GRAVITÁCIÓRÓL KÖZÉPISKOLÁBAN – MÁSKÉNT

Kiss Miklós
Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium

Két pont között távolságot mérhetünk térben és időben. A Föld felszínének két tetszőleges pontja között különböző távolságok vannak, mégis az idő, ami alatt az egyik pontból eljutunk a másikba, lehet ugyananynyi. A kérdés kicsit élesebb megfogalmazásban: lehet-e olyan vasutat építeni a Földön, amelynek működtetéséhez – legalábbis elvileg – nem kell energia, és a menetidő bármely két állomás között megegyezik?

A kérdés annyiban is aktuális, hogy mostanában sokat hallani a Hyperloopról, mint nagyon gyors közlekedési lehetőségről. Hyperloop esetén az utasok vagy az áru szállítása vákuumcsőben haladó, zárt kapszulákban történne nagy sebességgel. A hajtást lineáris motor biztosítaná. A gravitációs megoldás azonban alapjaiban más lenne.

Amiről írunk, pillanatnyilag csak egy érdekes, elvi lehetőség. Nem tudhatjuk, hogy mikor lesz realitása. Ami itt és most igazán fontos benne, az a fizika.

Amit mindenki ismer, a gravitáció a Föld felszínének közelében, vagyis az ebből adódó gravitációs gyorsulás ($g \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). Az már ritkább, hogy ezt összekössük a gravitációs térerősséggel,

$$g = \frac{F}{m} = 9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

ami fontos lépés a mélyebb megértés irányában.

Hogyan csökken a g a Föld felszínétől távolodva, és a nehezebb kérdés, hogyan változik a gravitáció a Föld belsejében. Amíg a Maxwell-törvények szerves részét képezték a középiskolás fizikatananyagnak [1], addig a sztatikus elektromos mező és a gravitációs mező közötti matematikai analógia alapján *Gauss* törvényét felhasználva könnyen meg tudtuk válaszolni a kérdést. Az analógiát persze most is felhasználhatjuk [2], szakkörön, emelt szintű csoportban nem lehet akadálya.

Nézzük *Newton* gravitációs törvényét és a Coulomb-törvényt tömegpontokra és pontszerű töltésekre, azoktól r távolságra:

$$F_{\mathrm{Newton}}(r) = \gamma \frac{m_1\, m_2}{r^2}, \text{ illetve } F_{\mathrm{Coulomb}}(r) = k \frac{Q_1\, Q_2}{r^2}.$$

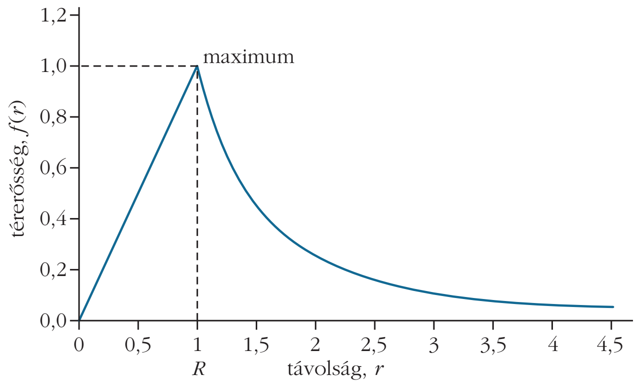
Csak az erők nagyságát írtuk fel. Mindkettő középiskolai tananyag. Az analógia nyilvánvaló: az erő a két jellemző mennyiség (gravitáló tömeg, illetve elektromos töltés) szorzatával egyenesen, a távolság négyzetével fordítottan arányos.

Ahogy említettük, az elektromosságtanban mindig, a gravitáció esetében csak gyakran beszélünk a térerősségről:

$$E(r) = k \frac{Q}{r^2} \quad \text{és} \quad g(r) = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Itt a tömeget is nagybetűvel írtuk, kiemelve a „forrást”, az elektromos mező forrása a töltés, a gravitációs mezőt a gravitáló tömeg hozza létre. (*Eötvös Loránd* vizsgálatai alapján a gravitáló tömeg arányos a tehetetlen tömeggel és így mindkettőt ugyanazzal az egységgel, a kilogrammal mérhetjük.)

Kiss Miklós a Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium matematika-fizika és számítástechnika tanára, a gimnázium napórájának tervezője, készítője. PhD fokozatát fizikából szerezte, kutatótanár. 27 éve szervezi a Mikola-verseny gyöngyösi döntőjét, a feladatkitűző bizottság tagja, a döntő méréseinek készítője. A Bugát Pál Természetismereti Vetélkedő zsűrijének tagja. Ericsson-, Mikola- és MTA Pedagógus Kutatói Pályadíjas. Tanít a BERZELAB-ban, a Berze Természettudományos Önképzőkör egyik szervezője.



1. ábra. A mezők térerősségének változása (távolságegység a gömb sugara, a térerősség egysége a maximális térerősség). Az értéktengelyen az $f(r)$ az elektromos vagy a gravitációs térerősséget jelöli.

Ezzel el is érkeztünk *Maxwell* első törvényéhez, *Holics* tanár úr gimnazistáknak szóló fizikakönyvében [1] bevezetett jelöléssel:

$$N_\mathrm{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

ahol az N_E az elektromos mező forráserősségét jelöli, vagyis a zárt felület fluxusát, ami a törvény szerint egyenesen arányos a felületbe zárt töltéssel. Itt

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\, k}$$

a vákuum dielektromos állandója, k a Coulomb-állandó, $k = 9\cdot 10^9$ Nm^2/C^2.

Ha folytatjuk az analógia alapján, akkor azt kell írnunk, hogy

$$N_\mathrm{g} = \frac{M}{\varphi_0}.$$

Itt legyen

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\,\gamma},$$

amit gravitációs vákuumkonstansnak nevezhetünk. A γ a gravitációs állandó, $\gamma = 6{,}673\cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Az N_g a gravitációs mező forráserősségét, vagyis a zárt felület gravitációs fluxusát – ami egyenesen arányos a felületbe zárt gravitáló tömeggel – jelöli.

Csak az analógia kedvéért érdemes megemlíteni, hogy mindkét mező konzervatív, vagyis örvénymentes, azaz Maxwell második törvénye analóg módon érvényes mindkét mezőben.

A következő lépéshez egy kis matematika szükséges, amit vagy részletezünk, vagy elmondjuk az eredményt. Az R sugarú, homogén, töltött szigetelő gömb elektromos mezeje a gömb közepétől r távolságra:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\, r, & \text{ha } r < R, \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{Q}{r^2}, & \text{ha } r \geq R. \end{cases}$$

A gömbön kívül az elektromos mező olyan, mintha egy pontszerű, a gömb középpontjában elhelyezkedő Q töltés hozta volna létre. A gömb belsejében, a gömb középpontjában nulla a térerősség, a középponttól távolodva a gömb felszínéig lineárisan növekszik. Itt ρ az egységnyi térfogat elektromos töltését mutatja meg (térfogati töltéssűrűség).

Az analógia alapján hasonlókat mondhatunk az R sugarú, M tömegű és homogén tömegeloszlású gömb gravitációs mezejéről. A gömb közepétől r távolságra:

$$g(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\,\varphi_0}\, r, & \text{ha } r < R, \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\,\varphi_0}\,\dfrac{M}{r^2}, & \text{ha } r \geq R. \end{cases}$$

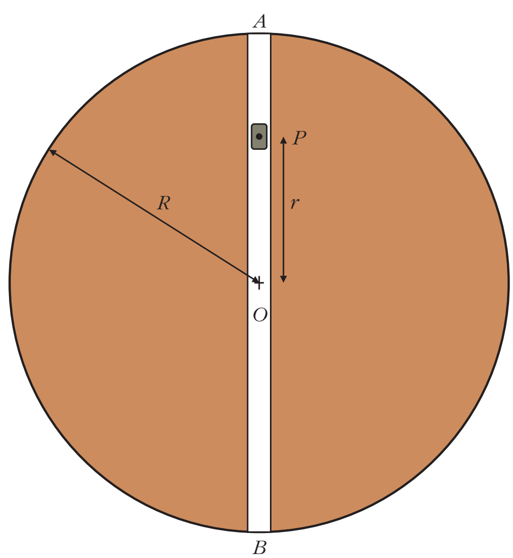
A gömbön kívül a gravitációs mező olyan, mintha egy pontszerű, a gömb középpontjában elhelyezkedő M tömeg hozta volna létre. A gömb belsejében, a gömb középpontjában nulla a térerősség, a középponttól távolodva a gömb felszínéig itt is lineárisan növekszik (*1. ábra*). Itt ρ a szokásos (tömeg)sűrűség, azaz

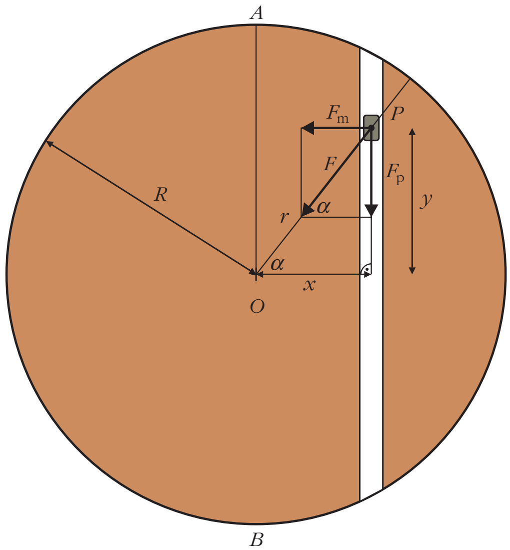
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\,M}{4\,R^3\,\pi}.$$

Most modellezzük a Földet egy R_F sugarú, szilárd, állandó sűrűségű, homogén gömbbel (*2. ábra*)! Ezt természetesen csak a számolás egyszerűsítése miatt tesszük, a valóság ennél bonyolultabb. Fúrjuk át a Földet egyik átmérője mentén, és tegyünk a furatba egy kicsiny, természetesen a Föld M tömegéhez képest kicsiny m tömegű testet. Számítsuk ki, hogy mekkora F erő hat a testre, ha az r távolságra van a Föld középpontjától ($r \leq R_\mathrm{F}$):

$$F(r) = m\,g(r) = m\,\frac{\rho}{3\,\varphi_0}\,r = D\,r.$$

2. ábra. Az középpontján átfúrt Föld.





3. ábra. A nem középen átfúrt Föld.

D-vel az állandó

$$m\frac{\rho}{3\,\varphi_0}$$

mennyiséget jelöltük. Az erő iránya a Föld középpontja felé mutat, vagyis a jelenség éppen olyan, mintha a testet egy rugóhoz rögzítettük volna.

Ha elengedjük a testet, akkor az harmonikus rezgőmozgást fog végezni a furat mentén, egyensúlyi helyzete a Föld középpontjánál lesz. Ha a Föld felszínéről engedjük el a testet, egészen a Föld átellenes pontjáig halad és ott megáll, majd elindul visszafelé. Érdemes megemlíteni, ha a beejtett test egy megfelelő jármű lenne, akkor ebben az utasok súlytalanok lennének.

Kiszámíthatjuk a rezgésidőt is:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{m\frac{\rho}{3\,\varphi_0}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\,\varphi_0}{\rho}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\gamma\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}\,.$$

A Föld átlagos, 5541,7 kg/m^3 sűrűségével és a γ gravitációs állandó $6{,}674\cdot10^{-11}$ m^3/(kg s^2) értékével számolva:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}} = 5049{,}5\ \mathrm{s} = 84{,}16\ \mathrm{perc}.$$

Ezért, ha a testet a Föld felszínén beejtenénk a furatba, mintegy 42 perc alatt átérne a Föld átellenes pontjára.

Érdekes megnézni a maximális sebességet, vegyük figyelembe, hogy a rezgőmozgás amplitúdója éppen a Föld R_F sugara:

$$v_{max} = R_F\,\omega = \frac{2\pi\,R_F}{T} = 7{,}93\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}},$$

ami nem meglepő módon éppen az első kozmikus sebesség nagysága. Érdemes utalnunk a szögfüggvények definíciójára, illetve a harmonikus rezgőmozgás és a megfelelő egyenletes körmozgás vetületi mozgásának azonos időfüggésére. Azért nem kezdhettük ezzel, mert előbb igazolnunk kellett, hogy a test harmonikus rezgőmozgást végez. A továbbiakban azonban támaszkodhatunk a körmozgás vetületi mozgására is.

Az igazi meglepetés akkor adódik, ha a Földet nem az átmérője, hanem két tetszőleges pontja közötti szelő mentén fúrjuk át, hiszen megvizsgálva a test mozgását és az átesés időtartamát ismét 42 percet kapunk, amennyiben a test továbbra is súrlódásmentesen mozoghat.

Nézzük a *3. ábrát!* A visszatérítő F_p erő a gravitációs erő furattal párhuzamos komponense lesz:

$$F_p = F\sin\alpha.$$

A test kitérése ebben a furatban:

$$y = r\sin\alpha,$$

ahol r a test távolsága a Föld középpontjától.

Ebből a $\sin\alpha$-t kifejezhetjük és beírhatjuk az erő képletébe (vagy a hasonlóságra is hivatkozhatunk):

$$F_p(y) = F(r)\,\frac{y}{r} = m\,g(r)\,\frac{y}{r} =$$

$$= m\frac{\rho}{3\,\varphi_0}\,r\,\frac{y}{r} = m\frac{\rho}{3\,\varphi_0}\,y = D\,y,$$

ahol a D éppen ugyanazt jelöli, mint az alapesetnél, a középen átfúrt Földnél. Ebből következően a rezgésidő és így az áthaladási idő is ugyanannyi lesz, mint az előbb. Ezzel beláttuk, hogy a Föld két tetszőleges pontja között az átjutási idő mindig 42 perc, ha nincs súrlódás.

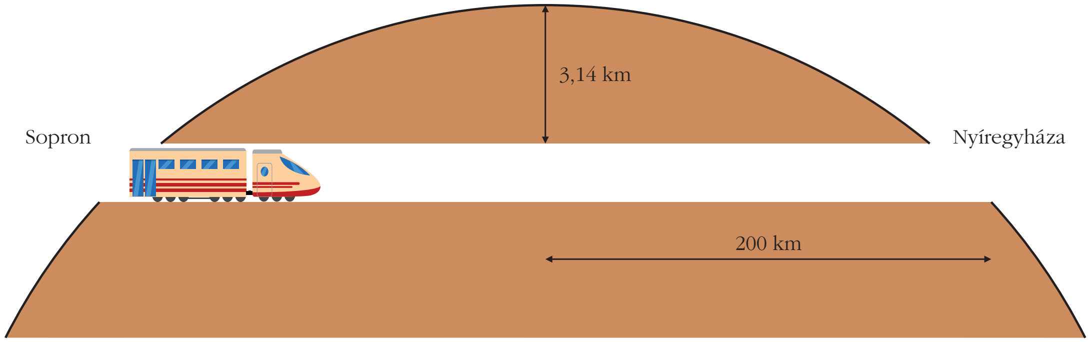
A közlekedés új lehetősége adódik: fúrjunk alagutat a Föld két megfelelő pontja között, az egyik pontban engedjünk el egy vonatot, és 42 perc múlva megérkezik a másik felszíni pontba, bárhol is legyen az. A súly a gravitációs (nehézségi) erő F_m merőleges komponensével lenne egyenlő, a párhuzamos komponens szempontjából „súlytanok” lennének az utasok.

A két pont a számítás alapján tetszőlegesen közel is lehet. A legnagyobb távolságot pedig az határozza meg, hogy a pálya felezéspontja nem lehet túl mélyen a Föld felszíne alatt. Egy $L = 2h$ hosszúságú húr esetén ez az $m(h)$ mélység:

$$m(h) = R_F - \sqrt{R_F^2 - h^2}\,.$$

A vasútnak a földkéregben kell maradnia, az $m(h)$ mélység nem lehet a szilárd földkéreg vastagságánál nagyobb.

Ezek alapján nézzük meg, mi adódna egy Sopron–Nyíregyháza vonal esetén (*4. ábra*)! Az egyszerűség kedvéért 400 kilométer távolsággal számolunk. Ekkor a mélységre 3,14 kilométer adódik. Súrlódás és közegellenállás hiánya esetén 42 perc lenne a menetidő.



4. ábra. A Sopron–Nyíregyháza vonal (az ábra nem méretarányos!).

A maximális sebesség félúton, 200 km megtétele után (most h a rezgőmozgás amplitúdója):

$$v_{\max} = h\,\omega = \frac{2\pi h}{T} = 0{,}249\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 249\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

azaz majd 900 km/h lenne. Ez a sebesség kicsit több mint a mai gyorsvonatok legnagyobb sebességének kétszerese. A működtetéshez pedig (a soha el nem érhető ideális, súrlódás- és közegellenállás-mentes esetben) üzemanyagra sincs szükség.

A vonat a helyi vízszinteshez viszonyítva lejtőről indul, ennek hajlásszöge az adatok alapján 1,8°. Ha a súrlódást is figyelembe vesszük, a későbbiek alapján, az elindulás feltétele, hogy $\mu < \mathrm{tg}\alpha$, most $\mu < 0{,}0314$.

A lehetséges állomások távolságának határt szabó átlagosan 30 km földkéregvastagságot figyelembe véve az elvi alagúthosszúság 1235 km-nek adódik. Itt az említett indulási lejtő 5,6°-os. A vonat maximális sebessége ebben az esetben 2766 km/h lenne. Az önindulás feltétele pedig: $\mu < 0{,}098$.

Meg kell még vizsgálni a súrlódás és a közegellenállás szerepét, megbecsülni sebességcsökkentő hatásukat, illetve az indítás kérdését.

A közegellenállás szerepe jelentősen csökkenthető lenne légritkítással, viszont ekkor meg kell oldani a vonat belső levegőellátását.

Mekkora az F_s súrlódási erő, mi a feltétele, hogy a vonat magától elinduljon? Ebből kiszámítható, mennyi energiát kell pótolni, hogy a vonat eljusson a célállomásig, amit akár már indításkor lehet biztosítani. A *3. ábra* alapján – felhasználva, hogy az F erő a Földön belül arányos a középponttól mért r távolsággal – könnyen belátható, hogy a pálya egyenesére merőleges, az AOB átmérő egyenesének irányába mutató F_m erő a teljes út alatt állandó és csupán a két egyenes egymástól mért x távolságától függ. A korábbi jelölésekkel, ha $2h$ távolságra akarunk elérni, akkor az x távolságra igaz, hogy

$$x = \sqrt{R_F^2 - h^2}$$

és az m tömegű szerelvényre ható F_s súrlódási erő:

$$F_s(2h) = \mu\, F_m(x) = \mu\, m \frac{4\pi\gamma\rho}{3} x =$$

$$= \mu\, m \frac{4\pi\gamma\rho}{3} \sqrt{R_F^2 - h^2}\,.$$

Ebből láthatjuk, hogy a súrlódási erő elvileg függ a földfelszín alatt megteendő távolságtól, de reális esetekben, a Föld 6000 km-es sugarához képest a néhány km mélységben vezetett alagútban a nehézségi gyorsulás és így a súrlódási erő nagysága elhanyagolhatóan kisebb a felszíninél. Ez alapján a szükséges energiatöbblet, amit indításkor kell biztosítani:

$$E_+ \cong F_s 2h = 2\mu m g h.$$

Az energiatöbbletet indításkor motorral biztosíthatjuk. A motor biztonsági tartalékként is használható.

Érdemes megjegyezni, hogy a 42 perces menetidő miatt egy bizonyos távolság alatt nem érdemes ilyen közlekedésen gondolkozni. A felszíni vasutak maximális sebessége 300-400 km/h értékkel becsülhető. Ezzel és a 42 perces menetidővel a minimális távolság 210-280 km-nek adódik. A Sopron–Nyíregyháza távolságnál már lenne realitása a megoldásnak.

A távolság felső határát már korábban kiszámoltuk. A gravitációs vasút tehát 300 és 1235 kilométer távolság között tűnik kivitelezhetőnek. A költségek és a megoldandó technikai és fizikai problémák – alagútfúrás, építés, légritkítás, hőmérséklet (például a hőmérséklet 100 méterenként 5-6 °C-kal emelkedik) – miatt mindez ma még csak elvi lehetőség. A biztonság további feltételeket jelent és költségeket támaszt.

Nem tudhatjuk, hogy mit hoz a jövő. Más lehet a helyzet, ha majd a Holdon vagy a Marson kell megoldanunk a közlekedést.

Irodalom

1. Holics László: *Fizika III*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
2. Holics László (szerk.): *Fizika 1–2*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.