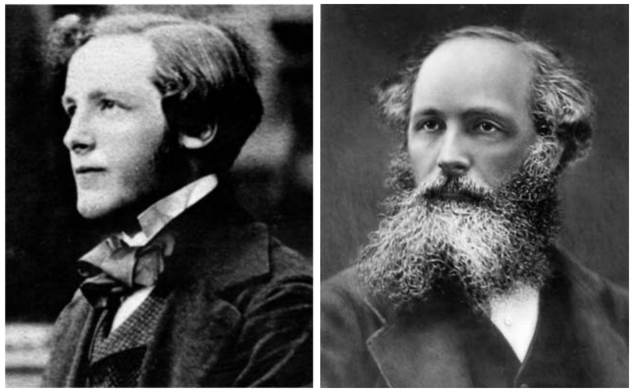
MEGLEPETÉSEK A MAXWELL-EGYENLETEK TÉMAKÖRÉBEN

Abonyi Iván
Eötvös Egyetem

E dolgozat eredete egy előadás az ELTE Doktori Iskoláján 2014 decemberében. Az Iskola irányítója, Tél Tamás *professzor felkért, hogy a beteg* Nagy Károly *akadémikust, előadássorozata megszakítását elkerülendő, helyettesítsem. Örömmel készültem a segítségre, de előbb telefonon beszéltem Nagy Károllyal, hogy miről is legyen szó az előadáson. Vele egyeztem meg erről a témáról. Most, hogy elhunyt, legyen szabad Neki ajánlanom ezt az írást. Az Ő emlékének, aki 1952, másodéves egyetemi hallgató korom – az elméleti mechanika vizsgám – óta kitüntetett bizalmával, barátságával. Azt gondolom, Őt is érdekelné ez a téma, hiszen elfogadta elgondolásomat.*

Emlékét megőrizzük. Nyugodjék békében!



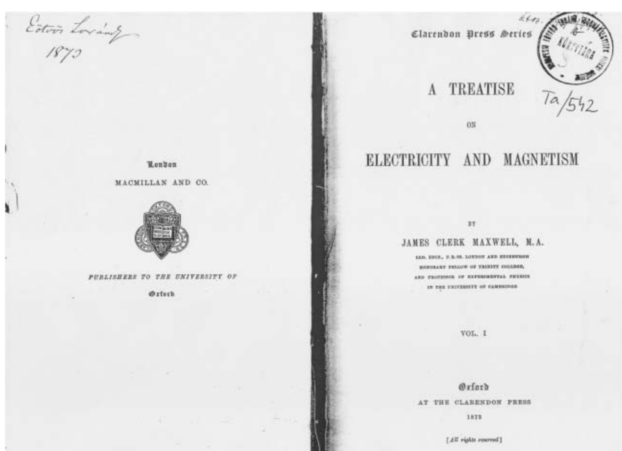
1. ábra. James Clerk Maxwell, az ígéretes zseni ifjú korában és az érett korú kutató.

Útban az elektrodinamika szintézise felé – történelmi visszapillantás

A fizika története arról tanúskodik, hogy bizony hosszú út vezetett az elektrodinamika átfogó szintézisének megalkotásáig, a Maxwell-elmélet felismeréséig. Az is megállapítható, hogy a Maxwell-egyenletek elfogadásában két fronton is folyt a harc. Egyfelől a közvetlen sikerek útján, amelyek a dinamikus folyamatok felismerésével jutottak egyre inkább előre. Ide tartozik az áramok mágneses terének felismerése (*Ampère*), a mágneses indukció jelentős kapcsolatteremtő leleplezése (*Faraday*), a dinamóhatás feltárása (*Jedlik, Siemens*) és ezáltal a mozgás és az indukció jelentős kapcsolatának kiderítése, a transzformátor-elv felfedezése, de elmehetünk az elektromágneses sugárzás felismeréséig is. Az említett jelenségkörök – tehát nem csak az „áramköri" viszonyokban, hanem a sugárzási vonatkozásokban is – sorsdöntő és bizalomkeltő tulajdonsága volt, hogy az elektrodinamikát valami „istenadta" új világ ipari megváltójaként azonnal a gyakorlati életben alkalmazni lehetett. Sorba gyúltak a villanylámpák a világ utcáin, épültek a távbeszélő központok, indultak a villamosok (Budapesten a „földalatti"), épültek a villamoserőművek, az elektromos energiát szállító távvezetékek. – Másfelől azonban az elvi háttér közel sem volt világos, eleinte még könnyen áttekinthető sem. Nem volt világosan áttekinthető *Maxwell* csodálatos alkotása (1873), a „Maxwell-egyenletek" világa. Ennek méltó illusztrációja lehet *Eötvös Loránd* „kalandja". Eötvös 1873-ban Angliában járt, ekkor jelent meg James Clerk Maxwell (1831–1879) (*1. ábra*) skót fizikus *Treatise on Electricity and Magnetism* című nagy műve [1] az elektrodinamikai szintézis kimunkálásáról. Eötvös természetesen megvette a művet, nevét beírta a könyvbe (*2. ábra*), minden valószínűség szerint jól meg is nézte, de mert meglehetősen elfáraszthatta a sok matematikai komplikáció Eötvöst (aki pedig igen csak jártas a matematikában), minden bizonnyal megelégedett azzal, hogy becsukta a könyvet és tovább folytatta kutatásait a gravitációval és a vele kapcsolatos elektromos jelenségekkel (!) kapcsolatban. Tudomásunk szerint nem hivatkozott Maxwellre! Ezt az „unreadable" könyvet az tette „olvashatatlanná", hogy abban az időben éppen csak születőben volt – de még nem született meg a vektorok, a vektor-vektor, vektor-skalár és skalár-vektor függvények formailag is áttekinthető, köny-

Abonyi Iván az Eötvös Egyetem Elméleti Fizikai Tanszék nyugalmazott tudományos főmunkatársa, száznál több szakmai és ismeretterjesztő írás szerzője. 1975 és 1982 között az ő irányításával készültek a Gondolat Könyvkiadó *Fizika évkönyv* sorozatának kötetei. A magyar *Larousse Lexikon* és a *Magyar Nagylexikon* sok szócikkének ő a szerzője. Két tanulmánykötete jelent meg a 17–18. század, illetve a 20. század fizikájáról.

2. ábra. Maxwell korszakalkotó művének címlapja és ami különösen érdekes, a könyvet megvásárló Eötvös szignója.



Eötvös Loránd
1873

London
MACMILLAN AND CO.
PUBLISHERS TO THE UNIVERSITY OF
Oxford

Clarendon Press Series

Ta/542

A TREATISE
ON
ELECTRICITY AND MAGNETISM

BY
JAMES CLERK MAXWELL, M.A.

VOL. I

Oxford
AT THE CLARENDON PRESS
1873

[All rights reserved]

nyen kezelhető, mégis tömör tárgyalásmódja, a vektoralgebra és a vektoranalízis.

Maxwell korai halála után az angol *Oliver Heaviside* (1850–1925) (*3. ábra*) ismerte fel az új matematikai formalizmus szerepét és alkalmazta a Maxwell-egyenletekre. Hangsúlyozzuk, Heaviside óriási érdeme a Maxwell-egyenletek – általunk is használt – vektoralakjának felismerése, feldolgozása, ami végül is nem kicsinylendő le (mert itt nemcsak a vektor-vektor függvény, hanem a hely ez idő szerinti deriváltak alkalmazása is fontos szerepet játszik).


3. ábra. Oliver Heaviside

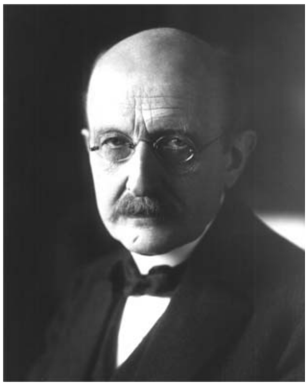
A fizikai szakirodalomban gombamódra szaporodni kezdtek az összefoglaló, elsősorban a „műszaki igényeket” kielégítő, célratörő munkák.

Olyan nagy nevek is szerepelnek a tankönyveket író „atyák” között, mint a francia *Henri Poincaré* (1854–1912) és a német *Hermann von Helmholtz* (1821–1894), hogy egyelőre csak őket említsük.

A magyar szakirodalom is büszkélkedhet e témakörben megjelent munkával [2]. Távolról sem szeretnénk kritizálni vagy éppen lebecsülni a szerzők tankönyvírói alaposságát, de az a véleményünk, hogy az elektrodinamika alapjairól értekezni eleinte túl rágós falat lehetett. Az ismert és ma még könnyen fellelhető tankönyvek közül egy sem foglalkozott igazán az elektrodinamika valódi alapkérdéseivel, annyira elégedettek voltak az általuk meghódított matematikai ismeretek alkalmazásainak a bemutatásával. Az elektrodinamika-tankönyvek mindegyike legfőbb feladatának azt az immár szokásossá vált célt tartotta, hogy az elektrodinamika körülbelül 1900-as állapotát, és az arra alapuló modern technikai vonatkozásokat mutassa be. Hiszen a relativitáselmélet bemutatása már más tanrendi tétel lett.

Ezért azt hisszük, jelen írásunk mégis érdekes lehet az Olvasók számára.

Azzal kezdjük, hogy az irodalomjegyzékében felsoroljuk az elektrodinamika jellegzetes magyar műveit [3], de a teljességre törekedni sajnos nem áll módunkban, ezért a kimaradottaktól elnézést kérünk.

4. ábra. Max Planck


S most beszámolunk részben saját kutatásunk szerény eredményéről, de követjük az összefoglaló előadás menetét.

E szerint *Max Planck* (1858–1947) (*4. ábra*) volt az igazán szerencsés a többször is megjelent elméleti fizikai tankönyvsorozatával. Őt az tünteti ki a tankönyvíró kollégái közül, hogy nem csak az elektrodinamikai eredmények széleskörű alkalmazásait követte, hanem a Maxwell-elmélet kiépítését is fontos közlendőnek tartotta. Abban hitt, hogy a Maxwell-egyenletek (főleg később Heaviside megfogalmazása szerinti) alakja a tényleges fizikai valóságot írják le a matematika nyelvén. A leíró függvények nem csak esetleges nyelvi kényszerképzetek, hanem a fizikai valóságot írják le, jelentésük mérhető, a leírás leképezi az elektrodinamikai valóságot, az elektrodinamika anyagi valóságát. Ennek egyik pillérét az elektrodinamikai energiatételben szerepet játszó Poynting-vektorban látta. A Poynting-vektor – mint ismeretes – az elektromágneses erőtérben áramló energiát, a térenergiát írja le. Ennek nyomán Planck azt remélte, ha az elektromágneses erőtérnek energiája és energiaáram-vektora is van, akkor impulzusa és impulzusnyomatéka is kell legyen. Legfeljebb a laboratóriumi méretekben, az áramkörök világában az látszólag nem oly lényeges (mert kicsi).

Ez a problémakör lesz tehát az, amivel a továbbiakban foglalkozni kívánunk. Annál is inkább, mert Planck „múlt századi” művei az egyetemi könyvtárak „túlzsúfoltsága” miatt különféle vidéki tárolóhelyeken nyugszanak. Nem lehetséges, hogy az olvasók sétáljanak a könyvespolcok között, és itt-ott hol ebbe, hol abba a kötetbe betekintsenek, ahogy ez e sorok írójával történt, aki évtizedekkel ezelőtt látta Planck azon művét, amelyből az itt kifejtendő gondolatmenetet megismerte, de ma már sehol sem tud ráakadni. Ezért az Olvasók szíves elnézését kéri.

Összefoglalás a Maxwell-egyenletekről

Akármennyire is anakronizmus, hogy a Planck idejére vonatkozó elgondolások felidézése közben nem az akkor divatos CGS mértékrendszert, hanem a mai használatnak inkább megfelelő SI mértékrendszert használjuk, ezt azért tesszük, hogy a mai olvasók sokkal közelebb férkőzhessenek a mondanivalónkhoz.

Kezdjük tehát! A továbbiakban legyen **E** az elektromos térerősség vektora, **B** a mágneses indukció vektora, ϱ az elektromos töltés térfogati sűrűsége és **J** az áramsűrűség vektora. A Maxwell-egyenletek szokásos alakja most:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \tag{1.a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{1.b}$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho, \tag{2.a}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{2.b}$$

Az itt fellépő ε_0 és μ_0 dimenziós arányossági tényezők (a vákuum esetére, mert egyébként $\varepsilon_0\varepsilon_r$, illetve $\mu_0\mu_r$ írandó, amennyiben nem vákuumról lenne szó).

A vákuum permittivitása: $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot10^{-12}\ \mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}$, míg a közegé $\varepsilon_r \geq 1$, valamint a vákuum permeabilitása: $\mu_0 = 1{,}256\cdot10^{-6}\ \mathrm{VsA^{-1}m^{-1}}$, míg a közegé, ha diamágnesről van szó, akkor $\mu_r \leq 1$, ha para- vagy ferromágnesről: $\mu_r > 1$.

Az (1) és (2) egyenletekben a ∇ vektor (a nabla) az helyvektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ szerinti differenciálás kifejezője:

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Mint ismeretes, az (1.a) egyenlet fizikai mondanivalója az, hogy a **B** erőterének nincs forrása, mert *nem létezik mágneses egypólus* (monopólus), csak dipólus vagy (magasabb rendű) multipólus, mert „a mágnesnek mindig van *két* pólusa: északi és déli!”

Az (1.b) egyenlet az *indukció törvénye,* eszerint az időben változó mágneses erőtér körbefutó (örvényes) elektromos erőteret kelt. A (2.a) egyenlet szerint az **E** elektromos erőtér forrásai az elektromos töltések méghozzá *egypólus* jellegűek (vagy páratlan multipólusok), mert a természetben lehet elkülöníthető egypólustöltést találni (pozitívat és negatívat is) stb. A (2.b) egyenlet azt fejezi ki, hogy az áramokat, és az

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\text{-vel}$$

arányos „eltolási” áramot is mágneses erőtér vesz körül (az indukció törvényéhez hasonló ellenpár).

A Maxwell-egyenletekhez kapcsolódóan az alábbi fontos megállapítások tehetők

a) A Maxwell-egyenletek alapvető törvényeket fogalmaznak meg. Az **E** elektromos és a **B** mágneses erőtér forrásai kétfélék, az elektromos töltések és az áramok (rendre), de vegyük észre, hogy *ezek nélkül is lehetséges elektromos, illetve mágneses, egyszóval: elektromágneses erőtér,* ez az indukció és az eltolási áram jelenségei jóvoltából is létezik!

b) Az elektromos és a mágneses erőterek, illetve a leírt jelenségkörök *nem függetlenek egymástól,* az egyik jelenségcsoport nem létezhet a másik nélkül. Ez tükröződik az (1) és (2) egyenletek csatoltságában. *Oersted* és Faraday leírták ugyan a gerjesztés és az indukció jelenségét, de az eltolási áram keltette mágneses erőtér bevezetésével Maxwell tette ezt a kapcsolatrendszert teljessé. Ez azért történhetett, mert az elektromos jelenségeket kísérő mágneses történés nem volt elég intenzív ahhoz, hogy a kapcsolatot felismerjék.

A Maxwell-egyenletek következményei

A Maxwell-féle általános törvényszerűségek felismerése éppen jókor jött – függetlenül a matematikai formalizmus kidolgozottsági szintjétől. Ne feledkezzünk el a La Manche, a Csatorna másik partján, a németországi kutatókról. *Heinrich Hertz* (1857–1894) nevéhez fűzi a fizikatörténet az elektromágneses sugárzás kísérleti felfedezését és elméleti leírását, aki Maxwell sejtése nyomán kísérleti bizonyítékát adta a fény elektromágneses hullámzásкénti azonosításának.

Ha az **E** elektromos térerősségre vonatkozó hullámegyenletet szeretnénk megtalálni (egyelőre vákuumban: $\varepsilon_r = \mu_r = 1$), az (1.b) egyenlet rotációját képezve

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B}) = 0$$

adódik, ahova a (2.b)-ből behelyettesítve

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$$

kapható. De mivel

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla(\nabla\mathbf{E}) - \Delta\,\mathbf{E},$$

ahol Δ a Laplace-operátor, ezért

$$\Delta\,\mathbf{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\varrho + \mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}.$$

Ez pedig nem más, mint az **E** elektromos térerősségre vonatkozó inhomogén hullámegyenlet. Az „inhomogén” jelző azt fejezi ki, hogy az **E** térerősség alakulását később és másutt a ϱ és a **J** (is) meghatározza, a zárójelbe tett (is) pedig arra utal, hogy a térbeli tartomány *mindig* tele van az **E** rezgéseivel, sőt, terjedő hullámaival.

(Még az a szerencse, hogy ezt az inhomogén hullámegyenletet a matematikai játékszabályok szerint úgy kell megoldani, hogy a homogén egyenlet általános megoldásához hozzá kell adni az inhomogén egyenlet egy megoldását – természetesen a kezdeti és peremfeltételek kielégítéséről sem feledkezhetünk el). Annyi pedig világos, hogy ezen egyenletnek megfelelő hullámok – a vákuumban

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = 3{,}0\cdot10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel terjednek. De nem feledkezhetünk el arról sem, hogy *az* **E***-re vonatkozó hullámegyenlet nem áll egyedül a Maxwell-egyenletek együttesében.* Mert lássuk akár mindjárt a

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

egyenletet. Egyelőre legyen szabad végtelen térben – vezetőktől és szigetelőktől elhagyott, töltés és árammentes esetről beszélni, akkor az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)\exp i(\omega\,t - \mathbf{k}\,\mathbf{r})$$

alakú (elemi) hullám – amelynek körfrekvenciája ω, terjedési iránya **k**, amplitúdója pedig $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ – *okvetlenül* együtt jár a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)\exp i(\omega\,t - \mathbf{k}\,\mathbf{r})$$

indukcióvektor rezgésével (hullámával), mégpedig úgy, hogy mindig fennáll a

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \omega\, \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$$

reláció, vagyis a $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$, $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ vektorok egymásra merőlegesek és *jobbrendszert* alkotnak.

Megjegyezzük, hogy lehetnek olyan bonyolult elrendezések a térben, amelyekre ez a kategorikus kijelentés már nem áll fenn, vagyis nem biztos, hogy csak egymásra merőlegesek lesznek a hullámok, mint például töltéskoncentráció esetén. Ugyanis az $\mathbf{E}$ és a $\mathbf{k}$ skaláris szorzata ekkor nem nulla, hanem a töltéskoncentráció Fourier-transzformáltjával arányos.

Most még csak azt foglaljuk össze, hogy mi van, ha a közeg „mérsékelten” komplikáltabb, például nem vákuumról van szó, hanem a tér *óriási kiterjedésű, homogén és izotróp dielektrikummal* van kitöltve. (Természetesen, még tovább lehetne fokozni kristályos szerkezetű vagy elektroaktív, magnetoaktív anyaggal, de ettől most tekintsünk el.) A homogén dielektrikumot eszerint a

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \text{ és}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

relációk jellemzik, az egyelőre *skalárnak* tekintett, a közegre jellemző ε_r és μ_r *relatív permeabilitás* és *relatív permittivitás* mellett, valamint feltesszük azt is, hogy ε_r és μ_r a térben és időben állandók és 1-nél nagyobbak. Ekkor a hullámegyenlet homogén része – röviden – így írható:

$$\left\{\nabla^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0.$$

Az egyszerűség kedvéért így írva a hat hullámegyenletet, a három $\mathbf{E}$- és a három $\mathbf{H}$-komponensre. Innen leolvasható, hogy ekkor a hullámok terjedési sebessége:

$$c' = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} < c_0$$

a mondott feltételek mellett, tehát *kisebb mint* c_0. (Lehet, hogy $\mu_r < 1$, így elvben c' nem feltétlenül kisebb mint c_0, de azt ma még nem tudjuk biztosan.)

Ezzel a megjegyzéssel beköszöntöttünk az optikába! A fény általában transzverzális rezgés, a hullám terjedési sebessége vákuumban c_0, közegben $c' < c_0$, a többi részletet – ha szükséges – a hullámegyenletek (parciális differenciálegyenletek) fáradságos megoldása adja – a peremfeltételek és szimmetriaviszonyok miatt adódó komplikációk következtében sokszor bizony csak közelítő megoldás formájában.

Ami pedig a hullámok terjedését biztosító közeget illeti, felmerül a súlyos kérdés: hol, miben terjednek ezek a hullámok? Maxwell eredetileg feltételezett egy ilyen közeget (æther), de a Maxwell-elmélet mai, einsteini értelmezése szerint: *vákuumban!* Esetleg az azt kitöltő anyagi közegben, a dielektrikumban. Hiába örököltük elődeink „horror vacui” (irtózás az űrtől) elvét. Ugyanakkor korai lenne eleve tiltakozni a „geometriai tér” fizikai szempontból „lehetséges” szerkezete ellen. A Maxwell-féle fenomenológiai (jelenségi) elektrodinamikában azonban erre nincs szükség!

A Maxwell-egyenletek együttese, mint parciális differenciálegyenletek csatolt rendszere, arra alkalmas, hogy *adott* töltés- és áramrendszer bemenő adataihoz (kezdeti és térbeli eloszlásához) meghatározza, hogy mi lesz az elektromágneses erőtér alakja a tér minden pontjában és minden időpontban. Ehhez az üres (töltés- és árammentes) eset is rendelkezésre áll, a parciális differenciálegyenlet-rendszer matematikai megoldásának előírása ezt tartalmazza is.

Okvetlenül ki kell térnünk arra, hogy a (2.a) és a (2.b) egyenletekhez – a megoldás érdekében – a kezdeti időpontban nekünk olyan töltés- és árameloszlást kell megadni, amely nem lehet teljesen önkényes. Ennek belátásához a (2.b) első egyenletét idő szerint deriváljuk, az eredményt a (2.b) második egyenletébe helyettesítjük, ezzel adódik a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = 0$$

úgynevezett *kontinuitási egyenlet*. Ez a töltéssűrűség és az áramsűrűség közti (folytonos) kapcsolatot, röviden *az elektromos töltés megmaradását* fejezi ki.

Ha már elektromos töltésről – és dipólusokról stb. – beszélünk, érdemes arra is kitérni, hogy *jelenlegi tudásunk* szerint *az elektromos töltés és a mágneses dipólus* (stb.) *nem létezik tömeg nélkül*. Az elektron töltésének és tömegének a hányadosát, a *fajlagos töltését Robert Andrews Millikan* (1866–1953) határozta meg először. A proton fajlagos töltése kisebb (a proton nagyobb tömege miatt), meghatározása nem okozott akkora szenzációt, mint az elektron esetében. A töltött mezonoké sem, a nehezebb barionoké sem. Az igazán jelentős lépésnek az *elektron* elemi fajlagos töltésének meghatározása, a töltés kétfajta előjelének megállapítása és a mágneses dipólnyomaték értékének mérése bizonyult.

Az elektromágneses erőtérben energia van, amely áramlik!

Az elektromágneses erőtér, mint láttuk, új és szokatlan szerzet volt a fizikában. Ráadásul, hiába tűnik ma a legegyszerűbb valódi fizikai *vektortér-kombinációnak,* mégsem volt elegendő, jó hatásfokú a matematikai fegyvertár, bármennyire is megbarátkoztak már a fizikusok és a matematikusok a lineáris rugalmasságtannal. Nem győzzük hangsúlyozni, mennyi zavart okozott a megértésben az, hogy *az elektrodinamikai hatás a vákuumban is képes tovaterjedni*. De, hogy ebben a fura erőtérben, ami még a vákuumban is képes tovaterjedni, még az energia is képes áramolni, mindenesetre szokatlan (nem is beszélve arról, hogy az elektromágneses erőtérnek még más tulajdonságai is vannak!).

Lássuk csak! (Nekünk aránylag könnyű dolgunk van, hála a vektoralgebrának, a vektoranalízisnek, de legfőképpen a Heaviside-tól eredő átalakításoknak!)

A Maxwell-egyenletek első csoportját írjuk fel vákuumban, most így:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Az elsőt **E**-vel, a másodikat **H**-val szorozzuk skalárisan:

$$\mathbf{E}\,(\nabla\times\mathbf{B}) = \mu_0\,\mathbf{E}\mathbf{J} + \mu_0\,\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\mathbf{H}\,(\nabla\times\mathbf{E}) = -\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Az felső egyenletet elosztjuk μ_0-val:

$$\mathbf{E}\,(\nabla\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\mathbf{J} + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Most pedig a két egyenlet különbségét képezzük (azonos dimenziójukról meggyőződve):

$$\mathbf{E}\,(\nabla\times\mathbf{H}) - \mathbf{H}\,(\nabla\times\mathbf{E}) = \mathbf{E}\mathbf{J} + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

A bal oldalon alkalmazzuk a

$$\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\,(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\,(\nabla\times\mathbf{b})$$

átalakítást. Ezzel a

$$\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \mathbf{E}\mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu_0\mathbf{H}^2}{2}\right)$$

alakhoz jutunk. Ez az egyenlet röviden

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla\mathbf{s} + \mathbf{E}\mathbf{J}$$

alakban is írható, ahol

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\varepsilon_r\mathbf{E}^2 + \mu_0\,\mu_r\mathbf{H}^2\right),$$

(általánosítva arra az esetre, amikor ε_r} és μ_r is jellemzi a környezetben lévő anyagot), az

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

pedig a *Poynting-vektor*. Szemmel látható, hogy ez az eredmény az elektrodinamikai energiatétel! Az elektromágneses energiasűrűség (egy térfogatban, amire integrálnunk kell!) fogy, mert a térfogatból kiáramlik az **S** térenergia-áramsűrűség (amit a térfogat felületére kell integrálni, hiszen *áramsűrűségről* van szó!), illetve, a térfogatban **EJ** energiasűrűséget felemészt az áram Joule-hője alakjában. Az **S** a Poynting-vektor pontosabb jelentése a felületegységen időegység alatt kiáramló térenergia. Az **S** bevezetését *John Henry Poynting* (1852–1914) angol fizikus érdemének tekintjük, akinek az volt a meggyőződése, hogy az elektromágneses erőtér az anyagi világ egyik megnyilvánulása (1884).

Az elektromágneses erőtérnek impulzusa is van!

Az impulzus is gyakori szereplője a klasszikus fizikának, hiszen a mozgó testeknek van impulzusuk. De, hogy az elektromágneses erőtérnek is? Ezt meg kell vizsgálni!

Vegyük azt az esetet, hogy egy ϱ_m mechanikai tömegsűrűségű anyagdarabnak ϱ töltéssűrűsége is van, ezért rá elektromos erőtér hat, és ha mozog, akkor még áramsűrűséget is képvisel, így a környezet mágneses erőtere is hat rá. Ezt fejezi ki a mozgásegyenlet, ahol a jobb oldalon a Lorentz-erő (sűrűsége) is szerepel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_m\mathbf{v}\right) = \varrho\,\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}.$$

Itt

$$\mathbf{J} = \varrho\,\mathbf{v}.$$

Ezt az erőt *Hendrik Antoon van Lorentz* holland fizikus (1853–1928) ismerte fel. Most ebben a képletben a ϱ töltéssűrűséget és a **J** áramsűrűséget fejezzük ki a Maxwell-egyenletek sajátos olvasatával (jobbról balra):

$$\varrho = \nabla\mathbf{D},$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

(Mellesleg érdemes egy pillanatra elgondolkodni azon, hogy ezek a „fordítva olvasott egyenletek” a töltés és áram bizonyos jellegzetes erővonalképéről is árulkodnak!)

Ezzel a mozgásegyenlet jobb oldalát átalakítjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_m\mathbf{v}\right) = \mathbf{E}\,(\nabla\mathbf{D}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Ha most alkalmazzuk a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\times\mathbf{B} + \mathbf{D}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

differenciálási szabályt, akkor a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_m\mathbf{v}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) =$$

$$= \mathbf{E}\,(\nabla\mathbf{D}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \mathbf{D}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

egyenlethez jutunk. Itt a kifejtési tételt fogjuk alkalmazni:

$$\frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\right] = -\frac{1}{\mu_0}\left[\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})\right] =$$

$$= -\left(\nabla\frac{B^2}{2\,\mu_0} - \mathbf{B}\,\frac{\nabla\mathbf{B}}{\mu_0}\right).$$

Az utolsó tagról belátható, hogy tisztán örvényes terek esetén, mint amilyen **B**, zérus. Így kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_m \mathbf{v} + \mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) = \mathbf{E}(\nabla\mathbf{D}) - \nabla\frac{B^2}{2\mu_0} + \mathbf{D}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Itt ismét felhasználjuk az indukciós Maxwell-egyenletet és kiderül, hogy

$$\mathbf{D}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{D}\times(\nabla\times\mathbf{D}) = -\left(\nabla\frac{D^2}{2\varepsilon_0} - \mathbf{D}\frac{\nabla\mathbf{D}}{\varepsilon_0}\right).$$

Ha feltételezzük, hogy a vizsgált tartományban nincsenek töltések, $\varrho = \varrho_m = 0$, akkor $\mathbf{D}$ tisztán örvényes erőtér, $\mathbf{D}(\nabla\mathbf{D}) = 0$ és a jobb oldalon álló utolsó tag is eltűnik. Rendezés után – töltött anyag nélkül – a mozgásegyenlet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{D^2}{2\varepsilon_0}\right).$$

Ebből kiolvassuk, hogy az impulzus nem csak mechanikai lehet, hanem ilyen fizikai mennyisége az elektromágneses erőtérnek is van. Ez pedig a $\mathbf{g}$ elektromágneses impulzussűrűséggel írható le:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \varepsilon_0\mu_0\mathbf{E}\times\mathbf{H}.$$

És most jön a meglepetés!

De hát még csak most jön a java! Ha az elektromágneses erőtérnek van

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

impulzussűrűsége és van

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B},$$

elektromágneses energiaáram-sűrűsége, akkor vegyük észre, hogy $\mathbf{g}$ és $\mathbf{S}$ *párhuzamos vektorok,* tehát könnyű leolvasni, hogy egymással arányosak:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{g} = \mu_0\mathbf{S},$$

vagyis

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\mathbf{g} = \mathbf{S},$$

ami a korábbi, vákuum esetén tett megállapításunk szerint

$$\mathbf{g}\,c^2 = \mathbf{S}.$$

Ez a reláció először Max Plancknál jelent meg! *Ez pedig igazán furcsa megállapítás az elektrodinamikában!* Tulajdonképpen, ha *azt mondanánk,* hogy az elektromágneses erőtér térfogategységre eső része M tömegű, és ez az „anyag” c sebességgel terjed, valamint energiája (térfogategységben) $\mathscr{E}$, akkor

$$\mathbf{g}\,c^2 = \mathbf{S}$$

alapján adódik, hogy az elektromágneses erőtér olyan *fura „anyag”* amely eleget tesz a

$$\mathscr{E} = M c^2$$

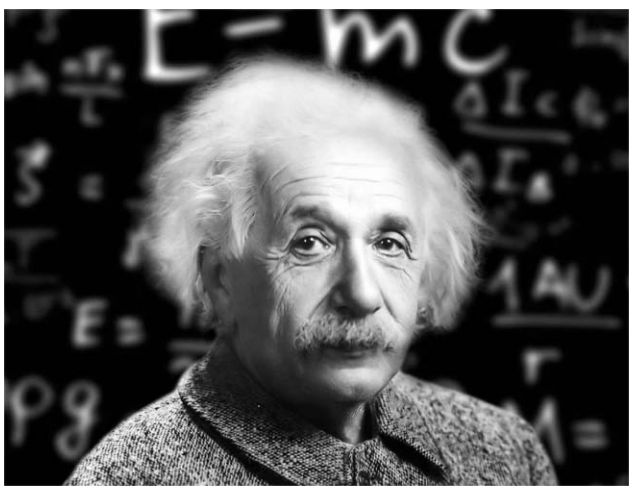
relációnak. *Ez Max Planck megállapítása.* A 19. század végén, még a relativitáselmélet megszületése előtt, sőt, a fotonhipotézis és a kvantumhipotézis előtt!

Konklúzió

Az eddigiekből világosan látszik, mekkora hatással volt az elektrodinamika megjelenése és kifejlődése J. C. Maxwell és O. Heaviside – meg természetesen sok más kutató (H. Hertz, M. Planck) nyomán. Igen lényeges, hogy az elektrodinamikába belépő kutatók egy *Új Világban* találták magukat (ez a „feltalálás” azért eltartott pár évtizedig). Mi volt a kulcs? Az elektromos és a mágneses erőtér kapcsolatának, egymásra utaltságának felismerése. Mi volt a jutalom? A technikai élet villamosítása gyakorlati szempontján és az optika meghódításán túl *az egységes, elektromágneses erőtér komolyan vétele* mellett az a megállapítás, hogy *az elektrodinamika nem klasszikus tudomány,* hanem *a relativitáselmélet kiépítésének* kapuja! És az sem elhanyagolható jellemvonása a felfedezésnek, hogy íme, van egy új, gyakorlatilag is fontos erőtér, ami *nem* a klasszikus fizikát (a Galilei-transzformációt) követi!

Erre a konklúzióra épül, hogy Albert Einstein felismeri a speciális relativitás elvét (a fénysebesség vákuumbeli értékének univerzális szerepét) azt, hogy a Galilei-transzformáció nem univerzális, hanem csak a Lorentz-transzformáció – (vákuumbeli) fénysebességhez képest – kicsi sebességekre vonatkozó közelítése. Az elv felismerése után megalkotta a speciális relativi-

5. ábra. Albert Einstein



tás elméletét, amiben az elektromágneses tér új arculata jelenik meg: a vektorpotenciál négyes vektortér formájában, a térerősségek tenzortér alakjában. S harcokkal teli bő évtized után az is kiderül, hogy a gravitáció sem (Galilei-invariáns) skalártér, egyetlen skalár gravitációs potenciállal, hanem (négyes) tenzortér, a négy dimenziós Riemann-térben.

S gondoljunk bele, hogy milyen messzire ható szerepet játszott ebben a fejlődésben Max Planck „parányi” felfedezése: az $E = mc^2$ megállapítása az elektrodinamikában!

Ezért aztán egyáltalán nem véletlen, hogy Albert Einstein (*5. ábra*) korszakalkotó cikke [4], a *Mozgó testek elektrodinamikája* – ami köztudottan a speciális relativitáselmélet hivatalos nyitányává vált – éppen a Maxwell-egyenletekkel kezdődik [1]. Einsteinnek az a cikke [5], amiben az $E = mc^2$ állítást megfogalmazta az elektrodinamikában, hosszabb kutatómunkára serkentette Max Planckot az állítás általánosításának bizonyítására.

Irodalom

1. J. C. Maxwell: *Treatise on Electricity and Magnetism I., II.* Clarendon Press, Oxford, 1873.
2. Zemplén Győző: *Az elektromosság és gyakorlati alkalmazásai.* (A Természettudományi Társulat könyvsorozatának 82. kötete, Budapest (1910) 884.
3. Novobátzky Károly, Neugebauer Tibor: *Elektrodinamika és optika.* Egyetemi tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
   Nagy Károly: *Elektrodinamika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
   Hevesi Imre: *Elektromosságtan.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
   Litz József: *Elektromosságtan és mágnesességtan.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1998. (Ez a könyv tartalmaz utalást az $E = mc^2$ törvényre.)
   Litz József: *Fizika II. – Termodinamika és molekuláris fizika – Elektromosság és mágnesesség.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
4. Albert Einstein: Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik 4/18* (1905) 891–921. – magyarul: A. E.: *Mozgó testek elektrodinamikája, válogatott tanulmányok.* Gondolat Kiadó, Budapest, (1971) 55–73. – A. E.: Válogatott írásai. *Principia Philosophiae Naturalis 4.* Typotex Kiadó, Budapest (2005) 81–103.
5. Albert Einstein: Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie. *Annalen der Physik 4/23* (1907) 371–384.