A KLEPSZIDRÁK FIZIKÁJA

Stonawski Tamás, Kiss Tamás
Nyíregyházi Egyetem

Elgondolkoztunk már azon, hogy egy hengeres alakú, vízzel teli, alul lyukas edényben miként csökken a vízszint? Könnyen belátható, hogy nem egyenletesen, hiszen az alsó kifolyónyíláson folyamatosan csökken a hidrosztatikai nyomás, ezzel együtt a kifolyó víz sebessége is (a Bernoulli-törvény alapján), így időegységenként egyre kevesebb víz ürül ki. Ha időmérésre szeretnénk használni e jelenséget, akkor a henger belső falát lefelé haladva egyre sűrűsödő beosztásokkal kellene ellátnunk (a helyes beosztás megállapításához további számítások szükségesek), egy másik lehetőség az edény alakjának megfelelő változtatása (lefelé szűkítése). A vízóra pontosságát pedig valamely megbízható időmérő eszközzel ellenőrizhetnénk.

Napjainkban az idő mérésére számtalan eszközt használunk, de az atomórával időzített okostelefonok modern korában is találhatunk igazi nagy klasszikusokat, például a homokórákat (jó szolgálatot tesznek a szaunában, vagy akár dolgozatírás idejének meghatározásakor, de a Windows várakozást „segítő” forgó homokórája is sokunk agyába égett).

Az időmérés kezdetén a Nap járását követő árnyékok megfigyelése adott alkalmat az első napórák elkészítésére. Azonban borús időben és éjszaka nem működtek a napórák, ezért (és az óránál jóval kisebb időegységek meghatározásához is) volt szükség bevezetni egy, a Naptól független (de ahhoz igazított) időmérő eszközt. Az egyik ilyen találmány volt az ókori

Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori program keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.

Kiss Tamás a Nyíregyházi Egyetem V. éves fizika-matematika osztatlan tanárszakos hallgatója. Főként az általános iskolában is bemutatható kísérletek tervezésével, valamint az ott hasznosítható demonstrációs eszközök készítésével foglalkozik.

kultúrákban elterjedt vízóra. A vízórák tulajdonképpen egy tartályból kifolyó (gyakrabban előfordul) vagy befolyó vízmennyiség időegységre váltásának felelnek meg (a vízórák kalibrációjához valószínűleg a napórákat használták fel).

A leggyakoribb esetben a vízórából a víz egy vékony csövön folyt ki (és nem csöpögött), és a megfigyelő a belső skálabeosztáson olvasta le az eltelt időt (*1. ábra*).

1. ábra. Balra az 1904-ben Karnakban talált, egyik legősibb vízóra, amelyet III. Amenhotep fáraó (i. e. 1415–1380) uralkodásának idején alabástromból faragtak. Jobbra e legrégebbről fennmaradt vízóra 1978-ban – az akkori vizsgálathoz – készült rekonstrukciója [1].

A vízórákat az ókorban elsősorban templomokban, bíróságokon, hivatalokban, munkahelyeken használták, de feljegyzések alapján ismeretes csillagászati számítások, őrségváltás, tanítási óra, zsilipnyitási idő meghatározására való alkalmazása is. A címlapon[1] szereplő összetett szerkezet egyszerre volt szélirányjelző, valamint nap- és vízóra.

A klepszidra fejlesztésében a görögök jártak élen, de a római időkben is használták a bíróságokon, politikai fórumokon a felszólalás időtartamának meghatározásához (ha valamely okból a felszólalás megszakadt, a lyukat viasszal tömítették el, így állítva meg a kifolyást). Az ókori orvostudomány a vízórákat pulzusszámlálásra is használta, de még az athéni bordélyokban is teret hódított. Fizikai kísérletekhez az újkorban *Galilei* használta először a vízórát annak bizonyításaképpen, hogy a szabadon eső testek gyorsulása állandó és egyenlő nagyságú. Egy tartályból vékony csövön át vizet engedett egy edénybe a lejtőn elindított golyó mozgásának időtartamára. A felfogott vizet egy pontos mérlegen megmérte, és ebből következtetett a mozgás idejére (a vízórát ingával hitelesítette) [2]. Feljegyzésekből tudjuk, hogy *Newton* is készített ötletes vízórákat [3].

Napjainkban is felbukkannak újszerű építésű vízórák. Az egyik ilyen híres vízóra az úgynevezett „Time-Flow” óra (*Bernard Gitton,* fizikus-művész 1979). Ez a vízóra a történelmi változatok modern megközelítése. Gitton tervezése a gravitációra (Galilei szellemét megidézve) támaszkodik, órája több szifont használ, amelyekből a víz kanalakba áramlik, egy ingasort meghajtva. Ahogy az órába épített ingák kitérnek, úgy üríti a kanalakat is, egyenlő időközönként. A tényleges időmérést tehát egy kalibrált ingasor végzi, amelyet az óra tartályából vezetett vízáram táplál [4].

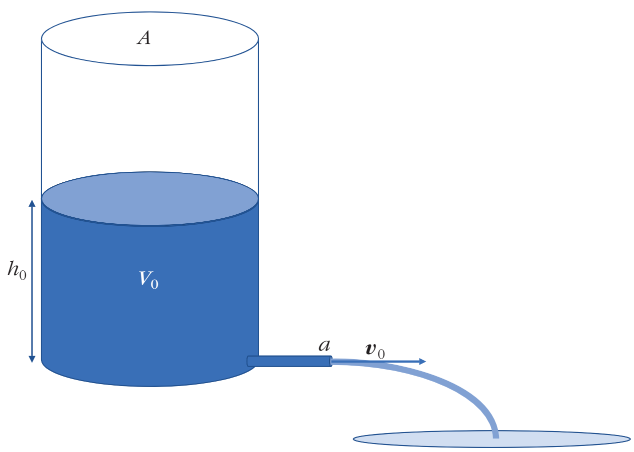
A henger alakú edény vizsgálata

Ahhoz, hogy megtudjuk, milyen ütemben csökken a vízszint magassága (*2. ábra*), induljunk az alábbi differenciálegyenletből:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

A $\mathrm{d}V = -a v \mathrm{d}t$ – ahol $v \approx \sqrt{2gh}$ (mivel $(a/A)^2 \approx 0$ – összefüggés felhasználásával szeparálható differen-

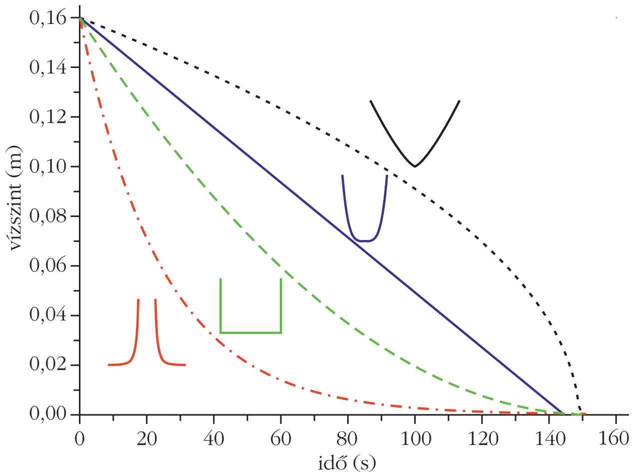
2. ábra. A hengeres testből kifolyó folyadék számításához.



[1] A „Szelek tornya” nyolcszögletű – oldalai az Athénban uralkodó fő légáramlatok irányába mutatnak – márványból készült, 12 méter magas és 8 méter átmérőjű épület. Valószínűleg *Küroszi Andronikosz* építette i. e. 100 vagy 50 körül (más források szerint azonban az i. e. 2. században) Athén agoráján. Később egy ortodox templom harangtornyaként, majd a török uralom alatt dervisek szent templomaként is használták – valószínűleg ennek is köszönheti fennmaradását. Ez időben keletkeztek azok a török feliratok, amelyek nyomokban még ma is láthatók belül a falakon. Bár már romos állapotban van, de még ma is látható-látogatható.

A torony nyolc, 2,8 méter hosszú oldalán lévő frízein a nyolc szélisten látható. Az ókorban a torony tetején volt Tritón, az embertörzsű és halfarkú tengeristen bronzból készült szobra, amelyik mindig a szél irányába fordult. (A legenda szerint, amikor a szobor eltűnt, hetekig nem fújt a szél, s hatalmas volt a hőség Athénban.) Az oldalain található napórák után horológiumnak, azaz órának is nevezik a tornyot.

Az épület belsejében egy vízórát is elhelyeztek, nyomait ma is látni, tervrajzát sikerült rekonstruálni. A vízórát az Akropoliszról lefolyó víz működtette, amit egy ólomcsövön keresztül egy tartályba vezettek. Innen a víz egyenletes sebességgel egy kisebb méretű bronzból készült tartályba folyt, és folyamatosan emelte az abban lévő úszót. Ennek függőleges irányú mozgását egy finom lánc vitte az óralapra csigákon keresztül. Az óraszerkezetből távozó víz pedig szökőkutakat táplált. (Wikipedia nyomán)



3. ábra. 16 cm magasságú, különböző formájú edények kifolyási görbéi. A kifolyónyílás méreteit úgy választottuk, hogy (a szemléletesség miatt) a kifolyási idő azonos legyen. Az ábrán jól látható, hogy a vízszintsüllyedés sebessége miként függ az edény alakjától.

ciálegyenlethez jutunk, amelynek megoldásából adódik a vízszintmagasság és az idő közötti másodfokú egyenlettel leírható kapcsolat:

$$h = \frac{a^2}{A^2}\frac{1}{2}g\,t^2 - \frac{a}{A}\sqrt{2\,g\,h_0}\;t + h_0. \qquad (2)$$

A forma és a süllyedés matematikai kapcsolata

Az egyenes körhengerből kifolyó víz során a vízszint tehát nem egyenletesen, hanem egy másodfokú egyenlettel leírható összefüggés szerint csökken. További vizsgálódásaink afelé irányulnak, milyen formájú lyukas edényekben csökken a vízszint egyenletesen vagy egyenletesen lassulva, illetve gyorsulva [5].

A forgásszimmetrikus edények formáinak meghatározásához a vízórák térfogatát kis magasságú korongokkal közelítjük. Az edényformák matematikai összefüggésének meghatározásához a vízszintmagasság függvényében kell megkeresnünk a korongok sugarát.

A térfogat definíciójából kiindulva a következőket írhatjuk fel:

$$\mathrm{d}V = -A(y)\,\mathrm{d}y = -A(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -A(0)\,v\,\mathrm{d}t. \qquad (3)$$

A Torricelli-féle kifolyási törvény és (3) felhasználásával kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{A(0)\sqrt{2\,g\,y}}{A(y)}. \qquad (4)$$

A kifolyónyíláson kifolyó víz sebessége felírható a vízszintmagasság függvényeként:

$$v(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{A(0)\sqrt{2\,g\,y}}{A(y)}. \qquad (5)$$

Mivel a tárgyalt vízórák forgástestek, $A(y) = r^2\pi$ alakú, az egyenletes kifolyás miatt pedig a sebességet a $v(y) = \text{konst.}\,y^0$ alakban keressük, így a korong sugara és a vízszintsüllyedés közötti összefüggés:

$$A(0)\sqrt{2\,g}\,\frac{y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}\pi} \to r = y^{\frac{1}{4}} \to y = r^4. \qquad (6)$$

A kifolyási sebesség vízszintmagasság függvényeként (korábban említve) több süllyedéstípust is megkülönböztethetünk:

$$v(y)\begin{cases} = \text{konst.}\;y^0 \;\text{ egyenletes } \left(y = r^4\right), \\ = \text{konst.}\;y^1 \;\text{ egyenletesen lassuló } \left(y = \dfrac{1}{r^4}\right), \\ = \text{konst.}\;y^{-1} \;\text{ egyenletesen gyorsuló } \left(y = r^{\frac{4}{3}}\right). \end{cases} \qquad (7)$$

A matematikai összefüggések meghatározásával az edények formái megjeleníthetők (*3. ábra*).

Kísérletek és szimulációk

Az egyenletek alapján háromdimenziós képeket készítettünk a forgástestekről, majd CNC-eszterga segítségével azokat műanyagból el is készítettük [6].

A Tracker videóelemző program segítségével az elkészített vízórákon ellenőriztük a vízszintsüllyedés sebességét. A time-laps felvételek alapján (az elemzéshez bőven elég volt az 1 kép/szekundumos filmfelvételi beállítás is) elkészítettük az *y–t* grafikonokat, amelyeket saját készítésű szimulációkkal is egybevetettünk.

A szimuláció alapalgoritmusa a kontinuitási egyenlettel kiegészített Torricelli-egyenlet volt:

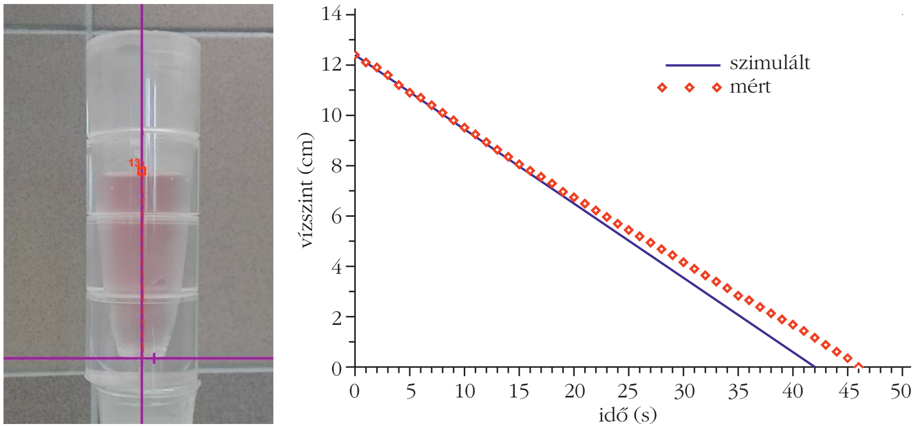
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\,v^2 &= \frac{1}{2}m\,v'^2 + m\,g\,h, \\ a\,v &= A\,v'. \end{aligned} \qquad (8)$$

Az egyenletből v-t kifejezve megkapjuk a kifolyónyíláson távozó vízsugár pillanatnyi sebességét:

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2}}. \qquad (9)$$

A szimulációk írásakor szintén a kis magasságú korongokra való felosztás gondolatát alkalmaztuk, azaz egy időegység alatt kifolyó, változó sugarú, kis hengertérfogatokkal számoltunk. A szimulációban a v sebességgel kiáramló víz térfogatát a kifolyó víz intenzitásából kiszámoltattuk, ez megegyezik a tartályban lévő vízmennyiség térfogatának csökkenésével, amelyből a vízszintcsökkenés értéke kiszámítható. A kezdeti vízszintből kivonva a vízszintcsökkenés értékét, megkaptuk az új vízszintértéket, amelyre addig folytattuk a ciklikus számításokat, amíg a vízszint zérusra nem csökkent.

A lépésközt elegendő volt 1 s-ra állítani. Ez az eljárás a különböző alakú tartályokra is alkalmazható, azzal a különbséggel, hogy a keresztmetszetek számításainál figyelembe kell venni a sugár magasságtól való függését is. A kísérletek alapján kapott és az ideális folyadékmodell-szimuláció során számolt kifolyásiidő-értékek (*4. ábra*) különbözősége miatt szimulációnkat a kifolyónyílásnál történő áramvonalsűrűsödéssel egészítettük ki (2/3-dal szoroztuk a kifolyó víz térfogatát) [Budó: Kísérleti fizika 262. o.].



4. ábra. Balra a videóelemzés egy fázisa az egyenletesen csökkenő vízszint ellenőrzésekor. r = 1 mm (a kifolyónyílás sugara), h_0 = 12,4 cm, $t_{mért}$ = 47 s. Az y–t grafikon képe egyenes, az állandó vízszintcsökkenés sebességének értéke: v = 2,7 mm/s. A folytonos vonal a szimulációval kapott eredményt mutatja.

Az egyenletesen csökkenő vízszintsüllyedés szimulációjának algoritmusa:

```
t=0; h=0; i=0
h(1)=0.16 // vízszint kezdeti magassága (m)
g=9.81 // nehézségi gyorsulás (m/s^2)
dt=1 // lépés köz időtartama (s)
I=0; v=0;dV=0; dh=0; Atartaly=0
Rlyuk=0.005 // kifolyónyílás átmérője méterben
Atartaly(1)=((h(1)*100)^(1/2)/100)*%pi // a tartály keresztmetszete (m^2)
Rtartaly(1)=(h(1)*100)^(1/4)/100 // a tartály sugara a magasság negyedik gyökével egyenlő
Alyuk=Rlyuk^2*%pi // a lyuk keresztmetszete (m^2)
t(1)=0; v(1)=0; I(1)=0; dV(1)=0; dh(1)=0; i=1

while h(i)>=0; // Csináld, amíg ki nem ürül!
i=i+1
t(i)=t(i-1)+dt // idő léptetése
v(i)=sqrt(2*g*h(i-1)/(1-(Alyuk/Atartaly(i-1))^2)) // kifolyó víz sebessége
I(i)=Alyuk*v(i) // kifolyó víz intenzitása
dV(i)=I(i)*dt // dt idő alatt kifolyt víztérfogat
dh(i)=dV(i)/Atartaly(i-1) // dt idő alatt bekövetkező vízszintsüllyedés
h(i)=h(i-1)-dh(i) // a vízszint pillanatnyi helyzete
Atartaly(i)=((h(i)*100)^(1/2)/100)*pi // a tartály keresztmetszete a vízszintnél
Rtartaly(i)=(h(i)*100)^(1/4)/100 // a tartály keresztmetszetének a sugara a vízszintnél
```

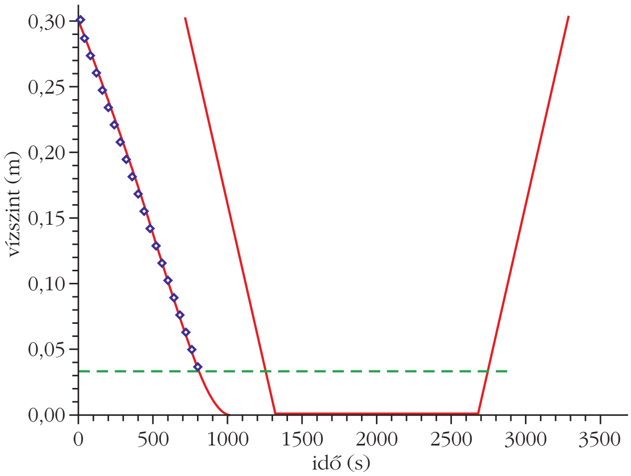
Egy ókori vízóra „hitelesítése”

A múzeumból nem kérhettük kölcsön a vízórát, és annak 1978-as másolatát sem volt esélyünk megkapni, így más módszert eszeltünk ki az ókori szerkezet pontosságának ellenőrzésére. Az *1. ábrán* látható vízóra alakjának egyenletét a GeoGebra programmal meghatároztuk és a már megírt szimulációba [7] beírtuk az alakegyenletet. A szimuláció lefuttatása nagy izgalommal töltött el bennünket, hiszen kíváncsiak voltunk az ókori tudomány precizitására. Az eredmény önmagáért beszélt: a vízszintsüllyedési sebesség szinte állandó maradt, az igazi eltérés csak a csap vonala *alatt* keletkezett volna, de a víz onnan már nem folyhat ki az edényből. Felmerül a kérdés, vajon miként lehetséges, hogy a 4. hatvány helyett 1. hatványú alakegyenlettel is sikerült az egyenletes vízszintsüllyedés? A 4. hatványú egyenlettel kapott forgástestnek is van olyan része, amelyre jól illeszthető egyenes palást. Az *5. ábrát* alaposabban megfigyelve, természetesen észrevehetjük, hogy a kifolyás kezdetén kicsit gyorsabban, majd a végén kicsit lassabban folyik ki a vázából a víz, azaz felül szélesíteni, alul pedig szűkíteni, a középső részen pedig változatlanul kellene hagyni az edény alakját. Valószínű, hogy az ókorban olyan mérési pontosság nem állt még rendelkezésre, amivel ezeket az eltéréseket észrevehették, így pusztán csak a dőlésszög változtatásával érhették el az egyenletes vízszintcsökkenést.

Tanórai alkalmazás

A 7. osztályban már találkozunk a hidrosztatikai nyomás fogalmával, a hengeres edényből kifolyó vízsugarak pályája alapján a tanulók felismerik hogyan függ a

5. ábra. Az egyiptomi vízóra „hitelesítése” a fényképe alapján. Jobb oldalon az edény formája, bal oldalon folytonos vonallal a szimuláció, körökkel a rá illesztett egyenes látható. A vízszintes szaggatott vonal a csap magasságát jelzi.



nyomás a vízoszlop magasságától. Ehhez az anyagrészhez kapcsolódva szakköri vagy projektmunka keretén belül stopper segítségével bejelölhetik egyenletes időközönként a hengeres edényből kifolyó vízszintmagasságokat, azok egyenletlenségeiből összefüggéseket vonhatnak le és az ókori elvek alapján megkereshetik az ideális vízóraalakot.

Középiskolában már sokkal inkább alkalmazhatjuk a videóelemző és szimulációs programokat, illetve izgalmas kalandozásokban lehet részünk, ha vizsgálódásaink körébe a történelmet is bevonjuk. Ellenőrzéseket végezhetünk ókori szerkezetekkel, azokat – aktuális tudásszintünknek megfelelően – továbbfejleszthetjük. A projektek bemutatása és élményszerű előadása is mind több tanulóval ismertetheti meg a fizika valódi komplex világát, rádöbbentve őket, hogy fizika nélkül a hétköznapi eszközök működése és a világ jelenségei mindörökre rejtélyben maradnának.

Irodalom

1. https://www.topoi.org/project/a-3-8/
2. Simonyi K.: *A fizika kultúrtörténete*. 192. o.
3. Szilágyi J.: Nagy tudósok az órakészítés történetében. *Szemle 110/3* (2005. június)
4. B. Gitton: „Time, like an everflowing stream.” Trans. Mlle. Annie Chadeyron. Ed. A. Randall. *Horological Journal 131* (1989) 18–20.
5. Berkes I.: *A mindennapok fizikája*. Springer, Leverkusen, 1999.
6. https://1drv.ms/u/s!An0er2QwwGjytnubt_F1IDSn4h8k?e=f2o7yP
7. https://1drv.ms/u/s!An0er2QwwGjytwO6tMLd3pg3jPRd?e=VdC4Rb