A FIZIKA TANÍTÁSA

GONDOLATOK AZ EÖTVÖS-VERSENY 1. PÉLDÁJÁRÓL

1. rész: stacionárius eset

Tichy Géza – ELTE Anyagfizikai tanszék
Vankó Péter – BME Fizika tanszék
Vigh Máté – ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszék

A 2016. évi Eötvös-verseny első példája egy súrlódással kapcsolatos mechanikai fizikapélda, amely újabb és újabb gondolatokat ébreszt, megoldása számos ötletet ad további feladatok számára. A feladat így szólt:

Vízszintes helyzetű, elegendően nagy méretű, téglalap alakú rajztáblán egy begrafitozott, kicsiny pénzérme fekszik. A rajztáblát saját síkjában mozgatni kezdjük úgy, hogy középpontja R sugarú körön haladjon ω szögsebességgel, miközben oldalai az eredeti helyzetükkel mindvégig párhuzamosak maradnak.

Az érme és a rajztábla közötti súrlódási együttható μ, amelynek értéke elég kicsi ahhoz, hogy az érme folyamatosan csússzon.

Hogyan mozog az érme hosszabb idő után? Milyen nyomot hagy eközben a rajztáblán?

Ehhez a feladathoz csak a súrlódás fizikájának ismerete szükséges. Régi megállapítás, amelyet *Guillame Amantons* már 1699-ben leírt, hogy a súrlódási erő arányos a terheléssel és felületfüggetlen. A súrlódási erő sebességfüggetlenségét csupán később, 1785-ben fogalmazta meg *Charles Augustine Coulomb.* Azt a tényt, hogy iránya a két felület relatív mozgásának irányába esik, természetesnek vették. Amelyik felületre hat az erő, annak iránya a hozzá viszonyított sebességgel ellentétes irányú, és a másik felületre ható erő ezzel ellentétes, teljesítve *Newton* harmadik törvényét.

A rajztábla minden pontja körmozgást végez, mégsem mondhatjuk e mozgásról, hogy forgómozgás, mivel oldalai eredeti helyzetükkel párhuzamosak maradnak. Így a rajztábla időben változó irányú eltolást, azaz transzlációt végez.

A rajztábla egy pontjának koordinátáit az idő függvényében felírva:

$$X = R\cos(\omega\, t),\qquad Y = R\sin(\omega\, t). \tag{1.a}$$

A rezgőmozgás kinetikájának ismeretében kapjuk a sebesség és a gyorsulás koordinátáit is:

$$V_x = -R\omega\sin(\omega\, t),\quad V_y = R\omega\cos(\omega\, t),$$
$$A_x = -R\omega^2\cos(\omega\, t),\quad A_y = -R\omega^2\sin(\omega\, t). \tag{1.b}$$

A teljes mozgás analitikusan nem oldható meg, és a feladat is csak a hosszabb idő után beállt, stacionárius mozgás leírását tűzi ki célul. Ebben a cikkben mi is ezt kívánjuk megoldani. Könnyen megbecsülhető, hogy a stacionárius mozgás is körmozgás. Kézzel mozgatott papírlapon jól látszik a mozgás menete. Tegyük fel, hogy a mozgás körmozgás. Azonnal fel tudjuk írni az érme gyorsulásának komponenseit.

Mivel az érmére csak a súrlódási erő hat, a gyorsulás nagysága μg. A gyorsulás komponensei:

$$a_x = -\mu\, g\cos(\omega\, t-\varphi),\qquad a_y = -\mu\, g\sin(\omega\, t-\varphi). \tag{2.a}$$

Az asztal mozgásához képest beírtunk egy negatív előjelet és egy jelenleg ismeretlen fáziskülönbséget is, mert a mozgás az asztal mozgásához képest késhet – és késik is. Az előjelet azért írtuk, hogy a helykoordinátákban ne legyen negatív előjel. Most visszafelé haladva, a gyorsulásból a sebesség és a helyvektor komponenseit is felírhatjuk.

$$v_x = -\frac{\mu\, g}{\omega}\sin(\omega\, t-\varphi),\quad v_y = \frac{\mu\, g}{\omega}\cos(\omega\, t-\varphi),$$
$$x = \frac{\mu\, g}{\omega^2}\cos(\omega\, t-\varphi),\quad y = \frac{\mu\, g}{\omega^2}\sin(\omega\, t-\varphi). \tag{2.b}$$

A gyorsulásból meghatározott sebesség még megengedne egy állandó, időtől nem függő sebességet is, de ehhez a súrlódás miatt erő is járulna, amit az állandósult mozgás feltétele nem enged meg. Hasonlóan, a helyhez is járul egy állandó, amely a körmozgás középpontját határozza meg. Ha koordináta-rendszerünk kezdőpontját a körpálya közepére helyezzük, ez sem jelenik meg.

A feladat megoldásához az a fizikai ismeret szükséges, hogy a súrlódási erő és így esetünkben a gyorsulás iránya megegyezik a két súrlódó felület relatív mozgásának irányával. Egyenlettel kifejezve

$$a_x = \beta\,(V_x - v_x)\quad \text{és}\quad a_y = \beta\,(V_y - v_y). \tag{3}$$

Ebbe helyettesítve a fent megadott (2) kifejezéseket.

$$-\mu\, g\cos(\omega\, t-\varphi) = \beta\left(R\omega\sin(\omega\, t) - \frac{\mu\, g}{\omega}\sin(\omega\, t-\varphi)\right),$$
$$-\mu\, g\sin(\omega\, t-\varphi) = \beta\left(-R\omega\cos(\omega\, t) + \frac{\mu\, g}{\omega}\cos(\omega\, t-\varphi)\right). \tag{4}$$

Mindkét összefüggés minden időben csak úgy állhat fenn, ha mind a szinuszos és mind a koszinuszos tagok együtthatója a két oldalon megegyezik. Ez négy egyenletet ad, de nekünk csak két ismeretlenünk van: φ és β. Azután, hogy meghatároztuk a négy egyenletet, a rejtély megoldása nyilvánvaló. Az első egyenlet szinuszos tagjaiból ugyanazt az egyenletet kapjuk, mint a második egyenlet koszinuszos tagjaiból és fordítva. A két egyenlet:

$$\mu\, g\cos\varphi = \beta\,\frac{\mu\, g}{\omega}\sin\varphi,$$
$$\mu\, g\sin\varphi = \beta\left(-\frac{\mu\, g}{\omega}\cos\varphi + R\omega\right). \tag{5}$$

Az egyenletrendszer megoldása kézenfekvő. A két ismeretlenre

$$\cos\varphi = \frac{\mu\, g}{R\omega^2}\quad \text{és}$$
$$\beta = \omega\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \omega\,\frac{\mu\, g}{\sqrt{\left(R\omega^2\right)^2 - (\mu\, g)^2}} \tag{6}$$

kifejezést kapjuk.

Ha $\mu g > R\omega^2$, akkor a megoldás értelmetlen. Ez az a helyzet, amikor a rajztáblához képest az érme az erős súrlódás miatt nem mozog. Ha egyenlőség áll fenn, akkor a mozgás még nem indul meg, a két mozgás között nincs fázisszög, sugaruk is egyenlő, azaz a rajztáblán az érme áll.

A mozgást ezekkel az egyenletekkel majdnem teljesen meghatároztuk, ugyanis a fázistolás mértéke ismert. A meghatározás azért nem teljes, mivel semmi feltevést nem tettünk a körmozgás középpontjára. Az egyenletekből erre nem is következtethetünk, mert minden egyenletben csak a sebesség és gyorsulás szerepel, így a körpálya középpontja ismeretlen. A középpontot csak a teljes mozgás határozza meg, vagyis a mozgás kezdeti feltételei.

Hátra van még az érem nyoma a rajztáblán. A rajztáblához viszonyított mozgást az

$$x - X = \frac{\mu\, g}{\omega^2}\cos(\omega\, t-\varphi) - R\cos(\omega\, t),$$
$$y - Y = \frac{\mu\, g}{\omega^2}\sin(\omega\, t-\varphi) - R\sin(\omega\, t) \tag{7}$$

formula adja.

Felhasználva a szögfüggvények addíciós képleteit:

$$\begin{aligned} x - X &= \left(\frac{\mu g}{\omega^2}\cos\varphi - R\right)\cos(\omega t) + \\ &\quad + \frac{\mu g}{\omega^2}\sin\varphi \sin(\omega t), \\ y - Y &= \left(\frac{\mu g}{\omega^2}\cos\varphi - R\right)\sin(\omega t) - \\ &\quad - \frac{\mu g}{\omega^2}\sin\varphi \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{8}$$

A relatív koordinátákat kifejezhetjük φ és R függvényeként, kis átalakítással:

$$\begin{aligned} x - X &= R\sin\varphi \sin(\omega t - \varphi) = \rho \sin(\omega t - \varphi), \\ y - Y &= -R\sin\varphi \cos(\omega t - \varphi) = -\rho \cos(\omega t - \varphi). \end{aligned} \tag{9}$$

A fenti képlet is körmozgást mutat

$$\rho = R\sin\varphi = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\mu g}{\omega^2}\right)^2} \tag{10}$$

sugárral, és a körmozgás fázisa a rajztábla fázisához képest

$$\frac{\pi}{2} + \varphi$$

lemaradásban van. A körpálya sugara mind a rajztáblához viszonyított rendszerben, mind az álló, azaz inerciarendszerben kisebb, mint a rajztábla körmozgásának sugara.

Nemcsak arra a kérdésre feleltünk, amit a kitűzött feladat kérdezett, hanem a mozgást annál részletesebben, a nyugalmi rendszerhez és a rajztáblához viszonyítva írtuk le. Említettük, hogy a körpálya középpontja az állandósult megoldásban nem meghatározott, a pálya stabilitásának vizsgálatakor látni fogjuk, ez még megtárgyalandó problémát okoz.

A fent leírt megoldás elég bonyolult, különböző matematikai ismeretek egyszerűsíthetik a megoldást. A következőkben még két megoldási módot vázolunk. Az egyik a komplex számokat használja fel, ehhez a komplex számok matematikájának ismerete szükséges, de a másik, geometriai megoldás jóval egyszerűbben, érthetőbben jut a végeredményhez.

Komplex leírási mód

Az (1)-től a (3) képletekig az egyenleteket komplex alakba lehet átírni. Bevezetve az $\bar{X} = X + iY$, és $\bar{x} = x + iy$ komplex helyet, az (1) képlet a

$$\begin{aligned} \bar{X} &= R e^{i\omega t}, \\ \bar{V} &= i\omega R e^{i\omega t}, \\ \bar{A} &= -\omega^2 R e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{11}$$

alakot kapja.

A (2) képlet az alábbiakra módosul:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\mu g}{\omega^2} e^{i\omega t} e^{-i\varphi}, \\ \bar{v} &= i\frac{\mu g}{\omega} R e^{i\omega t} e^{-i\varphi}, \\ \bar{a} &= -\mu g R e^{i\omega t} e^{-i\varphi}. \end{aligned} \tag{12}$$

A (4) képlet átírásában az exponenciális időfüggéssel azonnal lehet egyszerűsíteni.

$$-\mu g e^{-i\varphi} = i\beta\left(\frac{\mu g}{\omega} e^{-i\varphi} - \omega R\right). \tag{13}$$

E komplex egyenlet valós és képzetes részéből (ami természetesen most nem négy, hanem két egyenlet) φ-t és β-t meg lehet határozni (6).

A relatív mozgást leíró komplex mennyiség:

$$\bar{x} - \bar{X} = \left(\frac{\mu g}{\omega^2} e^{-i\varphi} - R\right) e^{i\omega t}. \tag{14}$$

A komplex amplitúdót a (6) képlet felhasználásával átalakítjuk.

$$\begin{aligned} \frac{\mu g}{\omega^2} e^{-i\varphi} - R &= R\left(\cos\varphi\, e^{-i\varphi} - 1\right) = \\ &= R\left[\left(e^{i\varphi} - i\sin\varphi\right) e^{-i\varphi} - 1\right] = \\ &= R\sin\varphi\, e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}. \end{aligned} \tag{15}$$

A (10) képletben meghatározott sugár felhasználásával a relatív mozgásra kapjuk:

$$\bar{x} - \bar{X} = \rho\, e^{i\left(\omega t - \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right)}, \tag{16}$$

ami szintén mutatja a $\pi/2 + \varphi$ fáziskésést.

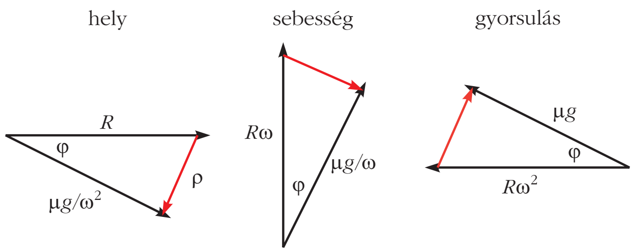
A komplex leírásmód ugyanazokat az eredményeket kevesebb számolással és áttekinthetőbben adja, de ennek használata – természetesen – bizonyos gyakorlatot kíván.

Geometriai megoldás

A megoldás lényegesen egyszerűsödik, ha az algebrai számolások helyett a vektorgeometriát hívjuk segítségül. Vegyük azt a pillanatot, amikor a rajztábla kitérését egy R hosszúságú vízszintes nyíl ábrázolja, ahogy ez a mellékelt *ábrán* látható. Ha az időfolyamatot nézzük, akkor ez a nyíl pozitív irányban forog, de most elég egy pillanatot ábrázolni. Az érme körforgásának sugara

$$\frac{\mu g}{\omega^2},$$

ezért ilyen hosszú vektorral jellemezzük, de az origótól φ szöggel lefelé áll (lásd az *ábrát*). A rajztábla se-



bességvektora függőlegesen felfelé áll, nagysága $R\omega$. Az érme sebességvektora szintén merőleges a helyvektorra, nagysága

$$\frac{\mu g}{\omega}.$$

A gyorsulásvektorok további elforgatással nyerhetők, és nagyságuk $R\omega^2$ és μg.

Az ábrából minden információt leolvashatunk:

$$\cos\varphi = \frac{\mu g}{R\omega^2}.$$

A Eötvös-verseny feladatának eredménye a rajztáblához viszonyított mozgás sugara, amit a Pitagorasz-tétel határoz meg:

$$\rho = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\mu g}{R\omega^2}\right)^2}.$$

Továbbá az érem gyorsulása és a sebességkülönbség hányadosából kapjuk β-t, és látjuk a rajztáblán lévő mozgás fáziskésését is.

A geometriai megoldás sokkal rövidebb, de többet hagyatkozunk gondolatainkra, több gondolkodással fizetünk. Azon megoldásban, ahol többet kellett számolnunk, a félreszámolás lehetősége nagyobb, az kevesebb gondolkodást, de több figyelmet követel.

Ez a cikk az állandósult, azaz stacionárius mozgással foglalkozott. Következő írásunk a teljes mozgás leírását tartalmazza, azt is, ahogy a stacionárius állapot beáll, valamint vizsgáljuk a mozgás stabilitását is. Vizsgálatunk nagy része a numerikus számolás eredményének taglalásából áll majd.