

FORTUNA SZEKERÉN...

Nagy Péter – Pallasz Athéné Egyetem, GAMF Kar

Tasnádi Péter – Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

„...tudni: az ész rövid, az akarat gyenge,
 hogy rá vagyok bízva a vak véletlenre.
 És makacs reménnyel mégis, mégis hinni,
 hogy amit csinálók, az nem lehet semmi.”

(Teller Ede)

A véletlenszerűség jelenléte a természetben és hétköznapjainkban mindenki által megélt közvetlen tapasztalat, így a középiskolában és a felsőoktatásban is meg kell mutatnunk tanítványainknak azokat a gondolatmeneteket, amelyekben valószínűségi megfontolásokat alkalmazunk. A statisztikus fizika jellegzetesen az a terület, amely valószínűségi gondolkodást igényel és középiskolai tárgyalása is időszerűvé vált. Fogalmai és módszerei azonban mind matematikai apparátusukban, mind szemléletükben idegenek, nehezen érthetőek akár a középiskolás diákok, akár a BSc szintű fizikakurzusok hallgatói számára. Jelentős módszertani kihívás, hogy ezeket a fogalmakat érdekes hétköznapi jelenségekhez kapcsolva tárgyaljuk, hiszen a diákok motiválása ebben az esetben különösen fontos. Ezt újszerű, izgalmas jelenségek tárgyalásával és az érdeklődést felkeltő korszerű (multimédiás) eszközök felhasználásával érhetjük el. A számítógépek használata ezen a

területen lényegében megkerülhetetlen. Jelen cikkünkben néhány példa tömör bemutatásával illusztráljuk ezeket a módszereket, a bemutatott szimulációk letölthetők az [1] linkről. A részletezve bemutatott példák mellett néhány más alkalmazásra csak megfelelő linkek megadásával, kifejtés nélkül, pusztán az említés szintjén hivatkozunk. Ezzel – vállalva az esetlegesség kockázatát – az a célunk, hogy a cikk korlátozott keretei között is rámutassunk a valószínűségi gondolkodás széles lehetőségeire.

Valószínűségi gondolkodás

A szerencsejátékok és a rájuk épülő fogadások életszerűek és haszonelvűek, így kiválóan alkalmasak a véletlenszerű jelenségek, folyamatok bevezetésére. A fogadások tárgyalása nagyon hatékony lehetőség, hogy a diákokat ráhangoljuk a valószínűségi megfontolásokra. Az egyszerű dobókocka-dobási fogadások során a relatív gyakoriságon keresztül bevezethető a valószínűség, majd a várhatóérték fogalma. A valószínűség, valószínűség-eloszlás, várhatóérték fogalma és hasznosítása a fogadásokban kiválóan szemléltethető a közismert *Galton-deszka modell* kapcsán, amelyre számos nagyszerű számítógépes szimuláció áll rendelkezésre (például az [1] linkről letöltött csomagban a *galton* könyvtárban az *index.html* fájl megnyitása után a leírásban kipróbálható egy javascript alapú szimuláció).

Minden roppant egyszerűnek és a „józan paraszti ész” szerint is nyilvánvalónak tűnik, míg egyenletes eloszlású valószínűségi változóval van dolgunk. Ám a „józan paraszti ész” rögtön katasztrofális csődöt mond, ha az eloszlás nem egyenletes. Például tegyük fel a következő kérdést: hány fős társaságban fogadnál 1:1 arányban arra, hogy van két ember, akik azonos napon ünneplik a születésnapjukat? A diákok többsége abból kiindulva, hogy egy évben 365 nap van, 183 fős társaságot jelöl meg, néhányan az intuíciójuk sugallatára (és csapdát sejtve) ennél kisebb számot mondanak, de szinte senki nem megy 80 fő alá a becslésével. Igazi döbbenetet kelt, amikor az *1. táblázat* bemutatásra kerül: a táblázat második és negyedik oszlopában azon p_n érték áll, hogy az adott n fős társaságban mekkora annak valószínűsége, hogy van két azonos születésnapú ember. Kiderül, hogy 23 fős társaságban már nagyobb a nyerés esélye, mint a vesztesé, 40 fős társaságban a fogadás már távolról sem úriemberhez méltó, hiszen

A cikk az Eötvös Loránd Fizikai Társulat szegedi Vándorgyűlésén, 2016. augusztus 25-én, *A fizikaoktatás kutatásának hazai és nemzetközi irányai II.* szekcióban elhangzott előadás alapján készült.



Nagy Péter 1985-ben fizikus diplomát, 2014-ben PhD fokozatot szerzett az ELTE-n. 1985 óta tanít Kecskeméten, főiskolai docens. Fő érdeklődési területe a modern fizika újabb eredményeinek beépítése a BSc szintű oktatásba, nemlineáris, illetve komplex rendszerek számítógépes szimulációja, valamint elektronikus oktatási anyagok készítése. Kiemelten fontosnak véli a fizika tanítását és népszerűsítését, ezért örömmel vállal tevékeny szerepet az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskolájában.



Tasnádi Péter CSc az ELTE TTK nyugalmazott professzora. 1966-tól nyugdíjba vonulásáig dolgozott a TTK-n, amelynek 1997–2007-ig oktatási dékánhelyettese, 2007–2012-ig a TTK Természettudományos Oktatásmódszertani Centrumának elnöke volt. Oktatási és kutatási területe a fizikatanítás módszertana, az anyagfizika és a dinamikus meteorológia. Társzerzőkkel több mint 20 egyetemi és középiskolai tankönyvet és ismeretterjesztő művet írt. Magyar és idegen nyelvű szakcikkeinek száma több mint 150.

1. táblázat

Az azonos napon születettek előfordulási valószínűsége a csoport létszámának függvényében			
n	p_n valószínűség	n	p_n valószínűség
10	0,1169	40	0,8912
20	0,4114	50	0,9704
22	0,4757	60	0,9912
23	0,5073	70	0,9992
30	0,7063	80	0,9999

csaknem 90% a nyeresé esélye, a továbbiakról már nem is beszélve... A valószínűséget megadó képlet (a komplementer kimenetel valószínűségét kivonva egyből):

$$p_n = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))}{365^n}$$

Hasonló megrázó erejű példa az úgynevezett *Monty Hall játék*. Kvízműsorok végén az izgalmas fokozására a nyertest még egy utolsó próbatételnek teszik ki: tippelnie kell, hogy három ajtó közül melyik mögött van a nyereménye az alább látható forgatókönyv szerint:

1. A díjat D ajtó mögé helyezik, a műsorvezető tudja, hogy ez melyik a háromból.
2. A játékos a J ajtóra mutat, de nem azt nyitják ki.
3. A műsorvezető kinyitja az M ajtót, ami mögött nincs díj és a játékos sem választotta (M nem azonos D -vel és J -vel).
4. A játékos dönthet, hogy a megmaradt két ajtóból melyiket választja. Ez a kinyitandó K ajtó lehet az eredeti J vagy a másik.
5. Kinyitják a K ajtót, ha ez azonos a díjat tartalmazó D ajtóval, akkor a játékos nyert.

Alapvetően két stratégia létezik a játékos számára: vagy marad az elsőnek választott ajtónál (nevezzük ezt AZONOS stratégiának), vagy a másik még csukott ajtót választja (nevezzük ezt KOMPLEMENTER stratégiának). Szinte minden diák szerint a két csukott ajtó mögött 50-50% valószínűséggel van a nyeremény, tehát mindegy melyik stratégiát választjuk. Igen hatásos, ha a valóságban, vagy a számítógép segítségével (például az [1] linkről letöltött csomagban a *montyball* könyvtárban az *index.htm* fájl megnyitásával) szimulálva elkezdjük játszani a szituációt. Általános megdöbbenésre kiderül, hogy a KOMPLEMENTER stratégiával kétszer akkora a nyeresé esélye, mint az AZONOS stratégiával! Még ezután sem könnyű ezt a tényt a diákok számára matematikailag emészthetővé tenni (talán a legfrappánsabb magyarázat: ha a játékos eredetileg nem-nyerő ajtót választott, akkor biztosan megmutatják neki a másik nem-nyerő ajtót, így a váltással biztosítja, hogy nyerjen és mivel eredetileg 2/3 esélye van nem-nyerő ajtót választani, a váltással 2/3 eséllyel nyer).

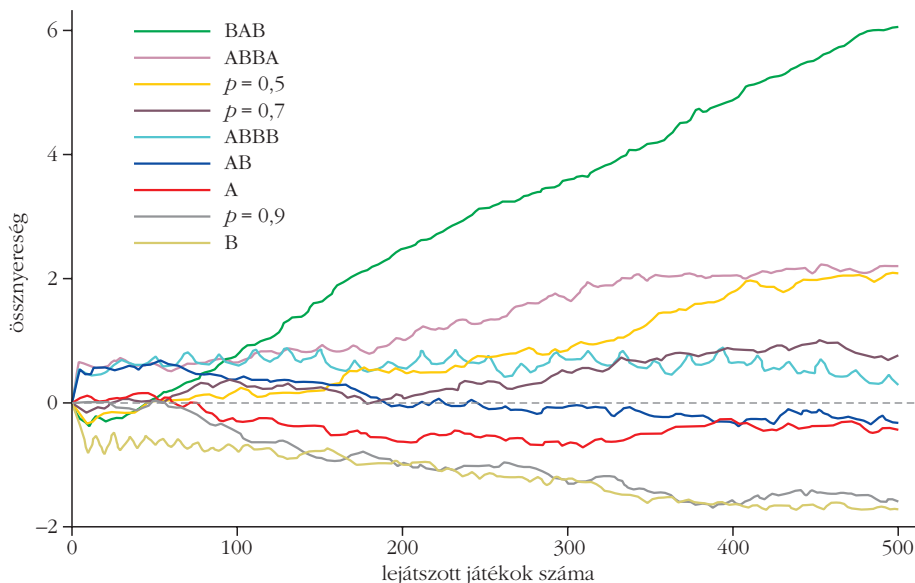
Parrondo-paradoxon

A jelen szakaszban tárgyalt példák részletes kidolgozása megtalálható a *Fizikai Szemlében* közölt korábbi cikkünkben [2], illetve a cikk színesebb, részletes matematikai számításokat tartalmazó elektronikus változatában, amely tematikus oldalunkról [3] letölthető, ahol az anyagot sok képpel, videóval, szimulációval és futtatható alkalmazással illusztráljuk.

Hétköznapjaink során, folyóiratokban, televízióban és rádióadásokban egyre gyakrabban találkozunk kockázatbecslésekkel, döntéshozatalt megkönnyítő valószínűségi megfontolásokkal, következtetésekkel. A természettudományos törvények egy része is valószínűségi megfogalmazásban jelenik meg és a mindennapok döntéshozatalaiban valóban fontos szerepet játszanak a valószínűségi megfontolások. E gondolatmenetek egyik legkézzelfoghatóbb és legtisztább megjelenése a játékelméletben található, ezért tárgyalásunkat játékelméleti bevezetéssel indítjuk.

A legtöbb játék sok lépésből áll, s a játékosoknak lépésenként kell újabb és újabb döntéseket hozni. Ha a játékos döntéseit valamilyen egyértelmű szabály alapján hozza meg, tehát ebből a szabályból adott helyzetben mindig ugyanaz a lépés következik, akkor a játékelmélet szerint *tiszta stratégiát* játszik. A nem tiszta stratégiák alkalmazásakor a döntéshozatal nem egyértelmű. *Nem tiszta stratégiát* választ például az a futballjátékos, aki ugyanabban a szituációban éppen akkori hangulata, megérzése szerint passzolja tovább a labdát. *Kevert stratégiás* játékmód esetében a játékos a játék folytatásának különböző lehetőségei között előre meghatározott valószínűséggel választ, azaz az általa meghatározott valószínűségek szerint véletlenszerűen hozza meg a döntését.

A tudomány számtalan konkrét szituációban – a fizikától kezdve a biológiáig, a közgazdaságtól a szociológiáig – megmutatta, hogy adott helyzetben mindig valamilyen véletlenszerű kevert stratégia az optimális. Például az állatok táplálékkeresési mozgására irányuló megfigyelések azt mutatják, hogy egyes állatfajok (például ragadozó halak, albatroszok, majmok) nem egyszerű (Brown-típusú) bolyongással, hanem az úgynevezett Lévy-eloszlást követve mozognak: ebben az eloszlásban a rövid távú véletlenszerű bolyongást ritkán előforduló hosszabb lépések bontják meg. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a táplálékkeresők véletlenszerű kevert stratégiát alkalmaznak, a lokális, rövid távon végzett bolyongást (kicsiny terület átfésülését) véletlenszerűen váltogatják a nagyobb léptékű, határozottabb irányultságú mozgással (területváltás). A mikrorendszereket leíró kvantumállapot a rendszer makroszkopikusan (klasszikus fizikai szituációkban) mérhető tulajdonságaihoz rendelhető állapotainak lineáris kombinációja, komplex amplitúdókkal súlyozott kevert állapot (izgalmas és lényegi eltérés az, hogy itt a kimeneteli valószínűségeket ezen amplitúdók négyzetei adják). Egyértelműen kijelenthető, hogy a kevert stratégiák a tudományban és a mindennapi életben egyaránt kiemelt jelentőséggel bírnak.



1. ábra. A <http://www.cut-the-knot.org/ctk/Parrondo.shtml> oldal szimulációját használva.

A kevert stratégiákra vonatkozóan *Juan Parrondo*, a madridi egyetem fizikusa igen különös és döbbenetes felfedezést tett, ami erősen foglalkoztatja a legkülönbözőbb tudományterületek (például fizika, biológia, közgazdaságtan és szociológia) képviselőit. Azt a ma már *Parrondo-paradoxon* néven ismertté vált – e helyen játékelméleti megfogalmazásban interpretált – állítást bizonyította, hogy *két, stabilan veszteséges stratégiát keverten játszva – akár véletlenszerű kevert stratégiával, akár megfelelő fix minta szerint keverve – az eredmény folyamatos, nagy nyereség lehet!*

Tekintsünk példaként két (**A** és **B**) szerencsejátékot, amelyekben minden egyes játékmenet során legyen a tét egységnyi. A játékok részletes leírása a fentebb megadott hivatkozásokon megtalálható, e helyen elegendő annyit rögzítenünk, hogy mindkét játék nyeresége negatív várható értékű, azaz veszteséges a játékos szemszögéből. Parrondo megmutatta, hogy *ha ezt a két játékot keverten játszunk, akár véletlenszerűen döntve el, hogy éppen melyik játékot játszunk, akár megfelelő fix séma szerint felváltva játszva a két játékot, akkor hosszú távon stabilan nyereségre tehetünk szert!* A várakozással ellentétben tehát a kevert játék nem marad veszteséges, hanem alapvető változás áll be: a két veszteséges játék (véletlenszerű, vagy adott séma szerinti) váltogatásával nyereséges játék alakulhat ki!

Az Olvasó figyelmébe, kipróbálásra ajánljuk az [1] linkről letöltött csomagban a *parrondo* könyvtárban található három alkönyvtárban levő szimulációkat. Jól látható, hogy mind az **A**, mind a **B** játék negatív várható értékű (a pontos számítás szerint az **A** játék nyereségének várható értéke játékonként $-0,01$, míg a **B** játéké $-0,0087$). Ezzel szemben, ha a két játékot determinisztikus vagy véletlenszerű kevert stratégiával játszunk, akkor bizonyos stratégiák esetén a nyereség várható értéke pozitív lesz! Adott minta szerinti kevert játék jelentése a következő: például a **BAB** minta szerinti játékmene-

netek során újra és újra egy **B**, majd egy **A**, végül újra egy **B** játékot játszunk. Például a **BAB** minta szerinti kevert stratégiával a nyereség várható értéke $0,0574$, vagy az **ABBA** mintáé $0,0147$, viszont például az **AB** mintáé $-0,0067$. Véletlenszerű kevert stratégiák során mindig valamilyen adott p valószínűséggel játszunk **A** játékot és $1-p$ valószínűséggel **B** játékot. Például $p = 0,5$ vagy $p = 0,7$ valószínűség esetén a nyereség várható értéke $0,0156$, illetve $0,0084$ lesz, viszont például $p = 0,9$ valószínűséggel játszva $-0,0034$ (a számítások szerint $0,0703 < p < 0,8471$ esetén nyereséges a stratégia).

Az 1. ábrán számítógépes szimulációt használva ábrázoltuk az **A**, illetve **B** játékok, valamint különböző kevert stratégiák során az össznyereség alakulását a lejátszott játékok számának függvényében.

A Parrondo-paradoxon természetesen nem csak a játékelméletben jelenik meg, átfogalmazható például mechanikai mozgásokra vonatkozó állítássá is, egy konkrét példa tekinthető meg a [4] hivatkozásokon található videón. A modellben mind a sárga színű **A**, mind a zöld színű **B** mozgólépcső lefelé halad. Az **A** lépcső egyenletesen lefelé, a **B** lépcső pedig alternáló mozgással: rövid ideig felfelé, majd ugyanannyi ideig kétszer akkora sebességgel lefelé mozog, így tehát végül **B** átlagsebessége is lefelé mutat, még hozzá azonos értékű **A** sebességével. A két mozgólépcsőt külön-külön üzemeltetve tapasztalhatjuk, hogy a fekete golyóval reprezentált utas bármelyik lépcsőn lefelé mozog. Ha azonban egyszerre működtetjük a két mozgólépcsőt, és mozgásukat megfelelően szinkronizáljuk (az alternáló lépcső n -edik foka a másik lépcső n -edik és $(n-1)$ -edik foka között „rezeg”), akkor azt láthatjuk, hogy a két, egyenként lefelé haladó mozgólépcsőn az utas megfelelő pillanatban átlépve az egyik lépcsőről a másikra, felfelé haladhat. Az úgynevezett *molekuláris (Brownian ratchet) motorok* modelljei értelmezhetők a Parrondo-paradoxon interpretációjaként [5]. Két, külön-külön például balra mutató eredő erőhatású potenciált kapcsolgatva a potenciáltérben mozgó mikrorészecskék statisztikus átlagban jobbra haladhatnak (a fentebbi mozgólépcsős modellel való szoros analógia igen nyilvánvaló). A témáról magyar nyelven a *Fizikai Szemlében* megjelent [6] cikket ajánljuk olvasásra.

Nyilván sokakban vetődik fel a kérdés, hogy miként lehetne ezt az izgalmas felfedezést a hétköznapi életben, például a szerencsejátékokban, vagy mondjuk a tőzsdén kamatoztatni. A szerencsejátékok vonatkozásában érdekes és részletes elemzés található a [7] oldalon a pókerben való alkalmazásra. Bár a gazdasá-

Ising-típusú modellek

modell	ágensek, <i>elemi állapotok</i>	lokális kölcsönhatás, J	globális hatás, H	fluktuációk, T
mágnes	elemi mágneses dipólusok, <i>felfelé-lefelé</i>	rövid távú mágneses vonzó- és taszító erők	külső mágneses tér	hőmérsékleti fluktuáció
agy	neuronok, <i>aktív-passzív</i>	szinaptikus erősítések és gátlások	külső inger	küszöbpotenciál-ingadozás, elektrokémiai zaj...
választás	választópolgárok, <i>republikánus-demokrata</i>	beszélgetések, munkakapcsolatok, szex...	média, áremelés, természeti katasztrófák	hangulatváltozások, magánéleti történések

gi tudományokba csak lassan hatol be ez az új eredmény, de azt már kimutatták, hogy bizonyos esetekben két külön-külön hosszútávon veszteséges részvényportfólió közötti véletlenszerű tőkeátcsoportosítások révén az alaptőke növekedhet! Két kapcsolódó érdekes olvasnivaló található a [8], illetve [9] címeiken. A [3] honlapunkon a témához kapcsolódó linkgyűjtemény is segíti a további tájékozódást.

Komplex rendszerek

A fizikában nagy jelentőségűek az olyan modellek, amelyekben az alkotóelemek nagy száma és a közöttük lévő kölcsönhatás révén a rendszer globális viselkedése az egyes elemekétől lényegesen eltérő sajátosságokat mutat. Másképpen fogalmazva: a kooperatív viselkedés következtében az egész nem egyszerűen a részeinek összege. Az ebből kialakuló komplex rendszerek fogalma napjainkra interdiszciplinárisá vált és a tudomány számos területén megjelenik olyan kölcsönható rendszerekben, ahol az egyes egyedek valamilyen optimális állapot elérésére törekednek. Ilyen típusú viselkedés megfigyelhető a gazdaságban, a szociológiában, a biológiában vagy fizikai rendszerekben is, ahol a kölcsönható elemek (ágensek) nagyon eltérőek, de hasonló korrelatív viselkedésük a háttérben univerzális törvényeket sejtet. Ezen rendszerekben a komplexitás az egyszerre jelenlévő különböző tényezők eredő hatásaként jelenik meg, úgymint az egyedek (fizikai) kölcsönhatása, vagy dinamikai viselkedését leíró törvényszerűségek (például sejtautomata-szabályok), vagy valamilyen külső tényező befolyása, esetleg a rendszer speciális geometriai struktúrájából eredő kényszerek.

A komplex rendszerek igen széles osztálya írható le az alábbi tulajdonságú modellekkel:

- azonos típusú, véges sok lehetséges állapottal rendelkező ágenszt (elemet) tartalmaznak,
- az ágensek száma igen nagy (termodinamikai határesetben végtelen),
- az ágensek meghatározott topológiában (többnyire valamilyen rácsstruktúrában) helyezkednek el,
- az ágensek között *lokális* (rövid távú „szomszéd-szomszéd”) *kölcsönhatások* vannak,
- létezhetnek a rendszer egészét (azaz minden ágenszt) érő *globális* (külső) *hatások*,

- az ágensek szintjén *véletlenszerű állapotváltozások* (fluktuációk) történnek.

A fenti sajátosságokkal bíró *Potts-típusú modellek* számos különböző tudományterületen használatosak, mint például fizika (mágnesek, gázok, rugalmas testek stb.), kémia (oldatok, autokatalitikus reakciók stb.), biológia (populációdinamika, agy stb.) és humán tudományok (szociológia, makrogazdasági folyamatok stb.). A kétállapotú Potts-moddell az *Ising-moddell*, amelyben a rendszer ágensei csak két lehetséges elemi állapottal rendelkeznek. Az érdeklődés felkeltése céljából csupán két kapcsolódó olvasnivaló: [10] cikkben az Ising-moddell szociológiai interpretációját, míg a [11] tanulmányban a Potts-moddell keresztretjvények megoldására való alkalmazását találhatjuk.

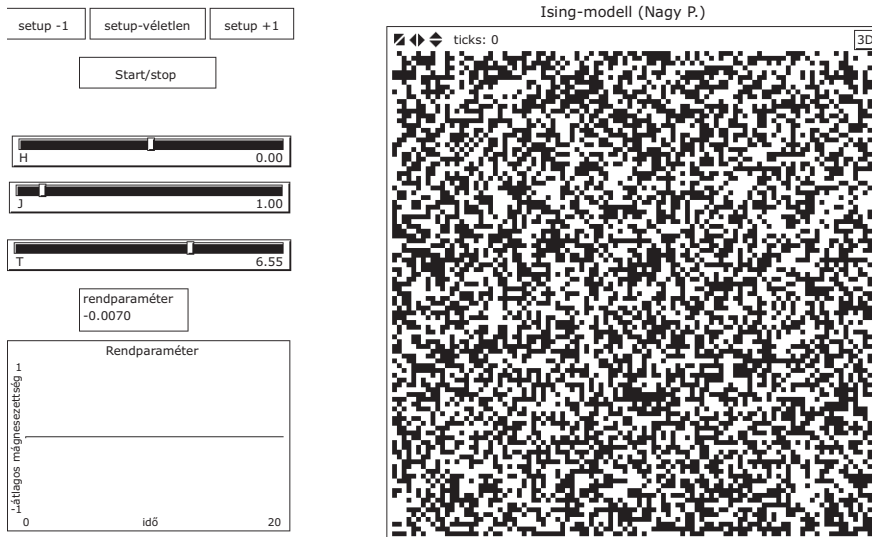
A 2. táblázat néhány példát mutat az Ising-moddellel leírható rendszerekre.

Jelölje az i indexű ágens elemi állapotát $s_i = \pm 1$ és vegyük figyelembe, hogy a szomszédos elemek közötti kölcsönhatás az elemi állapotok szorzatával arányos potenciálisenergia-csökkenést eredményez. Egy ágens E potenciális energiáját (Hamilton-függvényét) könnyen felépíthetjük úgy, hogy az *energiaminimum elvét* követve az egymást erősítő („vonzó”) lokális szomszéd-szomszéd állapotkapcsolatok csökkentésük, az egymást gyengítő („taszító”) állapotkapcsolatok pedig növeljék az energia értékét, illetve az E energiát növelő („taszító”) és azt csökkentő („vonzó”) külső tereket vesszünk figyelembe, például:

$$E(s_i) = -J \sum_j^{\text{„szomszéd”}} s_j s_i - H s_i = -s_i \left(J \sum_j^{\text{„szomszéd”}} s_j + H \right), \quad (1)$$

ahol az összegzés az ágenssel lokális kölcsönhatásban levő „szomszédos” ágenseken fut végig, a paraméterek jelentését lásd a 2. táblázatban és k egy specifikus állandó (fizikai rendszerekben a *Boltzmann-állandó*).

A modell viselkedését számítógépes szimulációval tanulmányozhatjuk a *Monte-Carlo módszerek* közé tartozó *Metropolis-algoritmus* segítségével [12]. Az algoritmus úgy szimulálja a rendszer időfejlődését, hogy egy-egy elemi szimulációs lépésben valamely véletlenszerűen kiválasztott ágens aktuális állapotát



2. ábra. Az Ising-modell NetLogo szimulációjának képernyőmásolata (részlet).

$$w(s_i \rightarrow -s_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \Delta E \leq 0 \\ \exp(-\Delta E/kT), & \text{ha } \Delta E > 0 \end{cases}$$

átmeneti valószínűséggel megváltoztatja, amely kifejezésben a felső eset annak felel meg, hogy az energiaminimum elve szerint az állapotváltozás biztosan engedélyezett, ha az energiaváltozás negatív (hiszen csökkenti az energiát); míg az alsó eset szerint a pozitív energiaváltozással járó állapotváltozás is megvalósulhat a statisztikus fizikából ismert $\exp(-\Delta E/kT)$ Boltzmann-faktorral meghatározott valószínűséggel a (hőmozgásból eredő) fluktuációk által.

Egy Monte-Carlo lépésnek nevezzük, ha átlagosan minden ágens egyszer részt vett elemi szimulációs lépésben. A fenti algoritmus olyan ergodikus Markov-folyamatot generál, amely az egyensúlyi eloszláshoz konvergál, azaz megfelelően nagyszámú Monte-Carlo lépés után a rendszer a termodinamikai egyensúlyának megfelelő állapotba kerül.

A rendszer fentebb leírt szimulációs algoritmusát NetLogo programozási környezetben valósítottuk meg. Az ágens alapú komplex rendszerek szimulációjára kifejlesztett ingyenes programozási környezet telepítő fájlja letölthető a [13] honlapról. Telepítés után az [1] linkről letöltött csomagban az *ising* könyvtárban található *Ising_np.nlogo* fájl indításával futtathatjuk a szimulációt.

A modell vizuális megjelenítése a következő:

- az N darab ágens egy négyzetháló cellái,
- a lokális kölcsönhatásban levő „szomszéd” ágens az élszomszéd cellák,
- a +1 állapotú ágenset (cellákat) piros, a -1 állapotúakat zöld színnel jelöljük.

A rendszer globális (makroszkopikus) állapotának jellemzésére bevezetjük az

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \frac{N_+ \cdot (+1) + N_- \cdot (-1)}{N}$$

rendparamétert, ahol N_+ , valamint N_- a +1, illetve -1 állapotú ágensek számát jelenti (a rendparaméter értéke +1, illetve -1 a homogén, teljesen rendezett állapotokban és 0 a rendezetlen állapotban).

Alapértelmezésben egy 100×100 méretű négyzethálónk van, tehát az ágensek száma $N = 10^4$. A 2. ábrán egy a „setup-véletlen” gomb megnyomása után generált inhomogén, rendezetlen ($m \approx 0$) kezdeti konfigurációt láthatunk. A szimuláció roppant felhasználóbarát kezelőfelülettel rendelkezik:

- a modell (négyzetháló) méretét a felső – az ábrán nem látható – menüsorban levő „Settings...” gombra kattintás után megjelenő ablakban állíthatjuk be,

kezdeti konfigurációkat a „setup” gombok valamelyikére kattintással generálhatunk,

- a modell fentebb definiált három (H , J és T) paraméterének értékét a megfelelő csúszkák segítségével állíthatjuk,
- a szimulációt a „Start/Stop” gombbal indíthatjuk, illetve állíthatjuk le,
- a szimuláció sebességét (speed) a felső – az ábrán nem látható – menüsorban levő csúszkával állíthatjuk (húzzuk jobb felé a csúszkát, de ne ütközésig).

A szimuláció futtatása során a megjelenítési mezőben mintegy „filmszerűen” vizuálisan követhetjük a rendszer állapotának időbeli alakulását, valamint a bal alsó részen a rendparaméter pillanatnyi numerikus értékét és időbeli (szimulációs lépések szerinti) grafikonját is.

A szimuláció segítségével igen izgalmas és fontos jelenségeket tanulmányozhatunk. A továbbiakban a J paraméter értéke legyen mindig 1.

Fázisátalakulás

(a) Állítsuk a H paraméter értékét 0-ra (tehát nincs „külső tér”), majd először futtassuk a szimulációt magas T értéknél ($6 < T$). Ekkor a rendszer mindvégig a kezdeti rendezetlen, diffúz ($m \approx 0$) állapotban marad, lásd a 3.a képet.

(b) Ezután csökkentsük a T paraméter értékét, legyen $T \approx 2,3$ és futtassuk újra a szimulációt. Ekkor a rendszer állapotának jellege megváltozik: fokozatosan (az ágens méretéhez képest lényegesen) nagyobb kiterjedésű homogén területek, domének jönnek létre, amelyek folyamatosan változnak, de viszonylag hosszú ideig fent is maradnak, lásd a 3.b képet.

(c) Még tovább, 1 alá csökkentve a T paraméter értékét, azt tapasztaljuk, hogy a domének mérete drasztikusan növekszik. A rendezett állapot fő ismérvének tekintjük, hogy a rendszer méretével összemérhető nagy-

ságú egybefüggő domének jönnek létre, lásd a 3.c képet.

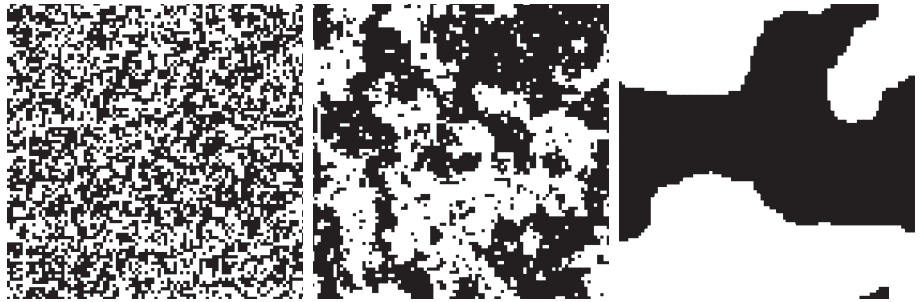
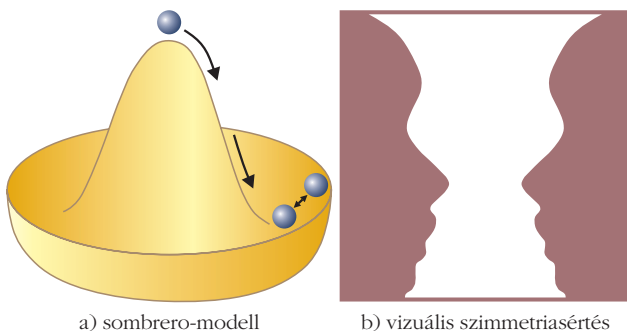
A T paraméter tehát *kontrollparaméter* szerepét tölti be: magas T értéknél a rendszer rendezetlen állapotban (fázisban) van, míg alacsony T értéknél rendezett állapotban (fázisban) találjuk. A T kontrollparaméter változtatásával tehát *fázisátalakulás* történik, az átalakuláshoz tartozó T_c *kritikus érték* (ahogy azt némi kísérletezés árán megállapítható) valahol 2 és 2,5 között van, a pontos elméleti érték:

$$T_c = 2 \frac{J}{\ln(1 + \sqrt{2})} = 2,27.$$

Spontán szimmetriasértés

Alacsony T értékekkel sokszor futtatva a szimulációt azt tapasztaljuk, hogy néha elkülönült, érdekes geometriai mintázatú frakciók jönnek létre ($m \approx 0$), sokszor azonban hosszú futási idő után teljesen rendezett állapotok alakulnak ki, azaz a rendszer „bezuhan” az egyik $m = +1$, vagy $m = -1$ homogén állapotba. Vegyük észre, hogy a rendszer dinamikáját meghatározó (1) képlettel adott Hamilton-függvény $H = 0$ esetben invariáns arra, ha az összes ágens állapotát ellentétesre változtatjuk, azaz szimmetrikus az $s_i \rightarrow -s_i$ ($\forall i$) cserére, de a kialakuló homogén stabil állapotok már nem rendelkeznek ezzel a szimmetriával. Ezt a viselkedést *spontán szimmetriasértésnek* nevezzük. A jelenséget jól szemlélteti a 4.a ábrán látható „sombro-modell”: a kalap alakja forgásszimmetrikus, viszont a tetejére helyezett (instabil helyzetű) golyó csak a perem körüli völgyben találhat stabil egyensúlyi állapotot, és hogy adott kísérletben éppen hol, az véletlenszerű – pontosabban fogalmazva extrém érzékenységet mutat a kezdeti feltételre –, de az egyensúlyi állapot már semmiképpen sem mutat forgásszimmetriát. Ez a fizika egyik legfontosabb és legizgalmasabb jelensége (olvasásra ajánljuk például a [14] oldalt), ezen alapszik többek között a *Higgs-mechanizmus*, amely a részecskefizika standard modellje szerint az

4. ábra. A spontán szimmetriasértés jelensége.



3. ábra. A fázisátalakulás jelensége.

elemi részecskék tömegét magyarázza és melléktermékként létrehozza a napjainkban elhíresült Higgs-bozont, amely után a CERN új LHC gyorsítójában folyt intenzív kutatás (2013. évi fizikai Nobel-díj).

Könnyű megmutatni, hogy agyunk (érzékelésünk, gondolkodásunk) is produkálja a szimmetriasértés jelenségét. A 4.b ábrát nézve két különböző alakzatot ismerhetünk fel, vagy egy fehér vázát, vagy két szembenéző fekete arcot, adott pillanatban mintegy véletlenszerűen választva a két lehetőségből. A [15] oldalon látható animáción forgó macska sziluettjét nézhetjük, amelyet véletlenszerűen láthatunk forogni az óramutató járása szerint, vagy ellentétesen is. (Kérjük az Olvasót próbálkozzék a forgásirány tudatos megválasztásával, illetve megváltoztatásával. Nem mindenkinek sikerül!)

Hiszterézis

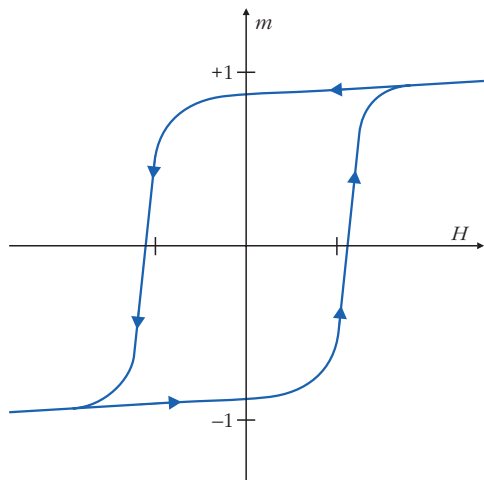
A J paraméter értéke továbbra is maradjon 1, de most T értékét is rögzítsük, legyen $T = 1$, viszont kapcsoljunk be „külső teret”, tehát a továbbiakban $H \neq 0$. Végezzük el az alábbi két szimulációsorozatot, anélkül, hogy újraindítanánk a futtatást (tehát futás közben változtassuk H értékét)! Minden új H érték mellett legalább fél percig várjunk, majd mielőtt megváltoztatnánk H -t jegyezzük fel az aktuális H értékhez kialakult egyensúlyi m rendparaméter értéket! Az általunk „mért” sorozat:

- (a) $H = 1; H = 0,8; H = 0,6; H = 0,4; H = 0,2; H = 0; H = -0,2; H = -0,4; H = -0,6; H = -0,8; H = -1;$
 (b) $H = -1; H = -0,8; H = -0,6; H = -0,4; H = -0,2; H = 0; H = 0,2; H = 0,4; H = 0,6; H = 0,8; H = 1.$

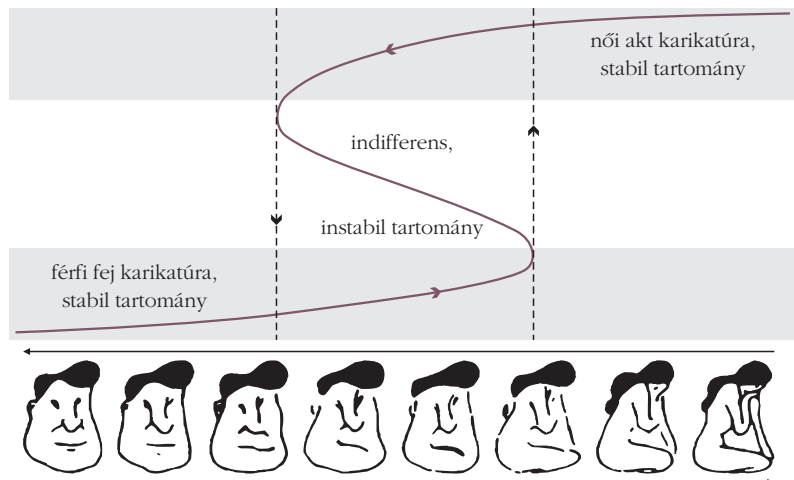
Ábrázoljuk grafikonon az összetartozó H - m értékpárokat!

A kapott grafikon az 5.a ábrán látható jellegű lesz, amely roppant fontos jelenséget reprezentál: a *hiszterézis* jelenségét. Külső tér jelenléte esetén a fázisátalakulás típusa megváltozik: a korábbi másodrendű fázisátalakulás helyett elsőrendű fázisátalakulás jelenik meg, amely legmarkánsabb megnyilvánulása a *hiszterézis*. A *hiszterézis alapvető vonása minden memóriával rendelkező rendszernek*.

Természetesen agyunk (illetve gondolkodásunk) is (mint tipikus emlékezettel bíró komplex rendszer) produkálja a hiszterézis jelenségét. Az 5.b ábrán nyolc kis rajzot láthatunk. Ha a rajzokat nem egyszerre, hanem sorban egymás után jelenítjük meg, akkor – attól függően, hogy jobbról-balra, vagy pedig balról-



a) hiszterézisgörbe



b) vizuális (kognitív) hiszterézis

5. ábra. A hiszterézis jelensége.

jobbra jelenítjük meg őket – a középen levő rajzokon más figurát érzékelünk (jobbról-balra sorrendben női akt figurát, balról-jobbra sorrendben pedig férfi fej karikatúrát látunk). Az 5.b ábra értelmezése rávilágít arra, hogy agyunk vizuális információfeldolgozása (a fentiekkel analógiában) tipikus hiszterézis-jellegű viselkedést mutat. A hiszterézis jelensége azonban a gondolkodás manipulációjának is alapja. A [16] videón remek, mulatságos példát láthatunk arra, hogy megfelelő kérdéssorral gondolkodásunk miként vezérelhető a megfelelő irányba, ugyanarra az eldöntendő kérdésre ellentétes választ kaphatunk, ha más irányú kérdéssorozatokkal jutunk el hozzá.

Irodalom

1. <http://csodafizika.hu/szimulaciok.zip>
2. Nagy P., Tasnádi P.: Parrondo paradoxon – avagy a kevert stratégiák csodája. *Fizikai Szemle* 63/2 (2013) 37–42., http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz1302/NagyP_TasnadiP.pdf

3. <http://csodafizika.hu/parrondo/>
4. http://csodafizika.hu/parrondo/store/parrondo_lepcso.avi
5. <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/9810326.pdf>
6. Czirikó A., Csahók Z., Derényi I., Vicsek T.: Biológiai mozgások statisztikus fizikai modelljei. *Fizikai Szemle* 46/6 (1996) 189.
7. <http://parrondoparadox.blogspot.co.uk/>
8. <http://www.sais.se/mthprize/2002/almberg2002.pdf>
9. http://www.cmth.bnl.gov/~maslov/optimal_investment_ijtaf.pdf
10. Jávor M., Geszti T.: Kollektív döntéseket hozni – hogyan látja ezt a szociofizika. *Fizikai Szemle* 66/2 (2016) 59–64., http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz1602/JavorM_GesztiT.pdf
11. K. Jimbo, H. Takamura, M. Okumura: Solving Crossword Puzzles Using Extended Potts Model. In H. Hattori et al. (eds.): *New Frontiers in Artificial Intelligence*. JSAI 2008 Conference, LNAI 5447, 39–47, 2009. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-00609-8_5#page-1
12. <http://cserti.web.elte.hu/okt/MonteCarlo-cikk.pdf>
13. <https://ccl.northwestern.edu/netlogo/>
14. <http://www.lassp.cornell.edu/sethna/OrderParameters/>
15. <http://jaced.com/2010/10/01/spinning-cat-illusion/>
16. http://indavideo.hu/video/Tudat_manipulacio