos térfogatot.

Tudományos irodalom

Miért nem szentelnek a híradások több időt a tudományos kérdéseknek:

- Nem találnak az Ősrobbanást előkészítő anyagot.
- Túl meleg a magas hőmérsékletű szupravezetők.
- A Nagy hadronütköztetőben csak egy föld alatti alagutat látnak.
- A sötét anyag ragályos lehet.

Amit tudományos publikációkban írunk és amit jelent

Mint az köztudott. → Úgy rémlik, valahol olvastam erről.

Az adatok trendje nyilvánvaló. → Nem igazodom ki rajtuk.

A kérdésre nem sikerült határozott választ találnunk.

→ Teljesen sikertelen volt kísérlet, de muszáj publikálnunk.

Az eredményekből hármat vizsgálunk meg részletesebben. → A többi száz nem igazolja elméletünket.

Tipikus mérési eredmény. → Az egyetlen épkezláb eredményünk.

Látszik, hogy a jelenség mélyebb vizsgálata szükséges. → Fogalmam sincs róla, mi van.

Kutatócsoportunk további vizsgálatokat fog végezni. → Ők sem értik.

Eredményeink értelmezéséhez további, független vizsgálatok szükségesek. → Soha többé nem nyúlunk hozzájuk.

Munkámmal remélhetőleg utat mutattam a terület további kutatása felé. → Tegnap kiléptem.

Tapasztalatom szerint. → Előfordult már egyszer.

Néhány esetben. → Kétszer is.

Számtalan esetben. → Háromszor.

Ahogy bebizonyítottam. → Remélem.

Általánosan bizonyított tény. → Mások is remélik.

Egy bizonyos határértéken kívül található. → Sehol nincs.

Statisztikai analízis alapján. → Körülbelül annyi lehet.

Köszönöm Kovács Józsefnek a közreműködést, Kiss Annának pedig a konzultációkat. → Józsi végezte a mérést, és Anna magyarázta el nekem, mi is történt.

És mit ír a bíráló a publikációról? – Ebben sok igaz és sok új van, viszont ami igaz, az nem új, ami meg új, az nem igaz.

TANÁRTÓL TANÁRNAK

MAGYAR SZÍNPADON A TUDOMÁNY FESZTIVÁL

SZEGED, AGÓRA
2021. SZEPT. 17–18.

SCIENCE ON STAGE 2021
SZEGED

THE EUROPEAN NETWORK OF SCIENCE TEACHERS

Természettudományos fesztivált és kiállítást rendez az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, az Informatika-Számítástechnika Tanárok Egyesülete, a Bolyai János Matematikai Társulat, a Magyar Kémikusok Egyesülete és a Magyar Biológiai Tanárok Országos Egyesülete 2021. szeptember 17–18-án Szegeden, a Szent-Györgyi Albert Agórában.

További információk: <https://szinpadon-a-tudomany.hu>

Szervezők:

