A FIZIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI ELJÁRÁSOK A FIZIKATANÍTÁSBAN – feladatokon keresztül bemutatva

Wiedemann László
Budapest

A mondanivalót két oldalról közelítjük. Előtérbe állítjuk az alkalmazott tanítás-módszertani elveket, másrészt a választott fizikai problémák elemzésével igyekszünk rámutatni e szakmódszertani elvek érvényesítésére. Bizonyos matematikai részek elhagyhatók.

Módszertani elvek

- Az adott feladat vagy probléma rövid és világos megfogalmazása az első. Ne legyen túl egyszerű! A triviális példák a módszertan más részéhez tartoznak.

Wiedemann László (1931) középiskolai fizika-matematika tanár, egyetemi doktor (1964). Tíz év gimnáziumi tanítás után a Fővárosi Pedagógiai Intézetben 35 évet dolgozott a tanártovábbképzés területén, 25 éven át volt tagja az OKTV versenybizottságának. Jelenleg is részt vesz a Mikola-verseny munkájában és feladatkitűző a *KöMaL* fizikarovatában. Könyvei jelentek meg a fizika és filozófia kapcsolatáról, valamint cikkei a *Fizikai Szemlében*. Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott 2003-ban.

- A problémát lehetőleg paraméteresen kell kezelni. Ez adja a matematikai elemzés lehetőségét és a diszkussziót. A diszkusszió által matematikai sűrítésben látjuk a fizikai tartalmat, ugyanakkor a végformulában a paraméterek kritikus értékadásával határesetben analóg probléma megoldását nyerjük. Például súrlódásos mozgások esetén, ha az esetleg bonyolult végképletben $\mu \to 0$ határérték eljárást alkalmazzuk, megkaphatjuk az analóg súrlódásmentes mozgások leírását. A diszkutálás végül a probléma elmélyítését eredményezi.
- Az elmélyítés más úton is megvalósítható; vagy továbbvisszük vagy visszatérünk rá, de más oldalról. Valójában analóg problémákat dolgozunk fel. Itt jön szóba az a hasznos eljárás, hogy egy gondolati láncra fűzzük fel az így keletkezett újabb problémákat, ezzel kiemelve egy fizikai-szakmai sávot, amelyen belül kell maradni. Így megvalósítható az egzaktság és a lehatárolás.

Eközben, ha lehetséges, egy párhuzamosan vitt demonstráció jól hozzájárulhat a szemléletességhez. Ha egy vonatkozó mérést is sikerül beállítani, még jobb. A numerikus számolás végülis elengedhetetlen, a kvantitatív tájékozódást teszi lehetővé.

• Fontosak a közelítések. Kétfélét kell kiemelni; egyrészt, amikor matematikai számításban alkalmazunk közelítést, másrészt, amikor magában a fizikai meggondolásban, aminek matematikai következményei lehetnek.

Feladatok

A választott központi törvény, amelyre a következő problémák tárgyalása alapozódik, legyen a Hooke-törvény. Így a rugalmas szállal foglalkozunk. Ha az eredetileg x hosszúságú szálra F húzóerő hat a szál irányában, akkor az megnyúlik. A megnyúlása legyen y, ekkor

$$y = \frac{1}{EA} F x.$$

Hangsúlyozni kell, mint szakmai-módszertani szempontból új elemet, hogy a Hooke-törvény a rugalmas szál belső pontjaira is igaz, vagyis, ha a szál eredetileg L hosszúságú, akkor egy $x < L$ szakaszára is fennáll, sőt egy L-en belül választott Δx szakaszra is. Ez a mélyebb értelmezés már túlmutat a legegyszerűbb alkalmazásokon. A következő feladatban a megnyúlt rugalmas szál sűrűségeloszlását kívánjuk meghatározni, ezzel kitekintve fizikai mennyiségek eloszlására.

1. feladat

Homogén, állandó keresztmetszetű, L hosszúságú rugalmas szálat egyik végénél fogva felfüggesztünk.

Milyen lesz a felfüggesztett nyugvó szál hosszmenti sűrűségeloszlása, ha feltételezzük a Hooke-törvény érvényességét a szál belső pontjaira is?

A szál kezdetben vízszintesen nyugszik, feszítetlen és sűrűsége állandó.

Megoldás

Tekintsük a rugalmas szálat erőmentes állapotában referenciaszálnak. Hosszmenti erőhatás esetén a szál megnyúlik és az alakváltoztató erő a szál belső pontjaiban tetszőleges eloszlású lehet; $F(x)$, x a referencia szálra mért hosszúság. Az eltolódás a 0 rögzített ponttól mért referenciatávolsággal arányos, így a referenciaszál lineáris transzformációval átmegy a megnyúlt szálba.

A szemléletesebb számolás kedvéért bevezetjük a ρ vonalsűrűség fogalmát,

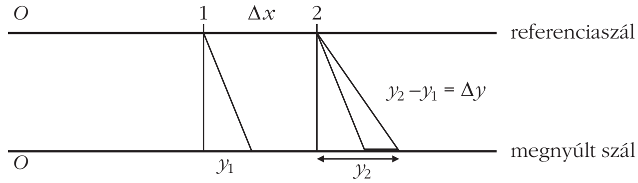
$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x},$$

a hosszegység tömegét.

Például a homogén, nyújtatlan szálra $\rho = m/L$, ahol m a szál tömege, L a szál hossza. A vonalsűrűség arányos a szokott térfogati sűrűséggel.

Legyen az $O1 = x$ szakasz megnyúlása y_1, az $O2 = x+\Delta x$ szakasz megnyúlása y_2 (*1. ábra*).

Látható, hogy a 2. pont elmozdulása nem lehet csupán y_1, hanem $y_2 > y_1$, mert a Δx szakasz is nyúlik. Így



1. ábra

Δy a Δx szakasz megnyúlása. Viszont e kettő között érvényes a Hooke-törvény:

$$\Delta y = \frac{1}{EA} F(x)\, \Delta x, \tag{1}$$

ahol E a rugalmassági modulusz, A a szál keresztmetszete, $F(x)$ az alakváltoztató erő. Másrészt fennáll, hogy az eredetileg Δx-ben foglalt tömeg most $(\Delta x+\Delta y)$ hosszúságra oszlik el. Ezért

$$\rho_1 \Delta x = \rho\,(\Delta x + \Delta y), \tag{2}$$

ahol ρ_1 a referenciaszál állandó értékű vonalsűrűsége. Átalakítás után (mivel Δx és Δy még véges)

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{3}$$

Úgy tekintjük tehát, hogy Δx megnyúlása Δy és ezek között érvényes a Hooke-törvény.

A direkciós erő bevezetésével igen szemléletes képet kapunk a szál sűrűségeloszlásáról. Írjuk át a Hooke-törvényt:

$$y = \frac{1}{EA} F x \;\rightarrow\; F = \frac{EA}{x} y,$$

így az x hosszúságú „belső” szálrész D_x direkciós ereje $D_x = EA/x$, az L hosszúságú szál D direkciós ereje

$$D = \frac{EA}{L}. \tag{4}$$

Az (1) és (4) összevetéséből (3) jól kezelhető alakra hozható:

$$\rho(x) = \rho_1 \frac{1}{1 + \dfrac{F(x)}{DL}}. \tag{5}$$

Az (5) képlet adja a megoldást; ezután diszkutálni kell:

a) Ha például a vízszintesen elhelyezett szálat egyik végén befogjuk, a másik végén F erővel húzzuk, akkor $F(x)$ = konstans, így $\rho(x)$ is állandó, a szál ritkább lesz.

b) Ha a szálat felfüggesztjük, akkor $F(x)$ változó. Adott x hosszúságú szálrészt az alatta lévő szálrész húzza, így $F(x) = \rho_1 (L-x) g$. Ezt (5)-ben figyelembe véve:

$$\rho(x) = \rho_1 \frac{1}{1 + \dfrac{\rho_1 g}{DL}(L-x)}. \tag{6}$$

Látható, hogy $x = 0$-ra (a felfüggesztés pontjában) ρ a legkisebb, míg az alsó végén, $x = L$-re a legnagyobb; $\rho = \rho_1$, hiszen $F(x) = 0$.

Az egészet jól tudjuk demonstrálni az úgynevezett slinky-vel; laza, sokmenetes, nagy átmérőjű csavarrugó, közelítőleg érvényes rá a Hooke-törvény. Felfüggesztve, (6)-nak megfelelő menettávolság alakul ki. A felfüggesztés körül ritkább sűrűségű, azaz a menettávolság nagyobb, míg a szál végén az eredeti ρ_1 sűrűség marad, hiszen alatta már nincs rugórész, aminek súlya húzná.

Ha (3)-ban $\Delta x \to 0$ határértékre, azaz deriváltra térünk, akkor kapjuk, hogy

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{1+y'}, \tag{3.a}$$

és tekintsük ezt érvényesnek a továbbiakban.

A (3.a) eloszlásfüggvény egy C konstans erejéig van meghatározva, ami kiszámítható. A (3.a) eloszlást ugyanis normálni kell, ami itt azt jelenti, hogy a normált $\rho(x)$-et integrálva a $(0, L)$ határok között, a megnyúlt szál tömegét kell megkapni, ami most is $\rho_1 L$.

Ez az integrál C-re ad egy egyenletet, ha a (6)-os képletben $(L-x)$ helyett $C(L-x)$-et írunk.

Az (1) képletre másképpen is eljuthatunk. Eddig a szemlélet alapján írtuk fel. Tekintsük most az x_1 és x_2 szakasz megnyúlását, vagyis az 1 és 2 pontok eltolódását. Innen

$$\Delta y = \frac{1}{DL}\left(F_2 x_2 - F_1 x_1\right).$$

Minthogy Fx szerint lineáris, F_1 és F_2 helyett közelítésül ezek átlagát vehetjük. Ha felfüggesztett szálról van szó, akkor $F(x) = \rho_1 g(L-x)$. Ezeknek és Δx határértékének figyelembevételével ugyancsak az (1) képletre jutunk, ha azt már a felfüggesztett szálra konkretizáltuk.

2. feladat

Most alapnak tekintjük a már felhasznált általánosabb Hooke-törvényt és azt forgással kombináljuk. Tekintsünk tehát egy vízszintes síkon nyugvó, súlytalannak vehető rugót, egyik végéhez egy merev, m tömegű, homogén anyageloszlású rudat erősítsünk, másik végét egy függőleges tengelyhez kötjük. A rugó és a rúd egy egyenesbe esnek. Ezután a rendszert forgásba hozzuk, amely állandó ω szögsebességgel forog a vízszintes síkban. Mekkora lesz a rugó megnyúlása?

Megoldás

Módszertani szempontból érdemes egy lépéssel visszamenni és onnan kezdeni. Ez esetben a jelenlegi feladat már egy továbbfejlesztett feladat lesz. Először tehát nézzük az egyszerűbb, analóg feladatot, ahol a homogén, merev rúd helyett egyetlen m tömegű golyó van a rugó végén. Most az a megoldás, hogy a megnyúlt rugóban ébredő erő biztosítja a centripetális erőt:

$$D y = m\,\omega^2 (L + y),$$

ahol D a direkciós erő, L a feszítetlen rugó hossza, y a keresett megnyúlás. Ebből

$$y = \frac{L}{\dfrac{D}{m\,\omega^2} - 1},$$

itt $D/m = \omega_0^2$ a rezgő és nem a forgó rendszer sajátfrekvenciája. Átírva

$$y = \frac{L}{\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1} \quad \text{és} \quad \frac{\omega_0}{\omega} > 1 \ \text{legyen.}$$

Erősítsük a rugó végére a merev rudat és így forgassuk meg a rendszert! E továbbfejlesztett változatban új fizikai kép áll előttünk. A rudat most hossztengelyére merőlegesen vékony, Δx vastagságú szeletekre osztva képzeljük. Minden szelet más-más távolságra van a forgástengelytől ezért az egyes szeletekre külön-külön kell számolni, majd összegezni a centripetális erőket. Az alapelgondolás változatlan. Egy szelet tömegét a ρ vonalsűrűséggel fejezzük ki: $\rho\Delta x$, határesetben $\rho\,\mathrm{d}x$.

A rúd hossza legyen h, a keresett megnyúlás y, ekkor ω szögsebességű forgáskor stacionárius állapotban (*2. ábra*)

$$D y = \int_{x=0}^{h} \omega^2 (L + y + x)\,\rho\,\mathrm{d}x,$$

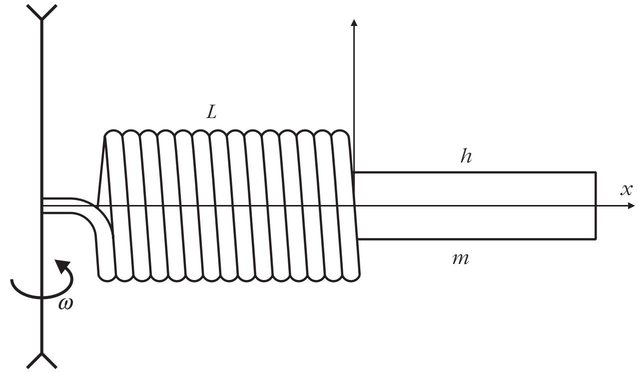
ahol x-et a rúd elejétől mérjük. Kiszámítás és átalakítás után az eredmény:

$$y = h\,\frac{L + \dfrac{h}{2}}{\dfrac{D}{\rho\,\omega^2} - h}.$$

Mivel $m = \rho h$, ezért

$$y = \frac{L + \dfrac{h}{2}}{\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}.$$

2. ábra



A megoldás feltétele most is az $(\omega_0/\omega)^2 > 1$ kritérium. A feladat integrálás helyett középiskolai összegzős módszerrel is megoldható.

3. feladat

Az előbbi gondolatsor utolsó állomásának tekinthető ez a feladat. Valójában kitekintést nyújt a nehezebb problémák felé. Középiskolában ebből csak a gondolatmenet lehet használható, a matematikai rész túlmegy a tananyagon. Módszertani szempontból új elemként ki kell emelnünk, hogy az előrehaladás érdekében zárt egységekben gondolkodunk, tehát valahol mindig berekesztjük a további analízist. Később más kontextusban lehet folytatni. E probléma tehát továbbgondolásra való.

A mostani probléma az előbbi tetemes továbbfejlesztése. Forgassunk egy m tömegű, D direkciós erejű, feszítetlen állapotában L hosszúságú rugót vízszintes síkban úgy, hogy egyik végét függőleges tengelyhez erősítjük. Kérdezzük, hogy milyen lesz a rugó hosszmenti sűrűségeloszlása és a helyi megnyúlása. Kezdetben a $\rho_1 = m/L$ vonalsűrűség állandó, és keressük a $\rho(x)$ függvényt.

Megoldás

Az x tengelyt a rugó irányában, a forgástengelytől számítva vegyük fel. Most is bevezetjük a referenciaszálat, amely a valódi szál mellett azzal együtt forog és nem deformálódik. Erre illesztjük az x tengelyt. A referenciaszálra azért van szükség, mert így a $\rho_1 \Delta x$ tömegű szeletek transzformációjával jutunk a megnyúlt szálra. Fontos, hogy a változó, keresett $\rho(x)$ vonalsűrűség helyett a konstans ρ_1 vonalsűrűséggel lehet számolni. Tehát keressük az x tengely menti, az x helytől függő helyi megnyúlást. Adott x helyen a megnyúlás által okozott rugóerő biztosítja az x-től jobbra eső rugórész forgásához szükséges centripetális erőt, ami – mivel minden szelet más-más távolságra van a forgástengelytől – az egyes szeletekre ható centripetális erők összege.

Ha az x szálrész megnyúlása y, akkor a csatlakozó Δx hosszúságú szakasz megnyúlása Δy, és a Hooke-törvény szerint az 1. feladat (1) képlete alapján

$$\Delta y = \frac{1}{D\,L} F(x)\, \Delta x,$$

ahol $F(x)$ az x helyhez tartozó centripetális erő. Az előbbiek alapján $F(x)$ – a $\Delta x \to 0$ határérték vételével – így írható fel:

$$F(x) = \int_x^L (x + y)\, \omega^2 \rho_1\, \mathrm{d}x.$$

Egymásba helyettesítve, majd az integrál határait felcserélve, az $y(x)$ helyi megnyúlásra integrálegyenletet kapunk:

$$y' = \frac{-\omega^2 \rho_1}{D\,L} \int_L^x (x + y)\, \mathrm{d}x, \qquad \text{(i)}$$

Vezessük be az

$$\Omega^2 = \frac{\rho_1}{D\,L}\, \omega^2$$

állandót és az (i) egyenletre alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt,[1] akkor az integrál felső határa szerinti deriváltja maga az integrandusz. Így végül a megoldandó másodrendű inhomogén differenciálegyenlet:

$$y'' = -\Omega^2 (x + y).$$

A megoldás trigonometrikus és lineáris függvények kombinációja. A további diszkusszió szempontjából fontosak a kezdőfeltételek. Ezek megadása nem triviális:

$$x = 0 \qquad x = L$$

$$y = 0 \qquad \rho = \rho_1$$

Ezekkel a differenciálegyenlet konkrét megoldása:

$$y = \frac{\sin(\Omega\, x)}{\Omega \cos(\Omega\, L)} - x. \qquad \text{(ii)}$$

A $\rho(x)$ sűrűségeloszlást a (3.a) képlet adja, vagyis

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{1 + y'}.$$

Ezután (ii)-ből előállítjuk az y' függvényt és $\rho(x)$-be helyettesítjük, végül

$$\rho(x) = \rho_1 \frac{\cos(\Omega\, L)}{\cos(\Omega\, x)}.$$

Jól látszik, hogy a forgó rugó vége felé haladva, $x \to L$, $\rho \to \rho_1$, míg a forgástengelynél a ρ vonalsűrűség a legkisebb; $\rho(x = 0) = \rho_1 \cos(\Omega L)$. Igen szép diszkussziók kínálkoznak még, de ezekre már nem térünk ki. Itt is normálni kellene az előbbi sűrűségfüggvényt. Hasonlóan megtehetjük egy C konstans bevezetésével egy nehezebb, C-re vonatkozó egyenlet megoldásaként. Végülis az adódik, hogy az Ω helyett $C\Omega$ írandó. További érdekesség például, hogy (ii)-ből $x = L$ helyettesítéssel megadható a forgó rugó megnyúlása. Célszerű az Ω állandót átírni; $\Omega L = \omega/\omega_0$, ahol ω_0 a rugóhoz rendelt sajátfrekvencia. A normálás miatt a képletben itt is $C\Omega$ írandó.

A probléma megoldható a referenciaszál bevezetése nélkül is. Ez esetben az egyes szeletek más-más tömegűek $\Delta m = \rho(x) \Delta x$, ahol ρ most már a megnyúlt szál helyi sűrűsége. Ekkor $\rho(x)$-re kapunk differenciálegyenletet. A két megoldás megegyezik.

---

[1] Newton–Leibniz-tétel kimondja, ha az $f(t)$ függvény folytonos az $[a,\ b]$ intervallumon és az $F(x)$ integrálfüggvényt a következő módon definiáljuk az $[a,\ b]$-n:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t,$$

akkor $F(x)$ értelmezve van, folytonos az $[a,\ b]$-n, differenciálható $(a,\ b)$-n és

$$F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in (a,\ b).$$