# BETEGES KERTECSKE

Lendvai Dorottya
Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
Czövek Márton
BME VIK, Graphisoft SE
Forrás Bence
ELTE TTK, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Az alábbi írást *Néda Zoltán,*[1] az ELTE TTK Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása Program[2] keretében *Kooperatív jelenségek és interdiszciplináris vonások* címmel tartott előadássorozatához kapcsolódó projektfeladat alapján készítettük. *Czövek Márton* és *Forrás Bence* – a projekt idején a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium végzős diákjai – készítették a témához kapcsolódó szimulációs programot, valamint a részletek pontos kidolgozásában is aktívan részt vettek.

Projektünk alapját egy, 1986 decemberében, a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban* megjelent feladat[3] adta: „Képzeljünk el egy gyümölcsöskertet, amelyben a fák szabályos négyzetrácsban helyezkednek el. Ha egy betegség valamelyik fánál felüti fejét, akkor az átterjedhet a szomszédos fákra. Az átterjedés véletlenszerű és $p$ valószínűséggel következik be. Ez a $p$ függ a fák egymástól mért távolságától: minél közelebb vannak egymáshoz a fák, annál valószínűbb, hogy a fertőzés átterjed. Hogyan lehet a fákat elég közel ültetni egymáshoz, hogy sok gyümölcsfánk legyen és ugyanakkor elkerülni, hogy az egész kertre kiterjedő járványok keletkezzenek?”

Külön köszönet Néda Zoltánnak a probléma részletesebb kidolgozása során tett javaslatait, kritikai észrevételeit és minden további segítségét, amelynek köszönhetően a modell tárgyalása a jelenlegi formát ölthette.

*Lendvai Dorottya,* a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium matematika-fizika szakos tanára, 2009-ben végzett az ELTE-n. Jelenleg az ELTE Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása Program PhD hallgatója.

*Czövek Márton* programozó a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium 2014-ben érettségizett, egykori speciális matematika tagozatos tanulója. Jelenleg a BME Irányítástechnika és Informatika Tanszéken végzi mesterképzését Vizuális Informatika szakirányon. Számos szimulációs programot készített különböző projektek keretében, többek között 2018-ban a BSc szakdolgozatát is kiterjedt vízfelületek hatékony és élethű szimulációjából írta *Szécsi László* témavezetésével.

## A feladat pontosítása

Képzeljünk el egy $L \times L$-es, négyzet alapterületű gyümölcsöskertet, amelyben egy $n \times n$-es négyzetháló rácspontjaiban, az egész területen egyenletesen gyümölcsfák helyezkednek el. Gyümölcsöskertünkben járvány tör ki. Kezdetben a gyümölcsfák $p_0$ valószínűséggel betegek. Ha egy betegség valamelyik fánál felüti fejét, akkor az átterjedhet a kertben lévő többi fára. Az átterjedés véletlenszerű, és minden beteg fa $p_i$ valószínűséggel terjeszti a betegséget, ahol $i$ az $i$-edik beteg fát jelöli. Ennek értéke (a legegyszerűbb esetet véve) lineárisan változik az adott beteg fától való távolság függvényében. Minél közelebb vannak egymáshoz a fák, annál valószínűbb, hogy a fertőzés átterjed. Ha egy egészséges fa az adott napon bármely beteg fa által megfertőződik, akkor elkapja a betegséget és a következő naptól kezdve további fákat betegíthet meg. Egy fa az adott napon esetleg több fa által is megfertőződhet, de ennek nincs jelentősége. Továbbá tegyük fel, hogy minden egyes megbetegedett fa a megbetegedést követő minden további, de legfeljebb $x$ napon át, adott $z$ valószínűséggel meg is gyógyulhat. Ennek oka lehet valamiféle emberi beavatkozás (például permetezés), földrajzi vagy időjárási körülmények (nyári zápor, jégeső, szélvihar), spontán gyógyulás stb. Ha egy fa ezen $x$ nap alatt meggyógyul, akkor egyben immunissá is válik a fertőzéssel

[1] http://www.phys.ubbcluj.ro/~zneda/
Néda Z., Boda Sz., Káptalan E.: Rend a rendezetlenségből, játék metronomokkal. *Természet Világa* (2013) II. különszám – Káosz, Környezet, Komplexitás.
Néda Z., Káptalan E.: A sokaság ritmusa. *Fizikai Szemle 59/9* (2009) 301–305.

[2] http://csodafizika.hu/fiztan/

[3] Kertész János: A rendezetlen kapcsolatok fizikája – A perkolációs modell. *Középiskolai Matematikai Lapok – Fizika Rovattal 36/10* (1986. december) 465–469.

*Forrás Bence,* a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium 2014-ben érettségizett, a speciális matematikatagozat tanulója volt. 2017-ben az ELTE matematika alapszakán szerzett BSc diplomát matematikus szakirányon. Jelenleg a bonni Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität matematikus mesterszakos hallgatója.

szemben, tehát a betegséget nem kaphatja el ismét. Ha egy megbetegedett fa $x$ nap alatt nem tudott meggyógyulni, akkor sajnos menthetetlen lesz, elpusztul és nem terem gyümölcsöt.

Vizsgálatunk tárgya a betegség elterjedése lesz bizonyos paraméterek függvényében. A megvizsgálandó kérdésünk pedig az, hogy legfeljebb hány fát érdemes elültetni az adott területre, vagyis egymáshoz mennyire közel lehetnek ezen fák anélkül, hogy egy járvány túlságosan könnyen elterjedjen a kertben? A járványelterjedés mértékének jellemzésére szolgál majd a $q$-val jelölt *rendparaméter* (amit a későbbiekben részletesen fogunk tárgyalni).

A számunkra érdekes – az eredeti feladat szövegezésében szereplő kérdést egy lehetséges módon számszerűsítő – rendparaméter megfelelő vizsgálatához szükség van egy – az eredeti *KöMaL* feladatban nem említett – gyógyulási mechanizmus beépítésére. Enélkül ugyanis csak idő kérdése, hogy mikorra betegszik meg, majd pusztul el a kert összes fája. A feladat végiggondolása, kidolgozása, valamint a hozzá készült program készítése közben sok probléma, ötlet, észrevétel felmerült. Ezek többségét sorra implementáltuk a programba.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy ez egy „egyszerűsített” modell, aminek legfőbb érdekessége – amellett, hogy középiskolás diákokat mozgató újszerű fizikafeladat –, hogy „szép” eredményre vezet, amit viszont előre egyikünk sem tudhatott, csak nagyon „halkan” remélt. Mivel azonban a probléma túl bonyolult ahhoz, hogy analitikusan tanulmányozzuk, ezért Monte-Carlo-típusú számítógépes szimulációt tekintünk a továbbiakban.

## Paraméterek és kezdeti értékek

*Méretek, sűrűségi jellemzők:*

$L$ = 1 egység – a négyzet alapterületű kert oldalélének hossza.

$n$ az egy sorban/oszlopban levő gyümölcsfák száma, ahol $n \in [n_{\min}; n_{\max}]$.

$n_{\min} = 1$, $n_{\max} = 20$.

Tehát valójában $n/L$ (= $n$) – a fák (lineáris) sűrűségét jellemzi a kertben.

*Betegségterjedés / gyógyulási jellemzők:*

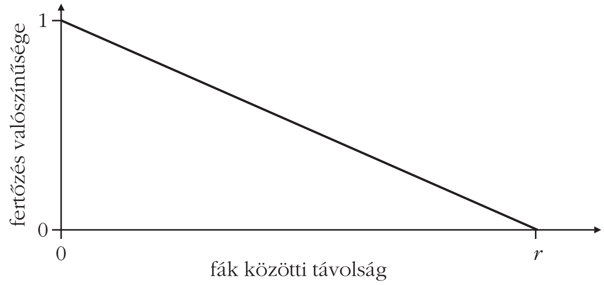
$p_0$ = 0,025, azaz 2,5% – kezdeti fertőzöttség valószínűsége.

$p_i(r_i)$ – az adott (még) egészséges fára vonatkozó fertőzéselkapás valószínűsége az $i$-edik beteg fától, ha az egészséges fa attól $r_i$ távolságban helyezkedik el.

A fertőzés valószínűségének távolságtól való lineáris függését az alábbi módon definiáljuk:

$$p_i(r_i) = -\frac{1}{r} r_i + 1,$$

ahol $r_i \in (0, r]$, $r$ = 0,1 egység – a betegség (egy adott megfertőzött fától származó) terjedésének hatósugara (*1. ábra*).




*1. ábra.* A fertőzés valószínűségének lineáris függése a távolságtól.

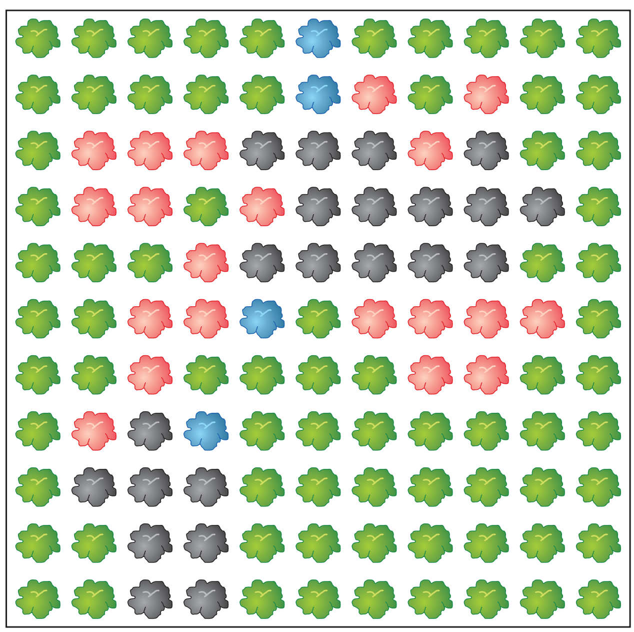
Tehát valójában az $r/L$ (= $r$) – dimenziótlanított paraméter megadja, hogy a betegség egy adott fertőzött fától kiindulva, a kert méretéhez viszonyítva milyen messzire terjedhet. Ezt a valószínűséget minden lépésben (minden egyes nap) az összes beteg-egészséges fapárosra meg kell vizsgálni egészen addig, amíg az egészséges fáink sorsa bizonyossá nem válik.

$z$ = 0,01, azaz 1% – a megbetegedett fák napi gyógyulási valószínűsége (amennyiben egy fa meggyógyul, immunissá válik a betegségre, nem betegszik meg újra és nem is fertőz).

$x$ = 7 nap = 1 hét – a beteg fák meggyógyulási lehetőségének napszáma ($x$ nap betegséget követően a fa elpusztul, a továbbiakban sem meggyógyulni, sem újra fertőzni nem tud).

A fák sorsát meghatározó néhány esemény lefolyásának menetét önkényesen, ám realisztikusan próbáltuk megválasztani (például: lineáris betegségterjedés, gyógyulási valószínűség stb.). A modellhez készült – a későbbiekben részletesen tárgyalt – szimulációs programban [1] felsorolt paraméterek ($L$ értékének kivételével, ami a távolságegységet szabja meg) mind változtathatók. A program vizuális megjelenítést és egy grafikus elemzést is tartalmaz. A szimuláció adott

*2. ábra.* Szimuláció: egy lehetséges állapot, $n$ = 11 esetén a 22. napon. (Kezdeti értékek: $p_0$ = 0,025; $r/L$ = 0,1; $z$ = 0,01; $x$ = 7 nap.)



(beállítható) kezdeti feltételek mellett, tetszőleges $n$ értékre „napról napra” időben változó ábrán mutatja meg a betegség terjedésének részleteit. A fák állapotát különböző színekkel jelöltük: zöld – egészséges, piros – beteg, kék – immunis, valamint fekete – elpusztult fa (*2. ábra*).

Ez egy sokparaméteres modell, amelyek közül a konkrét vizsgálathoz (a fentiek alapján) többet rögzítettünk és a továbbiakban csak néhány paraméter függvényében tanulmányozzuk a rendszer viselkedését. A változókat mindössze két vizsgálandó paraméterre szűkítettük le: először a betegségterjedést csak a fák $n$ sűrűségének függvényében vizsgáljuk egy kétdimenziós $q$–$n$ grafikont szerkesztve, majd a napi gyógyulás $z$ valószínűségével együtt egy háromdimenziós $q$–$n$–$z$ ábrát is készítünk. A korábban megadott kezdeti (a szimulációban alapbeállítási) értékeket – a futtatás során tapasztalt észrevételek alapján – egy konkrét eset vizsgálatához választottuk ki. A „szép”, valamint nem szélsőséges eredményekhez viszonylag nagy tartományból válogathatjuk a $p_0$, $z$, $x$, $r$ (= $r/L$) értékeket. A program megfelelő működéséhez, valamint az eredményeket demonstráló ábrák elkészítéséhez szükséges „munkamennyiséget” tapasztalati úton választottuk meg: a grafikonok jellegében már sem lényegi változást, sem felesleges időkiesést nem okozva állítottuk be az iterációk, illetve lépésközök számát.

## A vizsgált kérdés
(különböző megfogalmazásokban)

Mekkora területen (terjedelemben) fut végig a vírus a rendszeren (kerten)?

Legfeljebb milyen „sűrűn” ($n$/L = $n$) helyezhetők el a fák a kertünkben úgy, hogy benne (a fertőzés következtében) a betegség ne terjedjen el „túlságosan”?

Egy hasonló paraméterekkel leírható vírus terjedése során, a fák sűrűségének függvényében a gyümölcsöskert hányad része válik gazdaságilag hasztalanná?

Ennek vizsgálatához ábrázoljuk a $q$ rendparamétert az $n$ függvényében!

## Mi is az a rendparaméter?

A rendparaméter fogalmát eredetileg a másodrendű (rend-rendezetlenségi) fázisátalakulások esetén a rendezett fázisban való rend mértékének jellemzésére vezették be (mint például a ferromágnesség elvesztése a Curie-pont körül, ugyanis a makroszkopikus rendezettség, például a mágnesezettség, a hőmérséklet emelkedésével megszűnhet) [2]. Később ezt a fogalmat kiterjesztették nemegyensúlyi folyamatokra is, ahol a rendparaméter nagy értéke mindig valamilyen koherens viselkedésre utal [3].

Esetünkben a $q$ rendparaméter értéke azt adja meg, hogy a fertőzés lefutásának végére a fák hányad része pusztult el a járványban:

$$q = \frac{\text{elhalt fák száma}}{\text{összes fa száma}} = \frac{\text{fekete}}{\text{fekete + kék + zöld}},$$

ahol $q \in [0; 1]$.

A feladat jelenlegi megfogalmazása mellett minden esetben beáll egy végállapot, hiszen a fertőzés terjedése addig tart, amíg beteg fáink el nem pusztulnak, vagy meg nem gyógyulnak (tehát, amíg a piros fák el nem fogynak), ezek valamelyike pedig a gyógyulási idő véges volta miatt mindenképpen bekövetkezik. Ekkorra minden fa sorsa egyértelműen determinálttá válik: egészséges maradt (zöld), kigyógyult (immunis kék fa), vagy belepusztult (fekete) a járványba. Ilyenkor a betegséget nincs, ami tovább terjessze, és a továbbiakban nincs is kinek meggyógyulnia/elpusztulnia.

Adott kezdeti feltételek mellett a fák sűrűségét (azaz $n$ értékét) változtatva megnézzük minden egyes (érdemi) esetben, hogy a betegség miként terjed el a kertben. (Érdemi eseten azt értjük, hogy a fák számát egy bizonyos ponton túl nincs értelme növelni, mivel túl nagy sűrűség esetén a járvány gyors terjedése miatt egészen biztos, hogy „mindenki” nagyon hamar megbetegszik és $q$ értéke maximálissá válik: $q \approx 1$.)

## A keresett jelenség

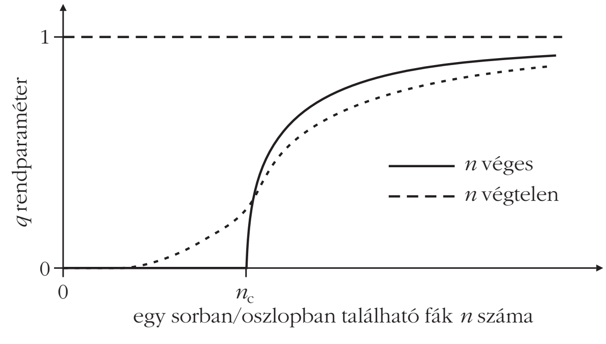
Vajon létezik-e olyan $n_c$ kritikus („fasűrűség”) érték, amelynél kisebb $n$ (kevesebb fa) esetén a $q$ rendparaméter értéke zérushoz közeli, azonban nagyobb $n$ értékekre (több fa) a $q$ rendparaméter értéke drasztikusan megnő? (Ferromágneses anyagokban a Curie-hőmérsékleten bekövetkező ferro-para mágneses fázisátalakuláshoz hasonló átmenetet keresünk.)

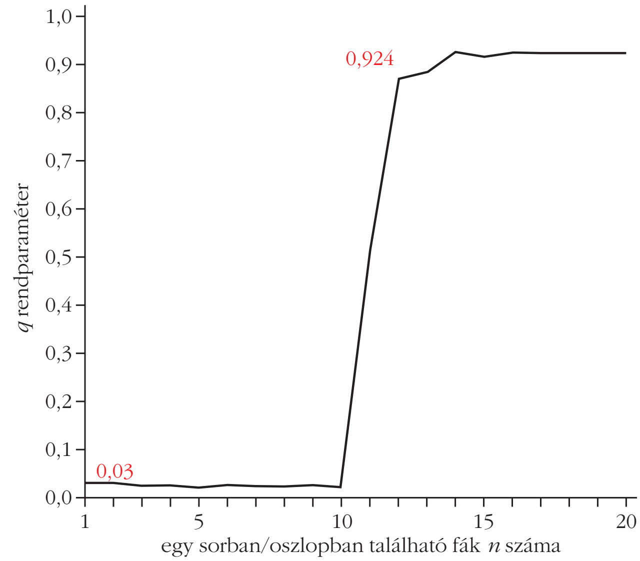
Összefoglalva (*3. ábra*):

- ha $n \ll n_c \Rightarrow q \to 0$?
- ha $n \gg n_c \Rightarrow q \to 1$?

Az „elvárás” logikus lehet, hiszen minél több fa van az adott kertben (minél sűrűbben helyezkednek el), a fák annál közelebb vannak egymáshoz és az átterjedés valószínűsége annál nagyobb, míg kevés fa esetén éppen ellenkezőleg történik. (A gyógyulási mechanizmus minden esetben minden egyes fára különkülön azonos valószínűségű.) Vizsgáljuk először a $q$ rendparamétert az $n$ függvényében!

*3. ábra.* A keresett átmenet: a $q$ rendparaméter ábrázolása az egy sorban/oszlopban található fák $n$ számának függvényében.






*4. ábra.* A $q$ rendparaméter az adott területen lévő fák sűrűségét jellemző $n$ értékének függvényében. (Kezdeti értékek: $p_0$ = 0,025; $x$ = 7; $z$ = 0,01; $r/L$ = 0,1; $n \in$ [1; 20]; $q \in$ [0; 1], pontosság: 100 futtatás.)

## A kapott eredmények

A *TreeDisease* program (és annak forráskódja) letölthető a [1] weboldalról. A program egy Java alkalmazás (Java Runtime Environment[4]) segítségével futtatható. A szimuláció egy kiértékelő programrészt is tartalmaz, amely a szükséges grafikont is elkészíti: ábrázolja $q$ rendparaméter értékét minden egyes $n \in$ [1; $n_{max}$] fasűrűségre úgy, hogy minden esetet $f$ = 100-szor futtat le, és a rendparaméterekre kapott értékek átlagát ábrázolja a futtatások átlagaként (*4. ábra*). Tapasztalataink szerint nagyobb pontosság (több futtatás) esetén a grafikon alakjában lényegi változás már nem történik.

A „sejtés” valósnak bizonyult: valóban úgy tűnik, hogy létezik olyan $n_c$ kritikus fasűrűség, amely alatt a kert elenyésző része lesz beteg, és amely felett a betegségarány nagyon hirtelen 1-hez közeli értéket vesz fel. Kis $n$-ekre, amikor a fák elég távol helyezkednek el egymástól, a kert meggyógyul (vagy meg sem betegedik); nagy $n$-ekre, amikor a fák távolsága csökken, a járvány terjedésének valószínűsége nő, és a kertünk faállománya odavész. A köztes helyzetekben, a kritikus $n_c$ érték körül változatosabb az eloszlás. A vizsgált paraméterekre $n_c \approx 11 \pm 1$ körül van.

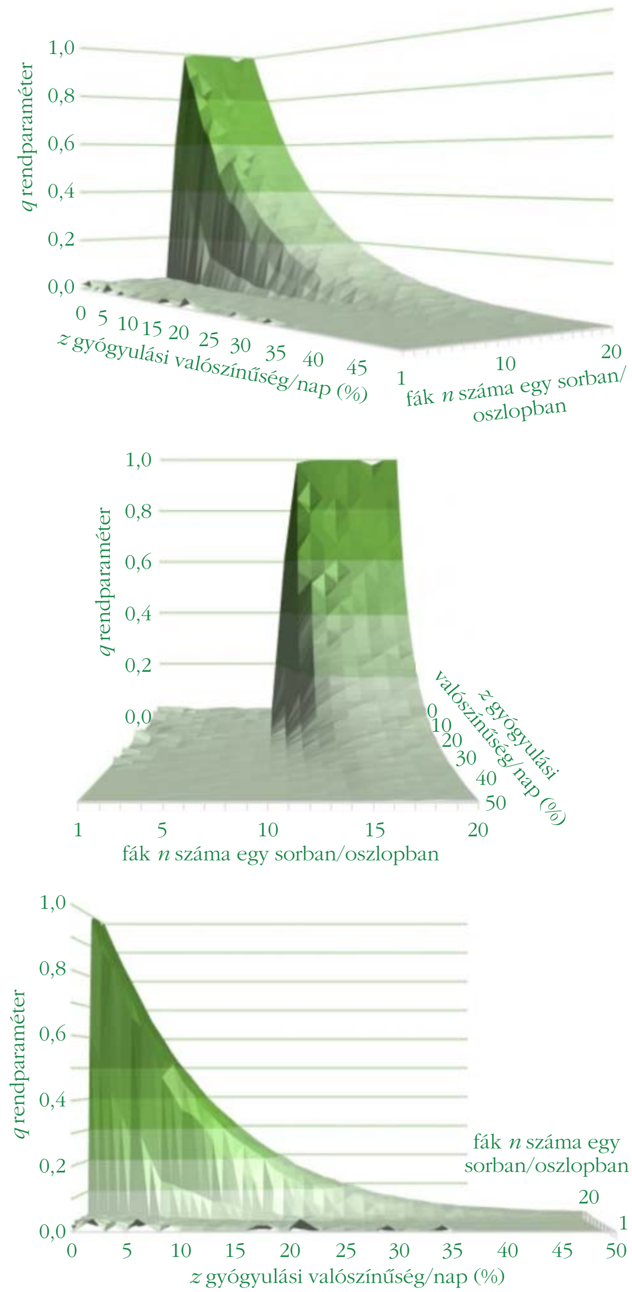
*Megjegyzés:* további vizsgálatot igényelne az $n_c$ kritikus pont körüli viselkedés, a $q \approx 1$-hez tartó relaxáció hossza. Ez nálunk egy nem túl széles tartomány (2–3 fa/sor), amely a paraméterek állításával nagyon kicsit lesz szélesebb-keskenyebb, azonban általánosságban is elmondható, hogy ***a függvények alakja*** (a szélsőséges esetektől eltekintve) úgy tűnik, ***lényegében nem különbözik egymástól.***

[4] https://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/jre8-downloads-2133155.html?fbclid=IwAR2xEC7nGYjX-7IkNYcg5wyZUhBaPI6lBwMJZMMOIaGq2X_0WO-gIOeilvo

## Kritikus viselkedés a *z*–*n* paramétertérben

A programból extra funkcióként kinyerhetők az adatok egy 3D-s grafikon elkészítéséhez is („Export 3D” gomb), ahol nem csak $n$, hanem a $z$ gyógyulási paraméter függvényében is megvizsgáljuk a rendparaméter változását. A megnövekedett dimenzió a program számolási igényeit megsokszorozza és akár több percig is eltarthat, ameddig a szerkesztéshez szükséges megfelelően átlagolt rendparaméter értékét megkapjuk, amely egy Jegyzettömbben vagy Excel táblázatban megnyitható. A vizsgálatához a kinyert adatokból ábrázolhatjuk a $q$ rendparamétert a ko-

*5. ábra.* A rendparaméter vizsgálata a fák sűrűsége és a gyógyulási valószínűség függvényében különböző perspektívákból. (Az adatsorhoz beállított értékek: $n \in$ [1; 20]; $z \in$ [0; 0,5] 0,01 lépésközzel, $p_0$ = 0,025; $x$ = 7; $r/L$ = 0,1; pontosság: 50 futtatás.)



rábban megadott kezdőfeltételek mellett minden $z \in [0; 0,5]$ esetén 0,02 lépésközökkel az $n \in [1; 20]$, $n$ egész szám függvényében egy háromdimenziós ábrán, minden pont esetén $f$ = 20 futtatás átlagából. Ezen átlagolás elégségesnek bizonyult ahhoz, hogy aránylag kis fluktuációk legyenek és a futtatási idő se legyen feleslegesen nagy. A 3D grafikon elkészítése már nincs beépítve a Java programba, ehhez például az Excel „háromdimenziós felület” diagram funkcióját ajánljuk.

Az *5. ábrán* különböző nézetekből is bemutatjuk (az említettnél egy kicsivel jobb felbontási/futtatási adatokból) a rendparaméter változását a $z$–$n$ térben. Nem meglepő ugyan, mégis észrevehető és egyben „szép” eredmény, hogy a $q$ rendparaméter a $z$ gyógyulási valószínűség függvényében exponenciálisan csökkenő jelleget mutat.

## A programból kinyerhető egyéb információk

A szimuláció futása közben a program folyamatosan kiírja, hogy az adott napon mekkora a beteg fák aránya (százalékban kifejezve), valamint az addig eltelt napok közül megadja mikor és mekkora részben volt a csúcson a vizsgált populációban a fertőződési arány. Ezekből az értékekből a betegség terjedési mechanizmusára is lehet következtetni.

Az $x$ gyógyulási időkeret véges volta miatt $q$ értéke nagy fasűrűség esetén nem 1-hez tart, azonban tény, hogy minden esetben van valamekkora $q_{max}$ maximuma. A kezdeti feltételeinkkel ez valóban 1-hez közeli (90% feletti). Hasonlóan a $q_{min}$ minimumérték – a $p_0$ kezdeti betegségarány és a véges gyógyulási valószínűség következtében – sem 0-hoz tart, a kezdeti feltételeinkkel ennek értéke valóban 0 közeli (5% alatti). (A programban készült grafikonokon ezeket az adatokat a függőleges skála melletti piros értékek jelzik.) Ezen értékeknek is van valamekkora szórása, így például néha előfordul a $q_{min}$ = 0 is. A következő fejezetben ezeket matematikai úton is pontosan kiszámítjuk, amivel a program helyes működését is „igazoljuk”.

## Középiskolásokkal is kiszámítható információk

Az alább kiszámolt értékeket a korábban megadott paraméterek behelyettesítésével kapjuk.

1. Egy frissen megfertőzött fa elpusztulásának (fekete) valószínűsége:

$$P_{\text{fekete}} = (1-z)^x \approx 0{,}932, \text{ azaz } 93{,}2\%.$$

2. Egy frissen megfertőzött fa gyógyulásának (kék) valószínűsége:

$$P_{\text{kék}} = 1 - P_{\text{fekete}} = 1-(1-z)^x \approx 0{,}068, \text{ azaz } 6{,}8\%.$$

3. A rendparaméter minimumértékének $E(q_{min})$ várható értéke:

Az $n$ = 1 határesetben az egyetlen fa kezdetben $p_0$ valószínűséggel beteg. (Ekkor a betegség nincs „hová” terjedjen, nincs kit megfertőzni / nincs ki megfertőzze. Nagyobb $n$ érték esetén a fertőzés terjeszthetőségének lehetőségével csak ronthatunk a rendparaméter minimumán.)

a) Annak valószínűsége, hogy az egyetlen fa egészséges: $(1-p_0)$. Ha az egyetlen fa nem beteg, akkor nem is lesz az, ilyenkor rendparaméterünk 0.

b) Annak valószínűsége, hogy az egyetlen fa beteg: $p_0$. Ha az egyetlen fa beteg, akkor

i. $1-(1-z)^x$ valószínűséggel meggyógyul, és ekkor rendparaméterünk ismét 0 lesz,

ii. $(1-z)^x$ valószínűséggel elpusztul és ilyenkor a rendparaméter értéke 1.

Ezek alapján:

$$E(q_{\text{min}}) = 0\cdot(1-p_0) + 0\cdot p_0\left[1-(1-z)^x\right] + 1\cdot p_0(1-z)^x =$$
$$= p_0\,(1-z)^x \approx 0{,}023, \text{ azaz } 2{,}33\%.$$

4. A rendparaméter maximumának $E(q_{max})$ várható értéke:

Határesetben $n \to \infty$, ilyenkor annyira közel vannak egymáshoz a fák, hogy lényegében az összes fa megfertőződik (nem lesz egészséges/zöld fánk). Ilyenkor a végállapotban csak elpusztult/fekete vagy immunis/kék fáink lehetnek. Ebben az esetben a fekete fák számának aránya adja meg a rendparaméter értékét:

$$E(q_{\text{max}}) = (1-z)^x \approx 0{,}932, \text{ azaz } 93{,}2\%.$$

5. Érdekesség: egy frissen megfertőzött, majd meggyógyult fa „betegen töltött” $w$ napjai számának mi az $E(w)$ várható értéke, vagy másképp fogalmazva: azon fák, amelyek meggyógyulnak, várhatóan hányadik napon válnak immunissá a betegségre?

$$E(w) = z\sum_{k=1}^{x} k(1-z)^{k-1} \approx 0{,}269,$$

azaz körülbelül a 2,7 nap elteltével, a 3. napon gyógyulnak meg.

## Összefoglalás

Komplex, vélhetőleg realisztikus modellt kaptunk egy hétköznapi probléma, egy gyümölcsöskertben terjedő betegség leírására, amely mind a diákok, mind a tanárok számára tanulságos és izgalmas kihívás lehet. A modell szépsége, hogy a fizikusok számára oly kedves fázisátalakulásokhoz hasonló átmenetet produkál. Nagyon sok paramétert lényegében önkényesen rögzítettünk, ezért fontos kiemelnünk, hogy a paraméterek változtatásával ugyan módosulnak a $q_{min/max}$ rendparaméter szélső értékei (emiatt az „ugrás” mértéke is) és az $n_c$ kritikus sűrűség értéke, valamint az átmenet szélessége stb., de a fázisátalakuláshoz hasonló változás bekövetkezte nem. Lényegi eltérést a többi paraméter változtatása esetén sem találunk, inkább csak szélsőséges, úgymond egyértelmű eseteket.

Láthattuk, hogy egy-két érdekes mennyiséget analitikus számításokkal is igazolni tudunk, más esetekben kénytelenek vagyunk statisztikai alapokra támaszkodva számítógép-szimulációs segítséget igénybe venni. A legfontosabbat, a $q(n)$ rendparaméter-függvényt például nem tudtuk matematikailag egzakt formulával megadni.

✧

Mindannyian sok új dolgot tanultunk a fizika egy kevéssé ismert területéről, programozásról, diák-tanár közös munkájáról, együttgondolkozásáról, egy hosszabb távú projektmunkáról. A vizsgálódást és a paraméterek további állítgatását, bővítését, finomítását sokáig lehetne még folytatni, mindenki számára nyitott a lehetőség a kész program, illetve a program kódjának letöltésével.

Irodalom


1. https://www.berzsenyi.hu/Lendvai/
2. Kondor I., Szépfalusy P.: Kritikus jelenségek. In: *Fizika 75.* (szerk. Abonyi I.), Gondolat Kiadó, Budapest (1975) 85–122.
3. H. Haken: *Szinergetika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1984).