ÜVEG MEGFÚJÁSÁVAL KELTETT HANG FREKVENCIÁJÁNAK VIZSGÁLATA AUDACITY PROGRAMMAL

Tóthné Juhász Tünde
Karinthy Frigyes Gimnázium, Budapest
és ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola

Amikor elfújunk egy üres, vagy részben vízzel teli palack fölött, az hangot ad. Az üveg által kiadott hang magassága (frekvenciája) függ az üvegben lévő víz mennyiségétől: minél több a víz (kevesebb a levegő) az üvegben, annál magasabb a hang.

Ezt a jelenséget mindenki ismeri, az egyszerű „hangszer” fizikaórán vagy -szakkörön való használatát mások is ajánlják [1], mégsem elterjedt és közismert (és nem is magától értetődő) annak magyarázata, hogy pontosan mivel is van összefüggésben a létrejövő hang frekvenciája. Első ránézésre könnyű a jelenséget ahhoz az emelt szintű érettségi kísérlethez hasonlítani, ahol egy hangvilla adott frekvenciájú hangját egy vízbe süllyesztett üvegcsőben lévő levegőoszlop felerősíti, és megmutatható, hogy ekkor az üvegcső hossza körülbelül a hullámhossz negyede [2].

Ha azonban egy borosüveg által kiadott hang elméleti hátterét részletesebben megvizsgáljuk, egy, a diákok által is érthető egyszerű modell segítségével levezethetjük, hogy a létrejövő hang hullámhossza nem az üvegben levő levegő magasságával, hanem a levegő térfogatának négyzetgyökével arányos. Az ingyenesen letölthető Audacity program [3] segítségével pedig az általános egyszerű kvalitatív megfigyelésnél jóval érdekesebb mérőkísérletet is végrehajthatunk, amelynek eredménye – a kísérlet egyszerűsége ellenére – jól egyezik az elméleti modell által megjósolt összefüggéssel, ezért a mérés kifejezetten alkalmas iskolai laborgyakorlatnak is.

Köszönöm témavezetőmnek, *Juhász Andrásnak,* hogy kritikai észrevételeivel és kísérleti ötleteivel segítette a cikk megírását. A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Tóthné Juhász Tünde matematika–fizika szakos tanár a budapesti Karinthy Frigyes Gimnáziumban. Az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola hallgatójaként 2019-ben szerzett doktori fokozatot, kutatási területe a számítógéppel segített középiskolai kísérletek volt. Ennek keretében elsősorban egyszerű, ingyenesen letölthető programok segítségével igyekezett mindenki számára elérhetővé tenni a számítógépes kísérletezést. 2016 óta az ELTE–MTA Fizika Tanítása Kutatócsoport tagja.

1. ábra. Borosüveg megszólaltatása szívószálon keresztül kifújt levegővel. Az üveg megszólaltatásához a szánkból kiáramló levegő neki kell ütközzön az üvegnyak belső peremének.

Elméleti háttér

Amikor az üveg felett elfújunk, az üveg nyakában lévő levegő kezd rezegni. Ennek kiváltó oka, hogy amikor megfújjuk az üveget, kissé lefelé fújunk, úgy, hogy a szánkat elhagyó levegő nekiütközzön a nyak szánktól távolabbi végének. (Azt, hogy valóban ilyen irányban kell fújnunk az üveg megszólaltatásához, ellenőrizhetjük, ha egy szívószálon keresztül áramoltatjuk ki a levegőt. Az üveg akkor ad hangot, ha az *1. ábrán* lévő pozícióban áll a szívószál.)

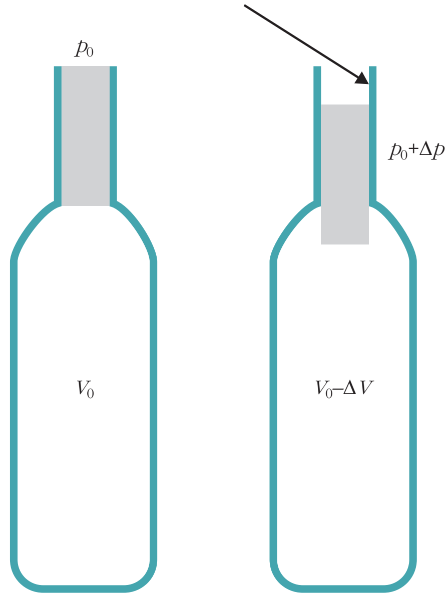
A jelenség értelmezéséhez válasszuk külön a nyakban és az üveg testében lévő levegőt! Az általunk kifújt levegő az üveg nyakának ütközve az ott lévő levegőt hirtelen lefelé nyomja, és ezáltal ezt a kis levegőadagot rezgésbe hozza, hasonlóan ahhoz, mint ahogy egy rugóra függesztett test a nyugalmi állapotából való kitérítéssel rezgésbe hozható [4]. A *2. ábra* ezt a folyamatot mutatja.

Mivel a folyamat gyors, feltételezhetjük, hogy adiabatikus, így

$$p\,V^{\kappa} = \text{állandó}, \qquad (1)$$

ahol p és V az üveg belsejében lévő nyomás és térfogat, κ pedig az adiabatikus kitevő vagy fajhőviszony, értéke levegő esetén körülbelül 1,4.

Ha a nyomás és a térfogat kis megváltozásait vizsgáljuk, implicit deriválással kapjuk, hogy:



2. ábra. Üres üveg nyakában lévő levegő nyugalmi állapotban (bal oldalon) és az üveg felett való elfújáskor (jobb oldalon).

$$\Delta p\,V^{\kappa} + p\,\kappa\,V^{\kappa-1}\,\Delta V = 0, \qquad (2)$$

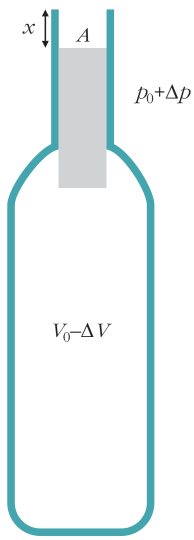
azaz

$$\Delta p = -\kappa \frac{\Delta V}{V_0}\,p_0, \qquad (3)$$

ahol V_0 az üveg testében lévő levegő mennyisége, p_0 pedig a légnyomás.

Nézzük meg, hogy az üveg nyakában lévő levegőre mekkora erővel hat az üvegben lévő adiabatikusan összenyomott levegő, amikor a levegőoszlop lefelé mozdul el (*3. ábra*)!

3. ábra. Az egyensúlyi helyzettől x távolságra lefelé elmozdult levegőoszlop miatt az üveg testében összenyomódik a levegő.



Ha az üveg nyakának hossza L, keresztmetszete A, a levegő sűrűsége pedig ρ, akkor a rezgő levegőoszlop tömege:

$$m = \rho A L. \qquad (4)$$

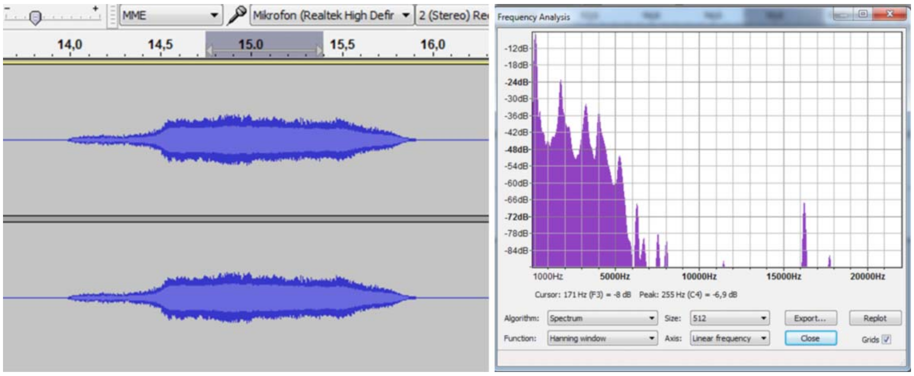
Newton II. törvénye szerint a levegőoszlop gyorsulása:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{A\,\Delta p}{\rho\,A\,L} = \frac{\Delta p}{\rho\,L}. \qquad (5)$$

Tételezzük föl, hogy az üveg nyakában rezgő levegőoszlop az egyensúlyi helyzettől x távolságot mozdult el lefelé. Beírva Δp helyébe az (3) egyenletet, és kihasználva, hogy $\Delta V = A x$, kapjuk, hogy:

$$a = \frac{1}{\rho\,L}\left(-\kappa\frac{\Delta V}{V}\,p\right) = -\kappa\frac{p}{\rho\,L\,V}\,A\,x. \qquad (6)$$

Azaz a levegőoszlop gyorsulása ellentétes irányú és egyenesen ará-



4. ábra. A borosüveg által kiadott hang felvétele és spektrumelemzése az Audacity programmal (V = 157 cm^3, f = 255 Hz).

nyos az egyensúlyi helyzetéből való kitérésével, tehát harmonikus rezgőmozgást végez. A (6) egyenletet összehasonlítva a harmonikus rezgőmozgás feltételével ($a = -\omega^2 x$), kapjuk, hogy a rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho\, L\, V} A}\,. \tag{7}$$

Mivel $\omega = 2\pi f$, a levegőoszlop rezgésének – és egyben a létrejövő hang – frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2\,\pi} \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho\, L\, V} A}\,. \tag{8}$$

Kihasználva, hogy a hang terjedési sebessége

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}\,, \tag{9}$$

a frekvenciára kapott képlet az alábbi végső formába egyszerűsödik:

$$f = \frac{c}{2\,\pi} \sqrt{\frac{A}{L\, V}}\,. \tag{10}$$

Az elméleti levezetéssel kapott képletből látható, hogy a frekvencia több, az üveg nyakára jellemző állandó mellett egyedül az üvegben lévő levegő térfogatától függ. Így szerencsésebb, ha az üvegben lévő víz mennyisége helyett az üvegben maradt levegő térfogatára fogalmazzuk át kvantitatív tapasztalatunkat is: ha az üvegben lévő levegő térfogata kisebb, magasabb lesz a kialakuló hang frekvenciája.

Kihasználva, hogy $\lambda = c/f$, azt is megmutathatjuk, hogy a bevezetőben említett érettségi kísérlettől eltérően itt a hullámhossz valóban nem a magassággal arányos. Ennek ellenőrzésére – ha az idő engedi – érdemes elvégezni az alábbi egyszerű kísérletet. Vegyünk két műanyag ásványvizes PET-palackot, az egyik legyen fél, a másik másfél literes. Az ásványvizes palackok nyaka egyforma, így a bennük kialakuló hang frekvenciáját a nyak különbsége nem befolyásolhatja. Töltsük tele a nagyobbik palackot vízzel, majd töltsünk át belőle a kisebbikbe pontosan annyit, hogy az tele legyen, végül ürítsük ki a kisebbik palackot. Ezzel a módszerrel kaptunk két olyan palackot, amelyekben ugyanakkora a levegő térfogata, de a levegőoszlop magassága jelentősen különbözik, mivel a másfél literes palack jóval szélesebb. A két palackot megfújva hallható (és mérhető), hogy a kialakuló hangok elfogadható hibán belül egyformák, így belátható, hogy az üvegben kialakuló hang valóban a térfogattól, és nem a levegőoszlop magasságától függ.

Tanulói mérőkísérlet

Az elméleti levezetéssel kapott eredmény ellenőrizhető egy egyszerűen végrehajtható tanulói méréssel. Egy borosüveget töltsünk föl a nyakáig vízzel, majd mérjük meg a tömegét. Ezután öntsünk ki belőle valamennyi vizet, és újra mérjük meg a tömegét. Így az üveg testében lévő levegő térfogata meghatározható a hiányzó víz tömegének segítségével. Ezek után indítsuk el az Audacity programban a felvételt és szólaltassuk meg az üveget. A hangfelvételt kielemezve (spektrumelemzés) határozzuk meg a létrejövő hang frekvenciáját. A *4. ábra* egy ilyen felvételt és a hozzá tartozó spektrumot mutatja.

Apránként kitöltögetve az üvegben lévő vizet, ismételjük meg a mérést legalább 10-15 alkalommal. Így egy térfogat-frekvencia adatsort kapunk (*5. ábra*).

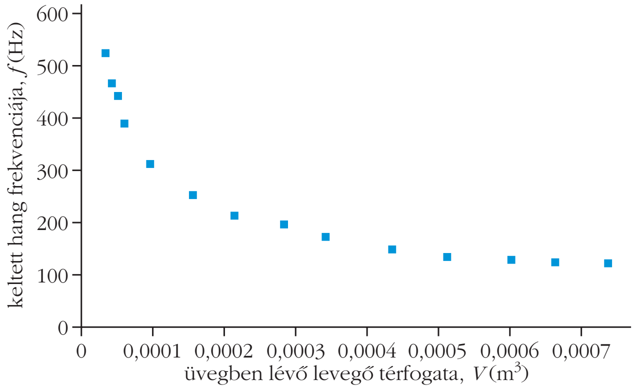
Erről az ábráról még nehéz eldönteni, hogy milyen kapcsolat van a térfogat és a frekvencia között, ezért valamilyen adatkezelő programmal (például Excel) tovább kell elemeznünk.

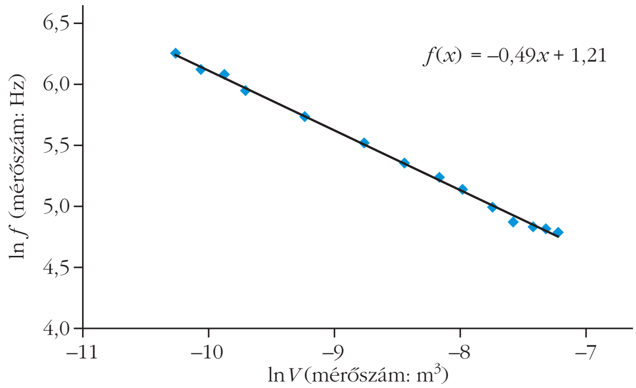
Ha feltételezzük, hogy a frekvencia a térfogat valamilyen hatványával arányos, azaz

$$f = a\, V^{b}, \tag{11}$$

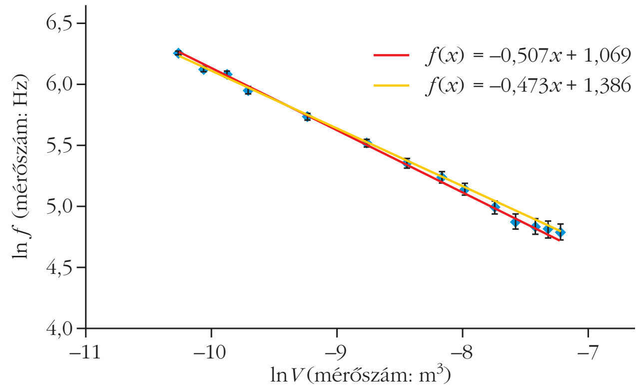
ahol a és b konstans, és szeretnénk kideríteni, hogy mi lehet V kitevőjének az értéke, akkor a frekvencia

5. ábra. Az üveg megszólaltatásakor hallható frekvencia a borosüvegben található levegő térfogatának függvényében.





6. ábra. Az $f = V^a$ összefüggésben lévő *a* értékének meghatározása. Az ábrázolt egyenes meredeksége a térfogat kitevőjét adja.



7. ábra. Az $f = V^a$ összefüggésben lévő *a* hibájának meghatározása. Az ábrán a hibasávok által megengedett legnagyobb és legkisebb meredekségű egyenest ábrázoltuk.

logaritmusát a térfogat logaritmusának függvényében ($\ln f - \ln V$ kapcsolat) érdemes ábrázolnunk (*6. ábra*), mert a logaritmus azonosságai miatt

$$\ln f = b \ln V + \ln a, \tag{12}$$

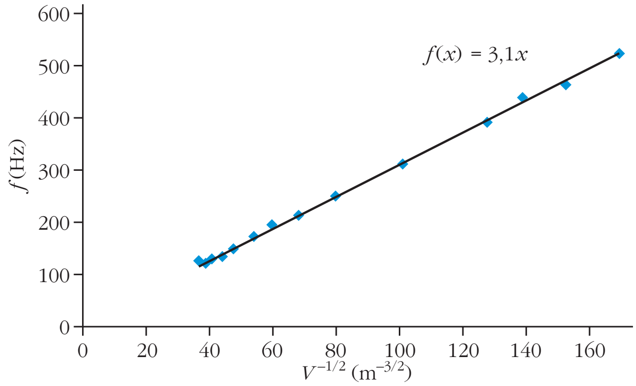
azaz ilyenkor a kapott grafikon meredeksége megadja a keresett hatványkitevőt.

Az egyenes meredeksége –0,5 körüli érték, azonban az elmélettel való egyezés igazolásához meg kell vizsgálnunk a meredekség hibáját is. Ehhez megrajzoltuk a hibákkal ábrázolt adatoknak megfelelő legnagyobb és legkisebb meredekségű egyeneseket (*7. ábra*), és ezek segítségével megbecsültük a meredekség hibáját. A kísérletben a legnagyobb hibát a frekvencia mérése adja, ezt több megismételt mérés alapján 8 Hz-re becsültük, ez adja a függőleges hibasávok alapját.

A *6.* és *7. ábra* alapján megállapíthatjuk, hogy az illesztett egyenes meredeksége $m_1 = -0{,}49 \pm 0{,}02$, így az elméletileg várt –0,5 érték benne van a mérés által kapott intervallumban, azaz az elméleti modellel összhangban a kísérleti eredményeink is azt mutatják, hogy a frekvencia a térfogat reciprokának négyzetgyökével arányos. Most már készíthetünk egy olyan grafikont (*8. ábra*), ahol a frekvenciát $V^{-1/2}$ függvényében ábrázoljuk.

A mérőkísérlet tehát igazolta a modell segítségével levezetett összefüggés azon részét, hogy $f = \text{konst.} \cdot V^{-1/2}$.

8. ábra. Borosüveg által kiadott hang frekvenciája $V^{-1/2}$ függvényében. (V az üveg testében lévő levegő térfogata). Az illesztett egyenes meredeksége, $m_2 = 3{,}1$.



Az illesztett egyenest tovább vizsgálhatjuk: megpróbálhatjuk meredekségének értékének helyességét is ellenőrizni. A (10) egyenlet alapján a meredekség elméletileg várt értéke:

$$m_2 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{L}}\,. \tag{13}$$

Behelyettesítve a hangsebességet ($c \approx 340$ m/s) és a vizsgált borosüveg adatait (nyak hossza, $L = 9 \pm 0{,}5$ cm, nyak sugara pedig $r = 1 \pm 0{,}05$ cm), azt kapjuk, hogy az elméletileg várt meredekség:

$$m_2 = \frac{340\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}01^2\,\pi\ \mathrm{m}^2}{0{,}09\ \mathrm{m}}} = 3{,}2\ \frac{\mathrm{m}^{1,5}}{\mathrm{s}}, \tag{14}$$

hibája pedig

$$\delta m_2 = \delta r + 0{,}5\,\delta L = 0{,}078, \tag{15}$$

amiből $m_{2,\text{elméleti}} = 3{,}2 \pm 0{,}25\ \mathrm{m}^{1,5}\mathrm{s}^{-1}$ adódik. A kísérletileg kapott meredekség tehát benne van az elméletileg várt intervallumban, ami tovább erősíti az elméleti levezetés és a kísérleti eredmények egyezését.

Összefoglalás

A borosüveggel végzett mérés jó példa arra, hogy egy középiskolás szinten viszonylag bonyolult hátterű jelenség hogyan mérhető egyszerűen az Audacity programmal. Az eredmények kielemzése (akár az elméleti levezetés nélkül is) tanulságos a diákok számára, jó alkalmat ad a grafikonelemzés, linearizálás és a méréskiértékelés gyakorlására, ezáltal hasznos részévé válhat az iskolai laboratóriumi gyakorlatoknak.

Irodalom

1. Nagy A., Papp K.: Hangszerek a semmiből. *Fizikai Szemle 59/2* (2009) 65–72.
2. http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/nyilvanos_anyagok_2018tavasz/fizika_emelt_szobeli_meresek_2018maj.pdf
3. https://www.audacityteam.org/download/windows/
4. https://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu_lectures/lecture3%20/ho_helmholtz/ho_helmholtz.html