A BRACHISTOCHRON-PROBLÉMA, AVAGY A HOSSZABB ÚT A »RÖVIDEBB«

Stonawski Tamás
Nyíregyházi Egyetem

Fizikatörténeti áttekintés

Galilei lejtővel végzett kutatásai során több lejtőből álló, úgynevezett poligonlejtőkkel is foglalkozott. Következtetései alapján megállapította (helyesen), hogy a nehézségi erőtér egy függőleges síkjának két különböző magasságú pontja között fektetett egyenes lejtőn mozgó test hosszabb idő alatt jut el az egyik pontból (a magasabbikból) a másikba, mint a két pont által meghatározott körívre rajzolt poligonlejtőkön. A töröttvonalszakaszok száma tetszőlegesen nagy lehet, így végtelen sok töröttvonal alkalmazásával magát a körívet kapjuk. Állítását viszont tévesen általánosította, miszerint: „ha egy függőleges síkban két pont között egy tetszés szerinti alakú lejtőt fektetünk, akkor a körív alakú lejtő az, amelyen a test az egyik pontból a másikba a legrövidebb idő alatt jut el” [2]. Galilei ezzel a hamis állításával felhívta a figyelmét a következő generáció gondolkodóinak, akik egzakt bizonyítással keresték, hogy milyen alakú görbén ér le a legrövidebb idő alatt a test a fent leírt kezdőfeltételek esetén. A brachistochron néven elhíresült probléma hibátlan megoldását 1697-ben *Jakob Bernoulli* közli először [3], ebben eredményül a cikloist adja meg, amely a *Huygens* által bizonyított tautochron tulajdonságú is (bármilyen pontjából induljon a görbe mentén eső test, mindig ugyanakkora idő alatt jut el a görbe legmélyebb pontjába).

Tapasztalatom szerint a brachistochron-probléma felvetése olyan körben, ahol még nem találkoztak vele, igen érdekesnek tűnik. A probléma egzakt megoldása magas szintű matematikai eljárást – mint például variációszámítást – igényel, így a megoldásra fejben rájönni nem kis nehézséget okoz. Elsőként általában – reflexből – az egyenes lejtőre voksolnak, hiszen azonos sebesség mellett a legrövidebb idő alatt a legrövidebb utat teszi meg a test, de esetünkben (ha különböző ívek mentén mozognak a testek) a sebességek nem azonosak, így e következtetés helytelen. E probléma megoldása – azaz hosszabb úton rövidebb idő alatt ér le a test – szokatlan, így kvázi paradoxonként hat tudatunkra. A paradoxonok pedig – feloldásukig – erős motivációs hatással bírnak.

Középiskolásokkal végzett lejtős kísérleteim során e jelenség mindig felkeltette a diákok érdeklődését, ami arra ösztönzött, hogy pusztán ott tanult matematikával és kísérletezéssel közelítsem meg és értessem meg a brachistochron-problémát. Az alábbiakban szakköri tapasztalataimat szeretném megosztani a kollégákkal.

Köszönettel tartozom az Ecsedi Báthori István Gimnázium tanulóinak (kiemelten *Czérna Lászlónak* és *Pátzay Richárdnak*) és a Nyíregyházi Egyetem fizikatanár szakos hallgatóinak.

Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori program keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.

Köríven leguruló golyó esete

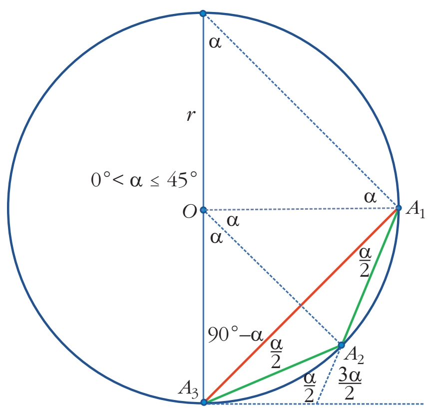
Első közelítésben egy egyenes és egy töröttvonalakból álló lejtőn mozgó test mozgásidejét hasonlítsuk össze! Két, egyenlő hosszúságú töröttvonalból álló lejtőt válasszunk úgy, hogy töréspontjai egy köríven nyugodjanak (*1. ábra*), így számításunkhoz a középiskolában tanult geometriai összefüggések is elegendők lesznek.

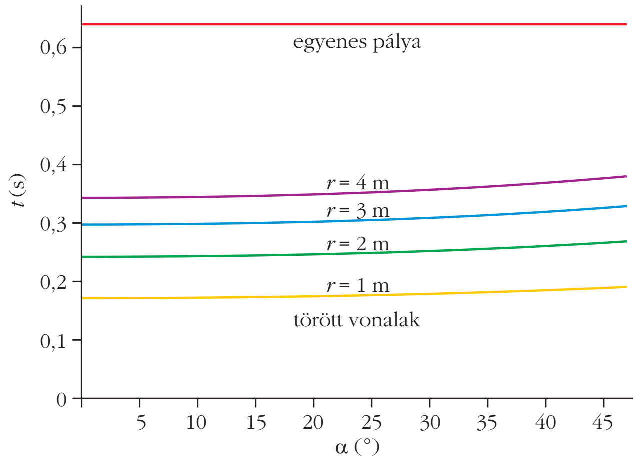
Az *1. ábra* alapján határozzuk meg az $A_1A_2A_3$ törött vonalon haladó test mozgásidejét az α szög függvényében ($0^\circ < \alpha \le 45^\circ$)! Először számítsuk ki az egyes lejtők hosszait:

$$\overline{A_1A_3} = 2\,r\sin\alpha,$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = 2\,r\sin\frac{\alpha}{2},$$

1. ábra. A_1A_3 egyenes lejtő és az $A_1A_2A_3$ poligonlejtő geometriai vázlata. Az ábrán feltüntetett szögek és oldalak közötti kapcsolatok a középiskolában tanult geometriai összefüggések alapján számolhatók.





2. ábra. A lejtőkön haladó testek mozgásidejét ábrázoló grafikon. Jól látható a poligonlejtő gyenge szögfüggése. A grafikonról a nagyobb sugarú körre illeszkedő töröttvonal-lejtők növekvő mozgásideje is leolvasható.

majd írjuk be a megfelelő kinematikai képletbe:

$$t_{A_1A_3} = \sqrt{\frac{2\,\overline{A_1A_3}}{a}} = \sqrt{\frac{2\,(2\,r\sin\alpha)}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{4\,r}{g}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\,,$$

azaz az r sugarú körpálya bármelyik húrján ennyi idő alatt ér le a test.

A törött vonalon haladó test először az A_1A_2 utat

$$t_{A_1A_2} = \sqrt{\frac{2\,\overline{A_1A_2}}{a}} = \sqrt{\frac{4\,r\sin\frac{\alpha}{2}}{g\sin\frac{3\,\alpha}{2}}} = t_{A_1A_3}\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\,\alpha}{2}}}$$

idő alatt teszi meg. A_2-ben a végsebesség, ami a következő szakasz kezdősebessége lesz:

$$v = a\,t = g\sin\frac{3\,\alpha}{2}\,t_{A_1A_2} = 2\sqrt{r\,g\sin\frac{3\,\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Az A_2A_3 szakasz megtételéhez szükséges időt az alábbi másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\overline{A_2A_3} = v_0\,t + \frac{a}{2}\,t^2.$$

Ennek gyöke (a negatív értéket kizárjuk):

$$t_{A_2A_3} = 2\sqrt{r}\,\frac{-\sqrt{\sin\frac{3\,\alpha}{2}} + \sqrt{\sin\frac{3\,\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{g\sin\frac{\alpha}{2}}}\,.$$

Ezután bizonyítandó, hogy

$$t_{A_1A_2} + t_{A_2A_3} < t_{A_1A_3}\,.$$

Az egzakt bizonyítás helyett használjunk függvényábrázoló programot! Válasszuk az α-t x tengelynek, hiszen ez lesz az a változónk, amelynek függvényében kiszámoltatjuk és ábrázoltatjuk a mozgásokhoz szükséges időt!

A grafikonról leolvashatjuk, hogy a poligonlejtő hosszabb útját lényegesen rövidebb idő alatt teszi meg a test, mint a rövidebb és egyenest. Ez a különbség a szög növekedésével alig változik. Az előbbi gondolatmenettel beláthatjuk, hogy a poligonlejtők szakaszait újabb 2-2 törött vonallal helyettesítve, a mozgásidőre még kisebb értéket kapunk. Ha az eljárást a végtelenségig folytatva, határesetben körvonalhoz jutnánk. Azaz a körvonalon lecsúszó test mozgásideje bármelyik körvonalra illeszkedő poligonlejtő mozgási idejénél kisebb.

Felmerül a következő kérdés: van-e más görbe, amelyik a körvonalon kapottnál kisebb mozgásidőt adna? Két pont köré végtelen sok kör írható, ezért érdemes más sugarú köröket is megvizsgálni. Kisebb sugarú kört, ahol $\alpha > 45°$ nem választhatunk, mert akkor kezdetben a test nem csúszna a lejtőn, hanem szabadon esne. A *2. ábra* alapján elmondható, hogy a sugár növelésével, a körív „lankásításával” a lecsúszási idő nő, és az elméletileg végtelen sugarú kör esetén az egyenes lejtő idejével egyezne meg. Tehát más, nem kör alakzatokat kell keresni.

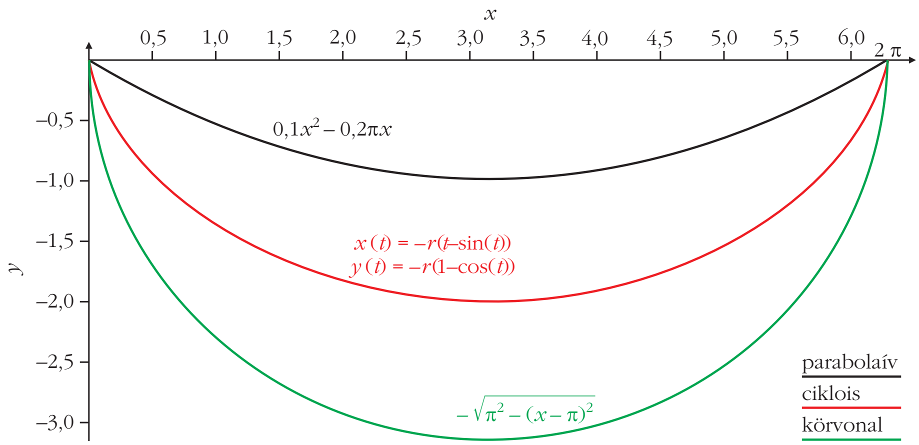
A középiskolai tananyagban szerepel a parabola és az ellipszis is, de ezek idevonatkozó geometriai tárgyalása már meghaladja a középiskolai tudásszintet. A továbbhaladáshoz e témakör fizikatörténeti tanulmányozását adtam feladatul, és tanulóim a körnél is „jobb” görbét – amelyiken haladva még rövidebb idő alatt ér le a test – találtak: a cikloist (a körrel rokon görbe nevét Galileitől kapta). Később a görbék „szép Helenéjének” is nevezték, mert megannyi viszályt szított a tudósok között.

Ismerkedés a cikloissal

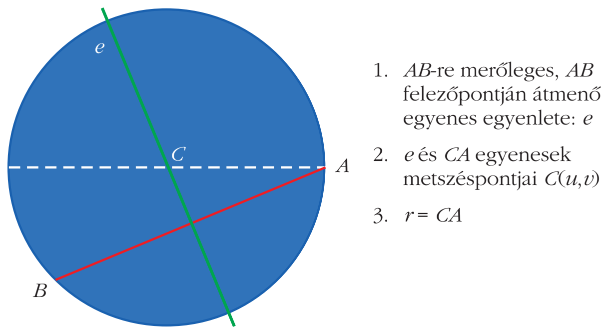
A ciklois – amit a gördülő körvonal egy pontja ír le – megismertetését a szerkesztésével érdemes kezdeni. Egy rossz CD-lemez széléhez közel fúrjunk lyukat, és abba helyezzünk tollat vagy ceruzát. Az asztalon – a közepén található lyukba dugott rúd, például ceruza segítségével – úgy görgessük a CD-t, hogy a szélébe fúrt lyukba illesztett ceruza hegye az asztal melletti falra helyezett papírlapra rajzoljon (spirográf néven játékboltban vásárolt fogaskerekes rajzeszközökkel precíz rajzokat is készíthetünk).

A görbével való ismerkedés után az irodalomban talált képlet [4] alapján a Graph programmal [5] rajzoltassuk meg a görbét (*3. ábra*)!

A középiskolai koordináta-geometriai ismeretek alapján rajzoljunk ugyanebbe a koordinátarendszerbe olyan kör-, illetve parabolaívet, amelyek a (0;0) és a (2π;0) pontokon mennek át! Mivel 2 pont végtelen sok ilyen ívet határoz meg, az alakzatok paramétereinek változtatásával elérhetjük, hogy a cikloishoz közel egyenlő távolságra legyenek. Az ilyen görbéken haladó testek (kezdősebesség nélkül) a súrlódás miatt a valóságban nem képesek a teljes [0;2π] intervallu-



3. ábra. Különböző, az egyenleteik alapján Graph program segítségével ábrázolt görbék.



4. ábra. A középiskolai koordináta-geometria segítségével meghatározható a kör középpontja és sugara.

mot befutni. Az elkészített lejtő leglátványosabban akkor mutatja a ciklois „győzelmét”, ha a golyó éppen fel tud kapaszkodni a görbe másik végébe. Az emelkedő szakasz meghatározása számítás alapján, vagy egyszerűen úgy történhet, hogy megfigyeljük, az elkészített cikloislejtőn meddig tud feljutni a golyó. Mindkét eljárás során azt tapasztaljuk, hogy a golyó a pályaszakasz közelítőleg 90%-át futja be. Ennek tudatában a cikloist csak ebben a 90%-os intervallumban ábrázoljuk, azaz kerekítve az [1;2π]-on! A ciklois kezdő és végpontjai lesznek a többi lejtővel a kapcsolódási pontok: $A(1;-1{,}35)$ és $B(2\pi;0)$. Ez a két pont fogja meghatározni az egyenes lejtő egyenletét is.

A körszerkesztésnél vegyük figyelembe, hogy középpontjának az *x* tengelyen kell lennie (lásd a korábbi feltételt). A köregyenlet meghatározásához a *4. ábrán* látható eljárást kell végrehajtani.

A parabolát három pontja alapján adjuk meg. A harmadik pontot a görbék „egyenletes sűrűsége” alapján választottuk meg: $D(\pi+0{,}5;-1{,}3)$. Ezután helyettesítsük be a koordinátákat az *x* és *y* helyére a parabola általános

$$y = ax^2 + bx + c$$

egyenletébe (ez 3 egyenletet jelent), így 3 háromismeretlenes egyenletet kapunk *a*-ra, *b*-re, *c*-re. Az egyenletmegoldást manuálisan vagy programozottan is elvégezhetjük, például a Scilab programmal [6, 7] (*5. ábra*).

A lejtősor elkészítése

A fent vázolt ábrázolást kinyomtatva (megfelelő méretezéssel) megkapjuk a lejtők sablonjait, amelyek alapján, farostlemezből kivágva, összeállíthatjuk a lejtősort (*6. ábrán* balra). Ahhoz, hogy a golyók a lejtő ívén maradjanak, egyszerű csatornákat alakítottunk ki: két azonos lejtőt vágtunk ki lemezből, majd távtartókat (szintén farostlemezből) helyeztünk közéjük, ezzel értük el, hogy a golyók csak két (alsó-oldalsó) ponton érintkezzenek a lejtővel, így a stabil mozgás a teljes pályán biztosítva volt. A többi lejtővel is hasonlóan jártunk el, majd azokat összeerősítve megkaptuk a lejtősort. A golyók egyszerre történő indítását egy műanyaglap (flakonból kivágott téglalap, amelyre cérnát erősítettünk) gyors kirántásával értük el.

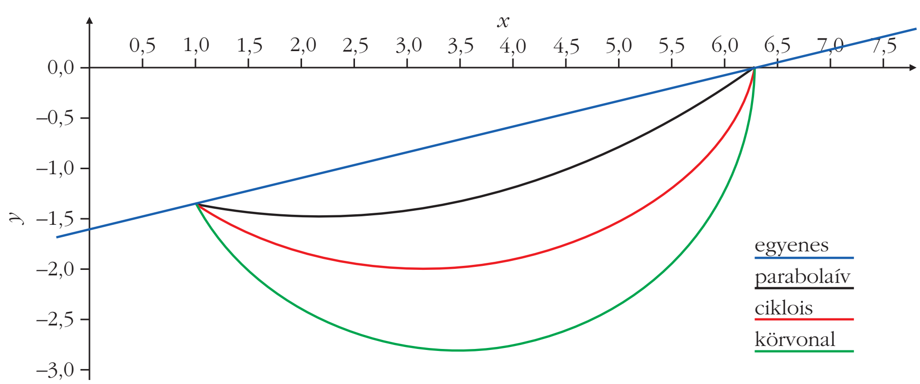
A lejtőn leguruló golyók versenyét szabad szemmel is jól lehetett követni (a győztes tényleg a ciklois pályán haladó golyó lett), de a mozgás gyorsasága (és további fizikai vizsgálódások) miatt nagyfrekvenciás filmfelvételt készítettünk a mozgásról (*6. ábrán* jobbra), majd kiértékeltük azt.

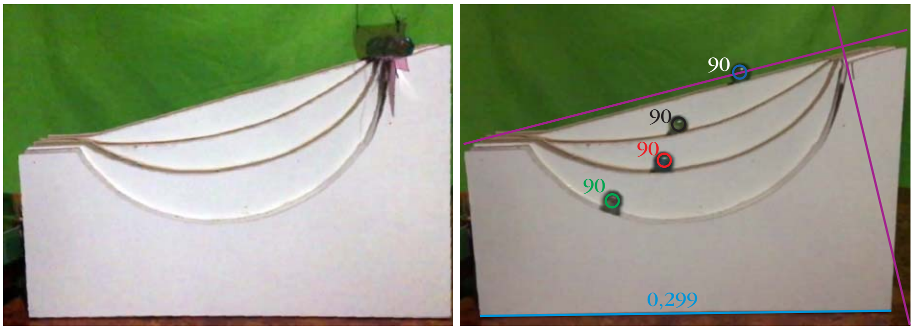
Videoanalízis a golyók mozgásáról

A videót 240 kép/s beállítással, mobiltelefonnal vettük fel. A videoanalízisban az *x* tengelyt az egyenes lejtőre illesztettük, az origó a startvonal lejtővel való metszéspontja, a pozitív irányt pedig az egyenes lejtőn haladó golyó mozgási iránya szerint választottuk meg.

A lejtősor elmozdulás-idő grafikonjainak tanulmányozását természetesen az egyenes lejtő félparabolájával érdemes kezdeni, hiszen a négyzetes úttörvény

5. ábra. A súrlódás figyelembevételével megrövidített görbék, amelyek sablonként szolgáltak a lejtő elkészítésekor.





6. ábra. a) Az indítás előtt a lejtő vájatába helyezett műanyaglap garantálta az egyszerre indulást. b) Pillanatkép a filmfelvételből.

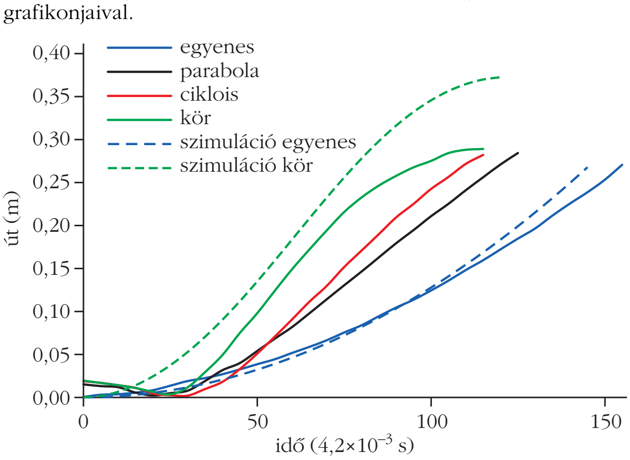
része a tananyagnak, így annak felismerése mindig sikerélményt okoz. A görbe vonalú pályák grafikonjai jellegzetesen „S” alakúak, azaz ezen pályákon a golyók a legalsó pontig gyorsulva, majd később lassulva haladnak. Az íves pályák első, úgynevezett tranziens szakasza jól elkülöníthető a grafikonokon (ez a lejtőre állás szakasza).

Az egyenes lejtőn legördülő golyó – a tranziens szakaszon gyorsulva, még előnyből is – az utolsó helyen végez. A harmadiknak befutó parabolapályán guruló golyó az egyenes pályát használóhoz képest lényegesen hamarabb érkezik, de a ciklois- és körpályákon fej-fej mellett haladnak a golyók. A grafikon szerint szinte egyszerre érkeznek pályájuk végére, de a grafikon a kamera perspektivikus torzulása miatt csalóka (felülnézeti kameraállással a célfotó egyértelműen eldöntötte a ciklois íven futó golyó győzelmét).

Azért mindenképpen érdemes megjegyezni a részeredményeket is: ha vízszintes segédegyeneseket rajzolunk a grafikonra, megállapíthatjuk, hogy az egyenes lejtőn haladó golyót a többi golyó már az első harmadban megelőzi, a második harmadban a cikloislejtőn haladó golyó a parabola golyójától átveszi a második helyet, majd a harmadik harmadban kitartó hajrával, „mellbedobással” győz.

A sebességek időbeli változásait a szoftver az elmozdulás-idő adatpárokból – deriválás segítségével – határozza meg. A grafikonon megfigyelhető, hogy az egyre nagyobb ívű lejtőkhöz egyre nagyobb maximális sebesség tartozik, és szinuszgörbéhez hasonló alakúak, kivételt az egyenes lejtő sebesség-idő grafikonja képez, ami szigorúan monoton egyenes. A körpálya grafikonja „hegyesebb” a cikloisénál, azaz jóval nagyobb sebességértékeket vesz fel a pálya középső része körül, viszont a pályaszakasz végén tartósan nagy sebességet csak a cikloispályán guruló golyó képes tartani, azaz a győzelmet a cél előtti hajrá hozza meg neki.

7. ábra. A lejtőn leguruló golyók út-idő grafikonjai a szimulációk grafikonjaival.



Az iskolában tanult speciális mozgások (egyenes és körpályán mozgó testek, egyenletes és egyenletesen változó mozgások) grafikonelemzésének elsajátítása után érdemes kihasználni a tanulók tudását bonyolultabb elemzésekre is, hiszen a természetben lejátszódó mozgások közül csak néhány írható le „tankönyvszerűen”. A kisdiák is, miután megtanult olvasni, kíváncsian emel le a könyvespolcról egy ismeretlen könyvet, és megértéséhez az ABC-s könyvben tanultakat próbálja alkalmazni. E kísérletsorozat elvégzése és értelmezése kilépés az iskolapéldákból, de épít rá, hiszen a grafikonelemzés „betűi”, alkotó módon lesznek használva.

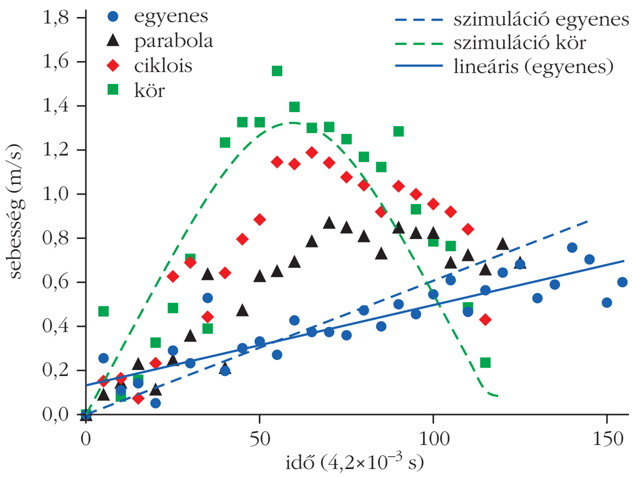
A bonyolult mozgások leírásában és elemzésében is érdemes alkalmazni a középiskolai matematikát, újabb közös pontokat találni a fizikával, a felsőbb matematikai megoldásokat és alkalmazásokat pedig tudománytörténetileg érdemes megközelíteni, így betekintést nyerhetnek a diákok, hogy a továbbtanulás milyen kapukat nyithat meg a természet megismerésében.

Szimulációk

A kísérletek alapján szimulációkat is készítettünk az egyenes és körpályán legördülő golyók mozgásairól. A szimulációk fontosak, hiszen segítségükkel a fizika képletei alapján megírt algoritmusokkal készült grafikonokat össze tudjuk hasonlítani a mérések alapján felrajzoltakkal. A szimulációban ráadásul lehetőségünk van a kezdőértékek megváltoztatására, kiszélesíthetjük a kísérlet technikai határait (például megnövelhetjük a golyók méreteit, csökkenthetjük a golyók tömegét stb.).

A szimulációt a Scilab [6] szoftver segítségével írtuk. Az algoritmusok léptető módszerrel számolták ki a fizikai mennyiségek értékeit. A lépésközt a filmfelvétel kép/másodperc értékéhez állítottuk, a kezdőértékeket méréssel határoztuk meg (lejtő hossza és meredeksége, körlejtő sugara, golyó sugara, tömege, a levegő sűrűsége, közegellenállási tényező, gördülési súrlódás). A közegellenállást is beépítettük a szimulációkba (lényegét lásd később) [7].

A lejtősor út-idő grafikonján jeleztük a szimulációk alapján kapott adatpárokat (*7. ábra*). Az összehasonlítás alapján elmondható, hogy a szimulációk görbéinek helyei és jelleggörbéi egyértelműen azonosíthatók. A mozgásidők is közel azonosak. Különbség a megtett útban van. A különbségek legfőbb okai a kamera torzítá-



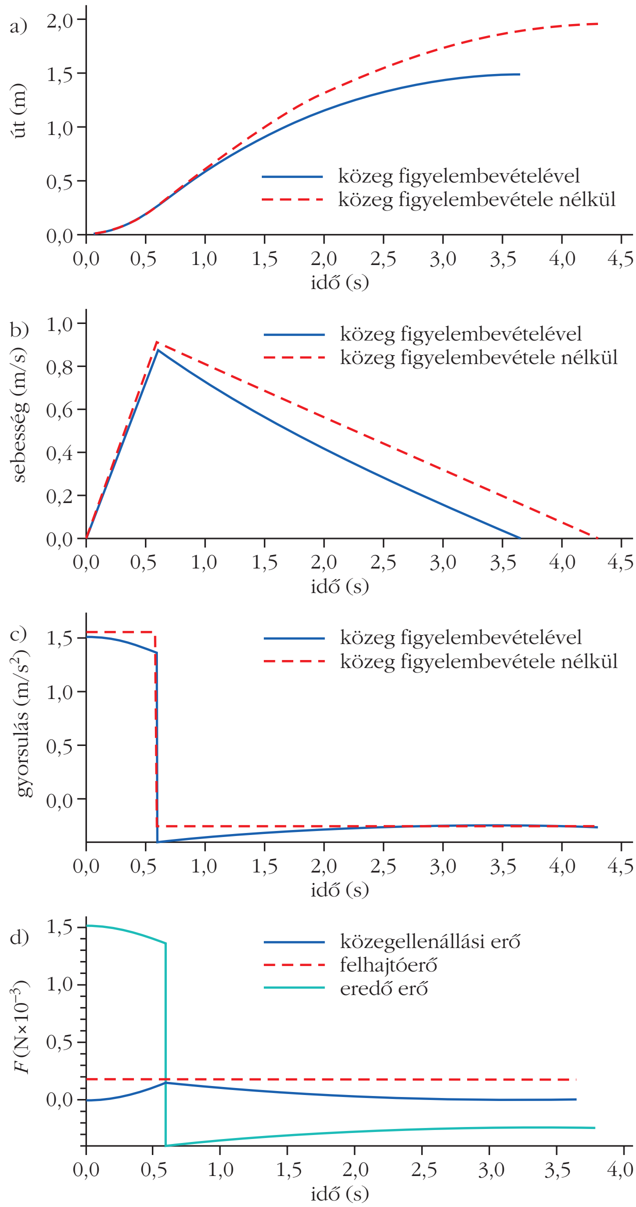
8. ábra. A lejtőn leguruló golyók sebesség-idő grafikonjai a szimulációk grafikonjaival.

sában, és a videoanalízis során a golyók pozícióinak azonosításából keletkező hibákban keresendők. A sebesség-idő grafikonokra (*8. ábra*) is elmondhatók a fentiek, sajnos a videoanalízisből eredő hibák a sebességszámítás során tovább növekedtek.

Az egyenes lejtőn leguruló golyó pályáját a szimulációban egy vízszintes pályával is kibővítettük, így a golyó megállásig gurulhatott. Az algoritmusba a közegellenállást és a felhajtóerőt is belefoglaltuk. A szimulációt lefuttatva nem tapasztaltunk közeg okozta nagyobb változásokat a grafikonokban. Érdekességként azért megvizsgáltuk, hogy mikor nem hanyagolható már el a közeg mozgást befolyásoló szerepe. A golyó tömegét megtartva, de térfogatát ötszörösére növelve már észrevehetővé váltak a közeg okozta változások – a súrlódási együtthatót 0,025-nek választottuk – (*9. ábra*). A tömeget ötödére csökkentve, azonos térfogat mellett, a közeg jelenléte szintén észrevehető. A kezdeti értékek változtatásával elindított szimulációk alapján a diákok számára érthetővé vált, hogy milyen esetekben számolhatunk a közeg figyelembevétele nélkül.

Konklúziók

Nehéz arra válaszolni, hogy milyen mélységben tárgyaljunk egy-egy konkrét fizikai problémát, mikor vegyük figyelembe a környezet hatásait, milyen pontossággal végezzük el a méréseket. A tanórán kívüli szakkör lehetőséget ad arra, hogy a már megszerzett tudást nyitottabb fizikai feladatok megoldására is használják a diákok. Az a felismerés, hogy az iskolában tanultak valós problémáknál is alkalmazhatók, erősen motiválta a tanulókat. Ilyenkor a fizika nemcsak egy tantárgy a sok közül, hanem válasz a közösen feltett kérdésekre. Ilyen és ehhez hasonló jellegű problémák megoldása esetén fontos a folytonos tanári jelenlét (akár interneten keresztül is), a „kollegiális” viszony, hiszen sok esetben, akár egy ilyen projektben való munka során is, módosulhat a tanuló motivációja. (Ha túl nagy teljesítményt várunk, akár a probléma feladását kockáztatjuk meg.)



9. ábra. a)–c) Egyenes lejtőn leguruló golyó mozgásgrafikonjai a közeg módosító hatásaival számolva és anélkül. d) A golyóra ható közegellenállási erő, a felhajtóerő és az eredő erő az idő függvényében (m = 0,001 kg, r = 0,015 m, μ = 0,025).

Ajánlom e cikket a lelkes fizikatanároknak és diákjaiknak, akik szívesen elvégzik a fent leírt kísérleteket. A szimulációkat lefuttatva – akár más példákon keresztül – remélem, hogy értékes időtöltést fognak szerezni nekik.

Irodalom

1. Stonawski Tamás: *Trükkös fizika: 58 játékos kísérlet egyszerű eszközökkel.* Mozaik Kiadó, Szeged (2016) 127 o., 62–63.
2. Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete.* Gondolat kiadó Budapest (1981) 193. o.
3. Faragó Andor: Felhívás egy új probléma megoldására. *Középiskolai mathematikai és fizikai lapok* I. évf. I. szám, Budapest, 1925. február
4. https://hu.wikipedia.org/wiki/Ciklois
5. https://www.padowan.dk/download/
6. https://www.scilab.org/
7. https://1drv.ms/f/s!An0er2QwwGjyqhd-w5CvsXmo99QN