AZ EÖTVÖS–PEKÁR–FEKETE EKVIVALENCIAMÉRÉSEK SZABÁLYOS HIBÁJA

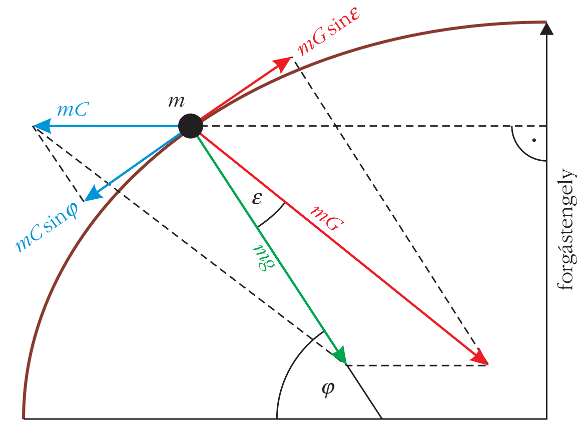
Tóth Gyula
BME ÉMK Általános és Felsőgeodézia Tanszék

Eötvös Loránd és munkatársai, *Pekár Dezső* és *Fekete Jenő* 1906-tól több méréssorozatot végeztek (EPF-mérések) a súlyos (gravitációs) és a tehetetlen tömeg arányosságára vonatkozóan [1]. A mérésekben olyan szabályos hibát találtunk, amely indokolttá teszi a kísérletek megismétlését a mai korszerű technikai lehetőségek által kínált jobb feltételek mellett [2]. A továbbiakban röviden ismertetjük az EPF-mérés elvét és rámutatunk a fellelt szabályos hiba okára, hatására és jelentőségére.

Az EPF-mérés elve

Az mg földi nehézségi erő az mG tömegvonzási (gravitációs), az mC forgási centrifugális és az mA árapálykeltő erők eredője, így a gravitációs erő a nehézségi erőnek csupán egyik összetevője. Az EPF-kísérletek során az mA árapálykeltő erők elhagyhatók, mivel látni fogjuk, hogy a kísérletben használt eszközre kifejtett hatásuk elhanyagolhatóan kicsi. A Földdel együtt forgó testekre ható mC centrifugális erő merőleges a Föld forgástengelyére, és vízszintes irányú összetevője (az északi féltekén) déli irányba mutat (*1. ábra*). Az összetevő nagysága, $mC\sin\varphi$ függ a hely φ földrajzi szélességétől. Ezzel az erővel egyensúlyban van az északra mutató $mG\sin\varepsilon$ erő, ami a testre ható mG tömegvonzási erő vízszintes síkba eső vetülete. Az ε szög az mg nehézségi erő (a gravitációs és centrifugális erő eredője) és az mG tömegvonzási erő által bezárt szög, maximális értékét, 5'57"-et a 45°-os földrajzi szélességen éri el. Az EPF-kísérletet Budapesten végezték, ott a $G\sin\varepsilon$ gyorsulás értéke 1,69 Gal (1 Gal = 1 cm/s^2).

Eötvös feltételezte, hogy a C centrifugális gyorsulás független az anyagi minőségtől, viszont a G tömegvonzási (gravitációs) gyorsulás függhet tőle. Az anyagi minőségi tényezőt η-val jelölve, a gravitációs erő nagysága az $(1+\eta)\,mG$ összefüggés szerint változik, ha valamilyen referenciaanyagra (például víz) az $\eta = 0$ értéket vesszük fel. Ha $\eta \neq 0$, akkor a gravitá-



1. ábra. Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciamérés elve.

ciós és tehetetlen tömeg eltérése miatt megszűnik az egyensúly, ezért egy kicsiny $\eta\, mG\sin\varepsilon$ északi irányú erő fog jelentkezni. Ez az erő az Eötvös-féle torziós inga karjának elfordulását okozza. Ismeretes, hogy Eötvös torziós ingája egy torziós szálon függő merev rúdhoz erősített felső és alsó tömeget tartalmaz, amelyben az alsó tömeget a rúdról egy fonálon lelógatva helyezte el. Eötvösék kísérletének lényege az volt, hogy miután az inga karján lelógatott tömeget kicserélték egy, a felső tömegtől eltérő, másik anyagból készített tömegre, vajon tapasztalható-e az inga karjának elcsavarodása.

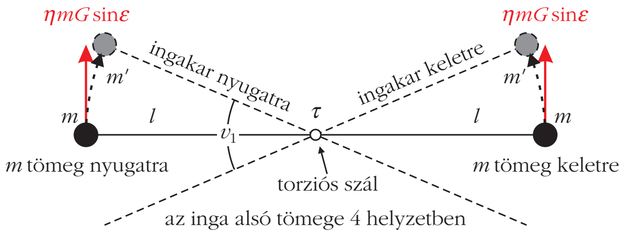
Mivel az észlelendő erő északi irányba mutat, ezért ez az erő a kelet–nyugati irányban álló ingakar tömegeire hatva fejt ki maximális nyomatékot. A torziós száltól keleti, illetve nyugati irányban l távolságban elhelyezkedő tömegek esetében a súlyos és tehetetlen tömeg különbözősége miatt fellépő $\eta\, mGl\sin\varepsilon$ nyomatékok egymással ellentétes előjelűek, így világos, hogy az ingakar szöghelyzetének változása egyenesen arányos lesz a keresett nyomatéki hatás kétszeresével (*2. ábra*). Az arányossági tényező a torziós szál τ csavarási állandója reciproka. Ezt a v_1 elfordulást pontosan megmérve kiszámítható az anyagi minőségi tényezők η különbsége az adott anyagpárra az inga l fél karhossza és az m tömeg nagyságának függvényében:

$$\eta = -\frac{\tau\, v_1}{2\, m\, l\, G\sin\varepsilon}. \tag{1}$$

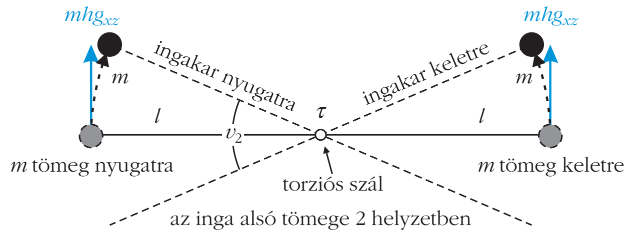
A mérés során figyelembe kell venni, hogy a kelet–nyugati irányban álló ingarúd tömegeire a gravitációs erők különbségéből adódóan is keletkezik nyomaték (*3. ábra*), ugyanis a gravitációs erő a térben pontról-pontra változik. A kísérlet szempontjából az egység-

---

Tóth Gyula egyetemi docens, a műszaki tudomány kandidátusa földmérőmérnöki szakon végzett 1985-ben. Azóta a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékén oktat és kutat. Kutatási területe a fizikai és matematikai geodézia, azon belül a Föld matematikai alakja, a geoid meghatározása. Ez irányú kutatásaiért 2011-ben Akadémiai Díjban részesült.



2. ábra. A torziós inga karjának v_1 elfordulása, felülnézetben ábrázolva, ha nem teljesül a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciája. Az ábrán az inga alsó tömegét láthatjuk négy különböző helyzetben. Először az m tömeg a torziós szálhoz képest keletre, majd nyugatra látható. Miután ezt az m tömeget kicseréljük egy másik anyagból készült m' tömegre ($m = m'$), az eltérő η anyagi minőségi tényezők miatt mind keleti, mind nyugati irányban jelentkezik egy kis $\eta mG\sin\varepsilon$ erő, amely elforgatja az inga karját és vele együtt az m' tömeg is új helyzetbe kerül.



3. ábra. A torziós inga karjának v_2 elfordulása – a *2. ábrához* hasonlóan – felülnézetben. Az ábrán az inga alsó tömegét láthatjuk két különböző helyzetben. Az inga alsó m tömegére akár keleti, akár nyugati helyzetében északra mutató erő hat a gravitációs erő mg_x összetevőjének változása miatt. Ez az mhg_{xz} erő abból adódik, hogy a torziós inga alsó tömege h-val lejjebb van, és az inga karját északi irányban mozdítja ki. Ha az m tömeg kicserélése után csak egy kicsit is megváltozik ez az erő, a tapasztalt hatás hamisan úgy értelmezhető, hogy – a *2. ábrához* hasonlóan – nem teljesül a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciája.

nyi tömegre ható gravitációs erő g_x, g_y vízszintes összetevőinek változása lényeges, mert ezek okozhatnak olyan nyomatékot, ami az inga karjának elcsavarodását eredményezi. A kelet–nyugati irányban álló ingarúd elcsavarodását viszont csak az északi vagy déli irányba mutató g_x összetevő változása okozhatja. A g_x összetevő a térben akár x, akár y, akár z irányban megváltozhat. Azonban csak a lejjebb levő tömeg esetében tapasztalható z irányú és első közelítésben az $mg_x(z) = mg_{xz}z$ lineáris összefüggéssel leírható gravitációserő-változás okozhat nyomatékkülönbséget a keleti és nyugati helyzetben álló ingarúdra.

Beláttuk tehát, hogy az ingakar v_2 szögelfordulása a gravitációs erő magasság szerinti megváltozása miatt

$$v_2 = -\frac{2}{\tau}\, m\, l\, h\, g_{xz}, \qquad (2)$$

ahol h az Eötvös-inga lejjebb levő tömegének távolsága az inga karjától, g_{xz} pedig a g_x összetevő magassági gradiense, azaz magasságfüggő változásának mértéke. Ez a tapasztalt elfordulásból akár ki is számítható. Egyébként Eötvös torziós ingáját eredetileg éppen az ilyen gradiensek mérésére fejlesztette ki. (Itt jegyezzük meg, hogy az említett mA árapálykeltő erők gradiense igen kicsi, mivel – a Földhöz képest – ezen tömegek az ingától igen távol vannak. Ezért ezen erők nem okoznak a torziós ingával észlelhető nyomatékot.)

A (2) formula két lényeges szempontra világít rá. Mivel a (2) egyenlettel kifejezett gradienshatás nagyságrendekkel nagyobb lehet a gravitációs és tehetetlen tömeg eltéréséből várható hatásnál, ezért az inga alsó tömegének cseréje után, illetve a mérés közben is nagy pontossággal biztosítani kell a torziós szál τ csavarási állandója, a próbatest m tömege, az l fél karhossz, valamint a h függőleges távolság állandóságát, vagy pontosan kell ismerni ezeket. Minden ilyen változás meghamisíthatja a mérés eredményét, mivel az (1) összefüggés miatt az alsó tömeg cseréje után a v elfordulás értékében tapasztalt változás értelmezhető lenne úgy is, mint a gravitációs és tehetetlen tömegek különbözősége. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy az alsó tömeg cseréje előtt és után gondosan meg kell mérni az értékeket, és az esetleges kis eltéréseket az eredményekben korrekcióba kell venni.

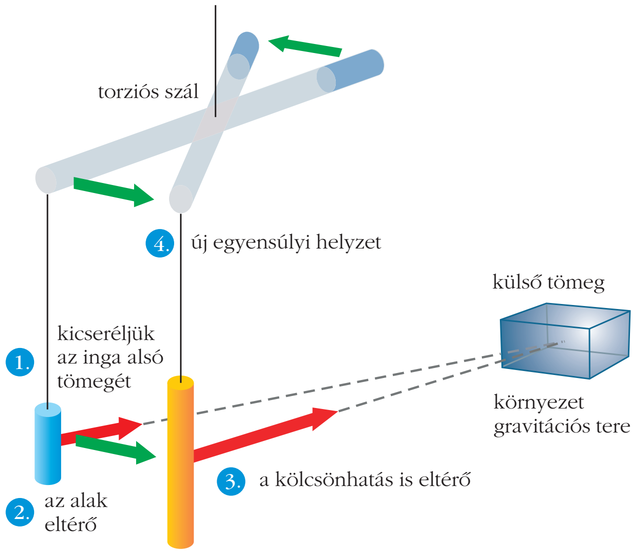
Eötvös és munkatársai egy ügyes ötlettel kihasználták azt a tényt, hogy az észak–déli irányban álló ingarúdra nincs anyagi különbség miatt fellépő forgató hatás, viszont van gradienshatás, amelyből számítható w ingakar-elfordulás a (2)-hez teljesen hasonló

$$w = \frac{2}{\tau}\, m\, l\, h\, g_{yz} \qquad (3)$$

összefüggéssel írható le, csak most az mg_y erőösszetevő $mg_y(z) = mg_{yz}z$ magasságtól függő változása számít. Megjegyezzük, hogy a (2) és (3) egyenletek jobb oldalainak előjele azért különbözik egymástól, mert a pozitív értelmű mg_x és mg_y erők forgató hatása egymással ellentétes irányú.

Ötletük lényege az, hogy v/w hányados már nem tartalmazza a kritikus τ paramétert, ami a mérés során változhat, viszont e hányados – alsó tömeg kicserélése utáni – megváltozásából a keresett η továbbra is kiszámítható. Ez azért van így, mert a v/w hányadosban szereplő v, vagyis a kelet–nyugati irányban álló ingakar teljes elfordulása kétfajta erő hatását tükrözi. Egyrészt a gravitációs és tehetetlen tömeg eltérése miatti $\eta mG\sin\varepsilon$ erőét (*2. ábra*), amely miatt v_1 elfordulás adódik. Másrészt a gravitációs erő megváltozása miatti mhg_{xz} erő hatását (*3. ábra*), amely miatt v_2 elfordulás keletkezik. A teljes v/w hányados tehát $(v_1+v_2)/w$. Amennyiben a tömeg kicserélése után nem változott meg sem az mhg_{xz}, sem az mhg_{yz} erő, akkor v_2 és w értéke azonos marad, tehát a hányados változása valóban csak a v_1 változását, vagyis az anyagi minőségi tényező változását tükrözi. Ez volt Eötvösék 2. módszere.

Most lássuk a másik lényeges szempontot. A (2) formulából az is látható, hogy a g_{xz} gradiens megváltozása a kísérlet során befolyásolja, így akár meg is hamisíthatja a kapott eredményt. Ezért Eötvösék úgy javítottak ezen (a legjobb, általuk 3. módszernek nevezett változatban), hogy a g_{xz} gradiens megváltozása se hasson a kísérlet eredményére. Ezt úgy érték el, hogy egy kettős torziós ingával szimultán észleltek a kétfajta tömeggel. Így a g_{xz} esetleges időbeli változása azonos mértékben hatott a két tömegre: az elcsavarodások, pontosabban a v/w hányadosok különbségéből



4. ábra. Az Eötvös-kísérletben az inga alsó tömege különböző anyagú próbatestekre lett kicserélve. A próbatest alakjának változása miatt megváltozott a külső tömegek okozta gravitációs kölcsönhatási erő. Ezért az inga szükségszerűen új egyensúlyi helyzetbe került még akkor is, ha az ekvivalenciaelv sem sérült és a külső tömegek sem változtak meg.

a hatás kiesett. A két inga között felcserélték a tömegeket, és megismételték a szimultán mérést. Ezzel elérték, hogy a két inga kis mértékben eltérő paraméterei és beállítása ne befolyásolják a végeredményt.

Az EPF-mérés szabályos hibája

A (2) összefüggés mind pontszerű m tömegre, mind pedig az EPF-kísérletben alkalmazott homogén sűrűségű henger alakú próbatestekre érvényes abban az esetben, ha az l és h hosszúságok a próbatest tömegközéppontjára vonatkoznak. Az utóbbiról integrálással magunk is könnyen meggyőződhetünk.

Mi van azonban akkor, ha a g_x változása nem teljesen egyenletes, vagyis a $g_x(z) = g_{xz}z$ összefüggés nem teljesen pontosan írja le ezt a magasságfüggő változást? A következő lehetőség ezt a változást a $g_x(z) = g_{xz}z + g_{xzz}z^2$ *másodfokú* képlettel közelíteni. Például egy henger alakú próbatestre (ilyeneket használtak Eötvösék a kísérlet során) a teljes erőhatást az így módosított $g_x(z)$ függvény z szerinti integrálásával lehet meghatározni. Ezért a (2) képlet az alábbiak szerint módosul

$$v_2 = -\frac{2}{\tau}\int_{z_1}^{z_2} m_z\, l\, g_x(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4}$$

ahol z_1, z_2 a próbatest felső és alsó határoló lapjának magasságát jelöli és m_z az elemi keresztmetszet tömege. Az integrálás könnyen elvégezhető és $H = z_2 - z_1$ magasságú próbatestre az eredmény

$$v_2 = -\frac{2}{\tau}\, m\, l\left(h\, g_{xz} + \left[h^2 + \frac{H^2}{12}\right] g_{xzz}\right). \tag{5}$$

Ez a formula mutatja meg azt, hogy nem teljesen egyenletesen változó $m g_x$ gravitációs erő esetén az EPF-kísérletben szabályos hiba fog fellépni. Miért? Azért, mert a fellépő nyomaték és ezért a v_2 elfordulás függ a felhasznált próbatest H magasságától is. Az eredeti EPF-kísérletben éppen ez volt a helyzet. A felhasznált próbatestek H magasságai lényegesen eltérők voltak (*4. ábra*). Például a platinahenger magassága 6 cm, a magnálium (Mg-Al ötvözet) hengeré 11,9 cm, a kígyófából készült hengeré pedig 24 cm volt. (Megemlítjük, hogy a részletes levezetés szerint az (5) összefüggés csak vékony hengerek esetében érvényes, a pontosabb összefüggésben a henger R sugarától is függő $H^2/12 - R^2/4$ kifejezés szerepel, de a lényegen ez nem változtat.)

Az (1) és (5) képletekből látható, hogy ha az alsó tömeg kicserélése után a próbatest H magassága H' értékűre változik, akkor emiatt

$$\eta = -\frac{g_{xzz}}{12\, G \sin\varepsilon}\left(H^2 - H'^2\right) \tag{6}$$

nem zérus anyagi tényező adódik, vagyis *az ekvivalenciaelv látszólag sérül.*

Mekkora ez a szabályos hiba? A (6) összefüggés szerint egyenesen arányos g_{xzz} értékével. Ez, mint láttuk a g_x gyorsulás magasság szerinti nemlineáris változásának mértékére utal. Minél nagyobb g_{xzz}, annál erősebb a nemlinearitás mértéke. Tapasztalataink szerint g_x változása leginkább a nagy sűrűségkülönbségű határfelületek közelében erősen nemlineáris, vagyis g_{xz} nem tekinthető állandónak [4]. Akár kisebb tömegek is okozhatnak viszonylag erős nemlinearitást, ha közel vannak a próbatömegekhez. Az eredeti kísérleti mérések helyszínén, a mérésekhez használt torziós ingák közelében található tömegeket, azok nagyságát, elrendezését sajnos egyáltalán nem ismerjük, így ez a hatás utólag pontosan már nem számszerűsíthető. Sem a kísérletről készült rajzok, sem az eredeti mérési jegyzőkönyvek nincsenek meg, amelyek tisztázhatnák ezt a kérdést.

Így csak találgathatunk, hogy az eredeti EPF-kísérlet végeredményét vajon ez a hatás milyen mértékben befolyásolhatta. Annyit azért elmondhatunk, hogy mérések és modellszámítások szerint falak, padló, nagyobb tömegek közelében a g_{xzz} akár a 0,5–3 nGal/cm^2 értéket is elérheti. Ennélfogva a kísérlet eredményében jelentkező hatás – az erőtértől és a hengerek alakjától függően – zérustól egészen a $8\cdot10^{-8}$ értékig terjedő tág tartományban változhat. Azt azonban megállapíthatjuk, hogy az EPF-kísérlet eredményeit, az Eötvösék által kiszámított $\eta = \pm1\text{–}6\cdot10^{-9}$ értékeket [1] ez a szabályos hiba elérheti, sőt kedvezőtlen esetben meg is haladhatja.

Az ekvivalenciakísérlet megismétlése tehát nem csak azért indokolt, mert további szempontokat adhat a *Fischbach* és munkatársai [3] által az EPF-kísérletben talált kötési energiától függő szabályos eltérés okára. Azért is fontos ellenőrzött körülmények között és jól dokumentált módon megismételni a kísérletet, mert láttuk, hogy a próbatestek alakjától függően jelentkező szabályos hatás mennyire befolyásolhatja a mérés eredményét. A jó hír az, hogy a most ismertetett szabályos hiba viszonylag könnyen kézben tartható a próbatestek alakjának megfelelő megválasztásával. Ha csak olyan henger alakú próbatömegeket használunk a kísérletben, amelyek esetében a $H^2/12 - R^2/4$ értéke állandó, akkor – mint láttuk – ez a szabályos hiba, függetlenül a gravitációs erőtér szerkezetétől, nem lép föl.

Összefoglalás

Az ekvivalenciakísérlet szabályos hibája, ahogy láttuk, abból adódik, hogy a próbatest méretével összevethető távolságon a gravitációs erő megváltozása már nem tekinthető egyenletesnek, így számít a próbatestek alakja is. Eötvösék eredeti ekvivalenciakísérlete annyira érzékeny volt, hogy már egy ilyen kicsiny, másodrendű gravitációs hatás is megjelenhetett az eredményekben, amire ők akkor nem gondoltak. Az ekvivalenciakísérlet megismétlése modern körülmények között – elképzelésünk szerint – segíthet megérteni azokat az okokat, amelyek az Eötvös–Pekár–Fekete-kísérletben felhasznált anyagok kötési energiájától függő szabályos eltéréseihez vezettek, illetve a megismételt kísérlet már mentes lehet a próbatestek alakjától és a gravitációs tér szerkezetétől függő, a jelen cikkben tárgyalt szabályos hibától. Az érdeklődő olvasó további részleteket találhat az [5] cikkben.

Irodalom

1. Eötvös R., Pekár D., Fekete E.: Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen d. Physik 373/9* (1922) 11–66.
2. Péter G., Deák L., Gróf Gy., Kiss B., Szondy Gy., Tóth Gy., Ván P., Völgyesi L.: Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciaelv-mérések megismétlése. *Fizikai Szemle 69/4* (2019) 111–116.
3. Király P.: A 100 éves Eötvös–Pekár–Fekete kísérletek és máig tartó hatásuk. *Fizikai Szemle 57/1* (2007) 1–6.
4. Völgyesi L., Ultman Z.: A nehézségi gradiensek linearitás vizsgálata a Mátyás-barlangban. *Geomatikai Közlemények XIII/2* (2010) 123–128.
5. Tóth Gy.: Explanation of the EPF experiment in terms of gravity gradients. *arXiv* (2018) https://arxiv.org/abs/1803.04720