A KVANTUMHATÁROZATLANSÁG A KVANTUMMECHANIKA FÉNYPOLARIZÁCIÓS MODELLJÉBEN

Tóth Kristóf
Czuczor Gergely Bencés Gimnázium
és Kollégium, Győr

Írásomban rámutatok arra, hogy a kvantummechanika alapjainak fénypolarizációra épülő középiskolai bemutatása során a határozatlansági elv megszokott matematikai alakja nem merülhet fel. Megmutatom azonban, hogy a polarizáción alapuló tananyagban egyszerre pontosan nem mérhető mennyiségek szórásai középiskolai módszerekkel is meghatározhatók, így a kvantumhatározatlanság elvi alapja ebben a modell-kvantummechanikában tanítható.

Bevezetés

A kvantummechanika felsőfokú matematikai formalizmusra épül, ezért a középiskolai feldolgozása, ezen belül a határozatlansági elv pontos megfogalmazása kényes feladat, amelynek megoldására több megközelítés ismert. *Tóth Eszter* tankönyve például a hullámformalizmust tekinti, a határozatlansági elvet az elektron hullámcsomag mivoltán keresztül szemlélteti. Más feldolgozások (ilyenek a mai magyar középiskolás könyvek) pedig kvalitatív magyarázatokat adnak a törvény bemutatására [1]. Azonban léteznek a középiskolás kvantummechanikának olyan megközelítései is, amelyek a kvantummechanika sokszínű megközelítéséből a vektorformalizmust választják, amelyet a legegyszerűbb, kétállapotú rendszereken keresztül építenek fel. Utóbbira a legnépszerűbb a fénypolarizáció jelenségének értelmezése fotonokkal [2–4]. Az erre alapuló középiskolai tananyag honlapomon tanításra alkalmas formában már magyarul is hozzáférhető [5]. *Diracig* nyúlik vissza a polarizáció jelenségének felhasználása a kvantummechanika bevezetésére [6], ami magyar egyetemi tankönyvben is fellelhető [7].

A fénypolarizációt használó megközelítések a kvantumszámítógépek megjelenése miatt egyre népszerűbbek. Éppen a közelmúltban jelent meg egy számítógépes játék [8], ahol fényjelenségekkel oldhatunk meg kvantumos logikai problémákat. A fénypolarizáción alapuló tananyag a Stern–Gerlach-kísérletet fordítja le a fotonokra éppen azért, mert fénnyel szemléletes kísérleteket lehet végezni. Azonban fontos megjegyezni, hogy a kvantummechanika felépítése a fénypolarizáción keresztül nem adja vissza sem a foton korrekt fizikai leírását, sem a kvantummechanika teljes matematikai formalizmusát. Nem ad teret például a kvantumos összefonódás értelmezésének, és amint itt megmutatom a kvantumhatározatlanság általánosan érvényes megfogalmazásának. Ezért a tananyagot inkább „modell kvantummechanikának” érdemes nevezni, amely segítségével a középiskolában is érthetővé válnak az alaptörvények és bizonyos számítási módszerek.

Általában, amikor a kvantummechanika feldolgozását tárgyaljuk, először érdemes megfogalmazni, hogy mi a kvantummechanika célkitűzése. A mikrovilágra vonatkozó értelmes kérdésfelvetés az, hogy ha egy vizsgált kvantumrendszer valamely fizikai mennyiségét megmérjük, akkor a különböző lehetséges mérési eredményeket mekkora valószínűséggel fogjuk megkapni. Ehhez három jól elkülöníthető lépést kell követnünk. Elsőként meg kell határoznunk a kezdeti állapotot, ami többnyire az állapotfüggvény megadását jelenti. Másodszor megadjuk e kezdeti állapot változását az idővel. Végül mérést végzünk az így előálló állapoton, és meg tudjuk becsülni a mérés lehetséges kimeneteleinek valószínűségeit. A középső lépés – a dinamikai feladat megoldása – magas szintű matematikát (általában parciális differenciálegyenlet megoldását) igényli, ezért a középiskolai tárgyalásban nem lehet célkitűzés. Az állapot meghatározása és a rajta végzett mérés mate-

Köszönetemet szeretném kifejezni *Tél Tamásnak* és *Vincze Miklósnak* a [2–4] tananyag értelmezése és magyarra fordítása kapcsán folytatott hasznos eszmecserékért. Külön köszönettel tartozom témavezetőimnek Tél Tamásnak és *Cynolter Gábornak* a cikk alapjául szolgáló gondolataim meghallgatásáért, ezekhez fűzött kitűnő megjegyzéseiért. Továbbá köszönöm Tél Tamásnak a szórás középiskolás ismertetésében nyújtott egyszerűsítésekért, számításaim ellenőrzéséért. Ezenfelül köszönöm *Tasnádi Péternek,* hogy megmutatta, hogy elsőként Dirac javasolta a fénypolarizáció jelenségét a kvantummechanika bevezetésére. Ezenfelül köszönettel tartozom a cikk egyik bírálójának, *Patkós Andrásnak,* a személyes konzultációért és a cikkhez fűzött fontos javaslataiért, amelyek a korrekt fizikai értelmezésben és az általánosításban nyújtottak segítséget. Mindemellett a cikk másik bírálójának, *Trócsányi Zoltánnak* is hálás vagyok az alapos átolvasásért és a cikk olvashatóbbá tételéért. Legvégül köszönettel tartozom fizikatanár kollégáimnak, *Tóth István Konstantinnak, Ruff Lászlónak és Csonka Lászlónak* a cikk átolvasásáért. A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Tóth Kristóf 2020-ban végzett az ELTE-n, mint középiskolai matematika- és fizikatanár. Jelenleg az ELTE Fizika Tanítása Program elsőéves doktorandusz hallgatója, a győri Czuczor Gergely Bencés Gimnázium és Kollégium fizikatanára és az MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport tagja. Kutatási területe a kvantummechanika és kvantuminformatika tanítása.

matikai leírása azonban a kétállapotú rendszerek esetén egyszerű mátrixok szorzását jelenti, aminek szabályait a középiskolában is be lehet mutatni. Ennek tükrében a kvantummechanika fénypolarizáción keresztül történő felépítése különösen alkalmas fontos kvantummechanikai jelenségek, fogalmak és elvek tisztázására. Az utóbbiak közé tartozik a határozatlansági elv.

A határozatlansági elv a mikrovilág lenyűgöző törvénye. Ezen alapvetően matematikai képlet fizikai értelmezése azonban változatos lehet a középiskolában. Írásomban ezért bemutatok néhány gyakran elhangzó kijelentést, amelyek esetenként ellentmondani látszanak egymásnak. Bemutatok egy kevésbé közismert megközelítést, amelynek középiskolai feldolgozása lehetséges. Tapasztalatom szerint az itt bemutatásra kerülő irány egyre népszerűbb mérnöki körökben. Cikkem elsősorban tanár kollégáimnak és érdeklődő fizikusoknak szól, ezért nyelvezetem az egyetemen tanult fizika eszköztárát is használja. Azonban a levezetések nem feltételeznek magasabb szintű matematikai ismereteket, és így azok, valamint a mögöttük megjelenő értelmezések – megfelelően tálalva – a középiskolások számára is érthetők lehetnek, ezzel bővítve a jelenlegi hazai kvantummechanika tanításával kapcsolatos kutatásokat [1].

A határozatlansági elv

Ha egy általános kvantummechanikáról szóló egyetemi tankönyvet fellapozunk, akkor a Heisenberg-féle határozatlansági elvvel kétszer is szembetaláljuk magunkat. Első ízben megismerhetjük azt, hogy egy szabad elektront olyan hullámcsomagként írhatunk le, amelyet végtelen sok szinuszhullám szuperpozíciójaként lehet előállítani. Ezért az elektronhoz végtelen sok hullámhosszérték rendelhető, és így a de Broglie-törvény értelmében végtelen sok lendületértéket társíthatunk hozzá. Ha túlságosan lokalizált a hullámcsomag, akkor szélesebb lendületsokaságot tartalmaz, és fordítva: ha nagy térrészt „foglal" el az elektron, akkor lendületét elvileg pontosabban tudjuk meghatározni [1]. Azaz érvényes a középiskolából is jól ismert $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$ egyenlőtlenség, ahol $\hbar$ a redukált Planck-állandó és a Δ a fizikai mennyiségek *elvi mérési bizonytalanságát* jelöli. Ez a megközelítés burkoltan a Fourier-transzformációt fogalmazza meg, és így középiskolás szinten legfeljebb elfogadható, de fel nem fogható.

Bár a határozatlansági elv a mérés elvi bizonytalanságáról tesz kijelentést, a gyakorlatban az adott állapothoz tartozó fizikai mennyiség szórásának jelentése, hogy az azonos állapotú részecskesokaságon elvégzett mérések eredményei átlagosan mennyire szórnak a várható érték körül [1].

Ha továbbhaladunk kvantummechanikai tanulmányainkkal, megismerhetjük a határozatlansági elv általános matematikai alakját, amely bármely két fizikai mennyiségre felírható. Ha a két fizikai mennyiség *A* és *B,* akkor a határozatlansági elv az ezekhez rendelt operátorok $\Delta\hat{A}$ és $\Delta\hat{B}$ szórására fogalmaz meg egyenlőtlenséget:

$$\Delta\hat{A} \cdot \Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}\, |\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|,$$

ahol jobb oldalon az operátorok $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ *kommutátorának* várható értéke szerepel. Fontos, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő szórások és a jobb oldalon szereplő várható érték is *adott állapotban* értendők, és általában nem minden állapotra feltétlenül ugyanazt az értéket kapjuk, azonban az egyenlőtlenség *minden állapotra érvényes* [1]. Az egyenlőtlenségnek pontos matematikai bizonyítása van.

Ha az $\hat{A}$ és $\hat{B}$ operátor helyére a hely és a lendület operátorát helyettesítjük, akkor felhasználva az $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ kommutátort, visszakapjuk a határozatlansági elv fent említett alakját: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. Az így megjelenő határozatlansági elv hagyományos alakja különleges, mert a két fizikai mennyiséghez rendelhető operátor felcserélési összefüggése az egységoperátorral arányos, amelynek átlaga nem függ az állapottól. Így az alsó korlát állapottól függetlenül mindig $\hbar/2$. Ez annak következménye, hogy kanonikusan konjugált fizikai mennyiségpárról van szó.[1]

A határozatlansági elv értelmezése

Ha szemügyre vesszük az általános képletet, akkor az alábbi lehetőségeket olvashatjuk belőle ki:

1. Ha $\hat{A}$ és $\hat{B}$ felcserélhető, akkor a jobb oldalon nulla áll. Ez nem túl izgalmas, a klasszikus fizikában a legtöbb mennyiség ilyen (ha a mérést zavaró egyéb körülmények hatását nem vesszük figyelembe).

2. Ha $\hat{A}$ és $\hat{B}$ nem felcserélhető (azaz a két fizikai mennyiségnek nincs közös sajátfüggvényrendszere), attól még a kommutátoruk várható értéke bizonyos állapotokban lehet nulla. Például akkor, ha az egyik fizikai mennyiség szórása pontosan nullává tehető, amire később példát mutatunk a fotonpolarizáción alapuló tananyagban.[2]

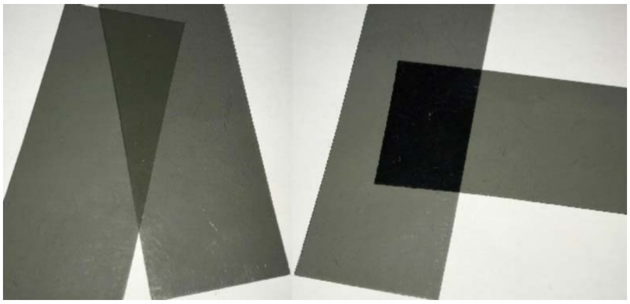
3. Ha $\hat{A}$ és $\hat{B}$ nem felcserélhető és a kommutátoruk várható értéke semmilyen állapotban sem nulla. Ilyen a hely és a lendület szórásának kapcsolata.

Nyilvánvaló, hogy a második eset általánosabb, mint a szokásosan hangoztatott harmadik. A már említett [2–5] tananyag részletesen elemezi a kvantumha-

---

[1]Az általános határozatlansági egyenlőtlenség levezetésénél a jobb oldalon a két operátor antikommutátorának várható értékével arányos tag is megjelenik [1]. A hely és lendület határozatlanságára vonatkozó esetben ez a tag állapotfüggő. Természetesen ennek elhanyagolásával az egyenlőtlenség továbbra is érvényes (csak élesebben), viszont hasznosabbá válik a képlet, mert a jobb oldal az elhanyagolás után már állapotfüggetlen lesz.

[2]Visszaemlékezések szerint *Marx György* professzor vizsgáin rákérdezett erre az atom s-állapotára vonatkozóan. Ugyanis ebben az állapotban az impulzusmomentum mindhárom komponensét pontosan ismerjük, mégpedig nulla értéket vesznek fel, ezért a kommutátorok várható értéke is nulla.



1. ábra. A kísérletek igazolják, hogy a polarizátorlemezeken áthaladó fény intenzitása függ a lemezek egymással bezárt szögétől.

tározatlanság második esetét, azonban olyan formában, amely a hazai szakmai közösségnek első körben furcsa lehet. Ahhoz, hogy megértsük miért van így, előbb röviden vázolom a tananyag felépítését.

A határozatlansági elv a fotonok polarizációs állapotára vonatkozóan

Első lépés a fénypolarizáció jelenségének felfedezése, amely során felismerhetjük, hogy a polarizátorlemezeken áthaladó fény intenzitása arányos a polarizátorlemezek által bezárt szöggel (*1. ábra*).

Ezután a polarizátorlemezeken áthaladó fény intenzitását méréssel mennyiségileg is megfogalmazhatjuk, így kapjuk meg a Malus-törvényt:

$$I_T = I_0 \cos^2\theta,$$

ahol I_0 a két polarizátorlemezen áthaladó fény intenzitásának maximuma, ami akkor áll elő, ha a két polarizátorlemez egyirányú, I_T pedig a két lemezen áthaladó fény intenzitása, ha a két lemez θ szöget zár be.

Ha feltételezzük, hogy a fénynyalábot oszthatatlan fotonok alkotják, és a fényintenzitás arányos a fotonok számával, akkor a Malus-törvényt megfogalmazhatjuk fotonszámra is:

$$N_T = N_0 \cos^2\theta,$$

ahol N_0 az áthaladó fotonok maximális száma (amely szintén megegyező állású polarizátorlemezek esetén igaz), míg N_T az áthaladó fotonok száma, ha a két lemez θ szöget zár be. Egyszerűbben úgy is fogalmazhatunk, hogy egy polarizátorlemez a beeső polarizált fotonok számát $\cos^2\theta$ részére csökkenti.

Itt jutunk el arra a pontra, amikor feltehetjük azt a kérdést, hogy *mi történne, ha egy vízszintes irányban tartott polarizátorlemezre kizárólag egyetlen 30°-osan polarizált foton esne?* Ekkor a Malus-törvény azt jósolná, hogy a fotonok $\cos^2 30° = 3/4$ része halad át, azaz 3/4 db foton (*2. ábra*), ami ellentmond a fotonok oszthatatlanságának. A helyes válasz ekkor az, hogy a jelenség leírása *valószínűségi* jóslatokkal lehetséges, jelen esetben a foton $p(\theta) = \cos^2\theta = \cos^2 30° = 75\%$ valószínűséggel halad át a polarizátorlemezen.

Értelmezzük a fenti jelenséget most a kvantummechanika matematikai eszköztárával, amelyhez hasonló feladat egyetemi feladatgyűjteményben is előkerül [9]. Legyen a két fizikai mennyiségünk két adott irányra vett polarizáció, amelyet a két polarizátorlemez rögzít: egy 30°-os irányú (A) és egy vízszintes irányú (B). Az ezekhez rendelhető operátorok saját kezűleg egyszerűen elkészíthetők. A 30°-os irányhoz az

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

a vízszintes irányhoz pedig a

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix rendelhető hozzá. Csupán arra kell figyelnünk, hogy az $\hat{A}$ operátort úgy írjuk fel, hogy a lehetséges sajátértékük ±1 legyen. A +1 mért érték jelenti a fotonok biztos áthaladását a polarizátorlemezen, a −1 pedig a biztos elnyelődését. Továbbá az operátor sajátvektorai éppen azt a két állapotot jelölik, amelyek a polarizátorlemezen történő biztos áthaladásnak és biztos elnyelődésnek felelnek meg, azaz a

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \text{ és a } \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

polarizációs állapotvektorok legyenek (az első a 30°-os, míg a második a 120°-os polarizációs iránynak megfelelő állapotvektor). Példánkban áthaladás esetén a foton a

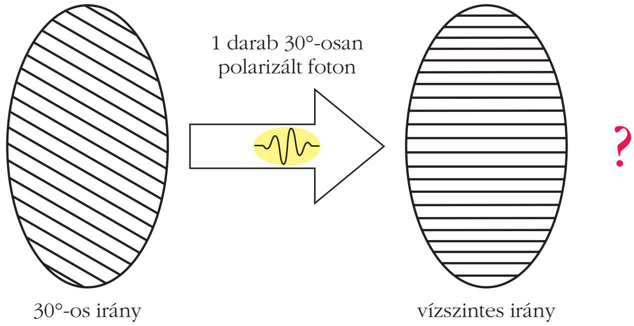
$$|\psi\rangle \to \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

állapotváltozást szenvedi el. Ugyanígy megalkotható a $\hat{B}$ operátor: ±1 sajátértékek mellett a két sajátvektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A kapott mátrixokat egyszerűen általánosíthatjuk a vízszintessel tetszőleges ϕ szöget bezáró polarizációjú polarizátorlemezre is:

2. ábra. Ha egy vízszintes irányú polarizátorlemezre egy 30°-osan polarizált foton esik, akkor a foton $\cos^2 30° = 75\%$-os eséllyel halad át.



$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}.$$

A fotonok polarizátorlemezeken történő áthaladásának valószínűségi jellege miatt az azonos állapotú fotonsokaság áthaladásának jellemzésére további statisztikai fogalmakat is használhatunk, például a szórást. Az áthaladást a polarizátorlemezen a +1, az elnyelést pedig a −1 mért sajátérték jellemzi, ezért, ha a fotonnyaláb minden részecskéje 100%-os valószínűséggel halad át a polarizátorlemezen (mert polarizációs iránya megfelel a polarizátorlemez irányának), akkor mindig a +1 mért értéket kapjuk, azaz a szórás nulla. Ugyanez az eset áll fenn 0%-os áthaladásnál is: a mért érték mindig −1, ezért a szórás ismét nulla. Ha azonban az egyes fotonok $0 < p < 1$ eséllyel haladnak át, akkor mindkét lehetséges értéket mérhetjük, ezért a statisztikai sokaságra szórás számolható. Ezen adathalmaz szórása akkor a legnagyobb, ha a mért értékek átlagától az egyes kimenetelek átlagosan a legjobban eltérnek, azaz amikor 50%-os eséllyel halad át a foton. Összefoglalva: minél bizonytalanabb a jóslatom az egyes fotonok áthaladására (vagy át nem haladására), annál nagyobb a szórás is.

Most nézzük meg a fenti példára a határozatlansági elvet:

$$\hat{A}\cdot\hat{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}\cdot\hat{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

és így

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Jól látható, hogy a kommutátoruk nem tűnik el, vagyis az operátorok nem cserélhetők fel. Ez természetes, hiszen nincs közös sajátfüggvényrendszerük, mert a két operátorhoz tartozó sajátvektorok eltérők. A polarizáción alapuló középiskolai tananyagban a fel nem cserélhetőségről egyszerű kísérlettel is meggyőződhetünk, mert a polarizátorlemezek sorrendje sem felcserélhető.[3]

Legyen egy foton tetszőleges polarizációs állapota

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix},$$

ahogy azt a *3. ábra* szemlélteti. Ebben az állapotban a kommutátor várható értéke

$$\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle = \langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = [x \;\; y]\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}\,y & -\sqrt{3}\,x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{3}\,xy - \sqrt{3}\,xy = 0.$$

Így az $\hat{A}$ és $\hat{B}$ operátoroknak megfelelő mennyiségek ΔA, ΔB szórására fennálló határozatlansági egyenlőtlenség:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq 0$$

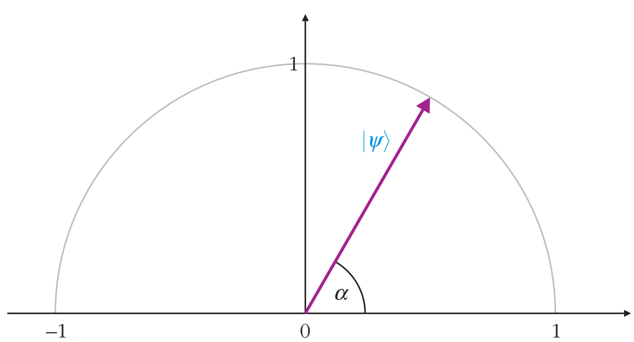
bármely állapotban. Sőt ugyanez igaz bármilyen más polarizátorlemez-pozícióhoz rendelhető operátorra is.

Felmerül a kérdés, hogyan lehet értelmezni a kapott eredményt, mert ez nem a „megszokott” határozatlansági egyenlőtlenség, hiszen a jobb oldalon nulla áll. Azaz példánkban *nem* igaz az, hogy az egyik mennyiség pontosítása egy adott mértéken túl kizárólag a másik mennyiség rovására történhet.

Hozzászoktunk, hogy a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán nullától határozottan különböző mennyiség áll. Ekkor megdöbbentő, mégis a hullámcsomag értelmezéséből könnyen következő szemléletes képet kapunk a határozatlansági elv értelmezésére. Abból kiindulva, hogy neves tankönyvek sem hangsúlyozzák élesen, hogy a határozatlansági egyenlőtlenség mindig adott kvantumállapotban értendő, továbbá az ismeretterjesztő könyvek csak a harmadik esetet tárgyalják [1], a második és harmadik eset különbségének elemzése izgalmas kaland.

A fent levezetett, polarizációra vonatkozó határozatlansági egyenlőtlenség „furcsasága” abból adódik, hogy az egyik polarizátorlemez szerinti mérés szórása pontosan nullává tehető (ha az egyes fotonok éppen megfelelő polarizációs állapotúak). Ráadásul egyik szórás sem képes végtelenné válni, mert a rendszer kétállapotú, így mindkét szórás csak *véges* értéket vehet fel. Ezért a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán olyan függvénynek kell lennie, amely bizonyos állapotokban eltűnik, éppen ott, ahol az egyik szórás nulla. Úgy tűnik, a véges állapotú rendszerekben a kvantumhatározatlanság úgy fogalmazható meg, hogy *ha az egyik mennyiség szórása nulla, akkor a másiké biztosan nem az.*

3. ábra. A foton polarizációs állapotát egy α irányú egységvektorral reprezentálhatjuk.



[3]Ez azért is bevilágító, mert a fénypolarizáció jelenségén keresztül megsejthetjük, hogy a fotonok leírására olyan algebrát kell választanunk, amelyben van nem-kommutatív művelet, amire az egyetem első évében már látunk példát, mégpedig a mátrixok szorzását.

A $\Delta A \cdot \Delta B \geq 0$ egyenlőtlenség, ahol a jobb oldalon az állapottól függetlenül azonosan nulla áll, nem fejezi ki teljesen a határozatlanságot, hiszen a képlet megengedi, hogy a két szórás egyszerre tűnjön el. A hagyományos határozatlansági elvvel szemben ez az egyenlőtlenség közvetlenül nem mutat rá a lényegre: *két nem felcserélhető fizikai mennyiség szórása egyszerre sosem lehet nulla*. Ráadásul látni fogjuk, a két fizikai mennyiség szórása egymástól függetlenül változik, így az is megtörténhet, hogy az állapotot úgy változtatjuk, hogy mindkét szórás *egyszerre csökken!* Erre a későbbiekben egyszerű, középiskolások által is érthető példát hozok.

A fizikai tulajdonság értelmezése

A klasszikus fizikában a *fizikai tulajdonság* alapvető jelentéssel bír, azonban a mikrovilágban a szuperpozíció jelensége miatt előfordulhat, hogy egy objektumra nem tudunk egyértelmű állításokat megfogalmazni. Például egy elektron helyzetére nem mondhatjuk azt, hogy az adott x hely piciny környékén van, mert azonos körülmények között megismételt mérések során máshol is megtalálhatom az ugyanolyan állapotú elektronokat, azonban sok esetben azt sem mondhatom biztosra, hogy nincs az x hely piciny környékén, mert néha viszont megtalálom az elektronokat ott. Egyet mondhatunk: az elektronfelhő az összes lehetséges helyének szuperpozíciójában van. *A kvantummechanikai furcsaságok egyik meglepő tapasztalata éppen az, hogy nagyszámú azonos mérés ismétlése esetén képesek vagyunk olyan fizikai tulajdonságok mérésére, amelyekkel az egyes részecskék nem is rendelkeznek.* A továbbiakban ezért szeretnék pár fogalmat tisztázni *Leonard Eisenbud* [10] könyvét követve, mielőtt a határozatlanság második esetét értelmezzük.

Egy fizikai rendszer **mérhető tulajdonságának** ismerete annyit jelent, mint ismerni a rendszerre vonatkozó jól definiált ismételt mérés kimenetelét, amely a kérdéses tulajdonságra kérdez rá.

A fénypolarizáció példáján ez azt jelenti, hogy egy foton akkor polarizált 45°-os irányban, ha az „áthalad-e az összes ugyanilyen módon preparált foton a 45°-os irányú polarizátorlemezen?" kérdésre *mindig* „igen" a válasz. Természetesen ekkor azt is mondhatjuk, hogy „a foton nem rendelkezik a 135°-os polarizációs iránnyal", mert az „áthalad-e az összes ugyanígy preparált foton a 135°-os polarizátorlemezen?" kérdésre *mindig* a „nem" választ kapjuk. Azonban azt már *nem* mondhatom, hogy egy 45°-osan polarizált foton *nem* rendelkezik a vízszintes polarizációs tulajdonsággal, mert ha ez a foton ráesik egy vízszintes irányú polarizátorlemezre, akkor a foton *lehet,* hogy áthalad. De azt sem mondhatom, hogy ez a foton rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, mert a foton néha elnyelődik.

Másik példa: a merev falú dobozba zárt elektronra igaz az a tulajdonság, hogy az elektron rendelkezik az adott térrészben tartózkodás tulajdonságával, mert a „megtalálom-e a részecskét a dobozban?" kérdésre mindig „igen"-nel felelek. Természetesen ekkor a „dobozon kívül levés" tulajdonságával már nem rendelkezik. Azonban a mérés „az adott x hely piciny környezetében van" tulajdonságra felelhet statisztikusan „igen"-nel és „nem"-mel is,[4] ezért ezek a tulajdonságok az azonos állapotú részecskesokaságra nem ruházhatók rá.

Az A és B fizikai tulajdonságok **egymást kizárók**, ha a „rendelkezik-e az azonos módon preparált részecskesokaság az A tulajdonsággal" kérdésre a mérés eredménye mindig „igen", míg a „rendelkezik-e az azonos módon preparált részecskesokaság a B tulajdonsággal" kérdésre pedig a mérés mindig a „nem" választ adja. A fénypolarizáció jelenségében ilyen például a vízszintes és a függőleges irányú polarizációs tulajdonság, mert ha egy fény függőlegesen polarizált, akkor vízszintesen nem az. Hasonló továbbá egy az elektron két lehetséges elkülönülő helytartománya is. Ha megmérem, hogy az elektron két rés közül az egyiken megy át, akkor a másikon biztosan nem ment át. Azaz, ha az egyikre igen a válasz akkor a másikra nem. Jól tudjuk, hogy a hullámfüggvény éppen ilyen egymást kizáró helyeknek megfelelő állapotok végtelen szuperpozíciójaként áll elő, azaz ezek a lehetséges helyek *ortogonális állapotokat* jelentenek. Sőt bármilyen mérhető fizikai mennyiséghez tartozó bázisvektorok egymást kizáró tulajdonságnak feleltethetők meg, mert azok egymásra ortogonálisok.

Az A és B fizikai tulajdonságok **összeegyeztethetők**, ha ez a két tulajdonság egyszerre érvényes a részecskékre, tehát egyszerre mérhetők. Ilyen például a fotonnak két egymással ellentétes polarizációs iránya. Ez pedig a két fizikai tulajdonsághoz tartozó méréshez rendelt operátorok *közös sajátvektorainak* (közös bázisnak) következménye.

Az A és B fizikai tulajdonságok **nem összeegyeztethetők**, ha a két tulajdonság nem jellemezheti egyszerre a részecskéket, egyszerre nem mérhetők. Például nem mondhatom azt, hogy egy függőleges irányú polarizációs tulajdonsággal rendelkező foton rendelkezik a 45°-os irányú polarizációs tulajdonsággal. Sőt, ha esetleg valahogyan meg is oldom azt, hogy immár a foton rendelkezzen ezzel a tulajdonsággal, akkor már nem mondhatom azt, hogy függőlegesen polarizált. Azaz a két tulajdonság nem fér össze, mert ezek olyanok, hogy az őket definiáló mérésekhez rendelt operátoroknak nincs közös bázisa. Ha az egyik tulajdonságra „igen" a válasz, akkor a másikra „talán".

A *határozatlansági elv* ebben az értelmezésben azt fejezi ki, hogy *vannak olyan fizikai tulajdonságpárok, amelyek nem összeegyeztethetők,* matematikai megfogalmazásban nincs közös bázisuk. Így az egyik fizikai tulajdonságra vonatkozó fizikai mennyiség mindig szór, ezért is hívhatjuk ezt határozatlanságnak vagy bizonytalanságnak.

[4] Itt feltételezzük azt, hogy az adott x piciny környezete nem azt a helyet jelöli, ahol az elektront leíró Ψ hullámfüggvény zérus.

Úgy gondolom, hogy a határozatlanság megközelítése a fizikai tulajdonság fogalmán keresztül általánosabban értelmezi a határozatlansági törvényt, *amit a középiskolás diákok is megérthetnek* a fénypolarizáció jelenségén keresztül.

A polarizáció szórásának meghatározása középiskolai módszerekkel

Diákjaink első feladata megérteni azt, hogy a polarizációs mérések két kimenetelre vezethetnek: vagy áthalad a foton (+1), vagy elnyelődik (−1). Hogy melyiket mérjük, függ a foton α polarizációs szögétől. Ha ez közel van a polarizátorlemez irányához, akkor nagy valószínűséggel +1 értéket kapunk. A helyzet hasonló a matematikaórákon is megjelenő fej-vagy-írás dobáshoz, de „cinkelt” érmével, amely esetleg nagyobb valószínűséggel fordul az egyik oldalra, mint a másikra, ezért az átlag nem feltétlenül nulla. A Malus-törvény alapján tudjuk, hogy egy foton áthaladásának valószínűsége $p = \cos^2\alpha$, elnyelődésének valószínűsége pedig $(1-p) = \sin^2\alpha$. Ez alapján középiskolás eszközökkel számolhatunk várható értéket és szórást. A várható érték jelentése, hogy átlagosan körülbelül mit mérnénk a két lehetséges (+1 és −1) kimenetelekből.

Ha a foton a vízszinteshez képest α szögben polarizált, akkor a mért értékek várható értéke a vízszintes, B polarizátorlemez esetén:

$$\langle B\rangle = p\cdot(+1) + (1-p)\cdot(-1) = 2p-1 =$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha).$$

Valóban, az $\alpha = 0$ esetben mindig teljesen biztosan +1-et, míg $\alpha = \pi/2$ esetén pedig mindig teljesen biztosan −1-et mérünk.

A szórásnégyzet (variancia) esetén a várható értéktől mért eltérés négyzetét kell átlagolnunk, azaz

$$(\Delta B)^2 = p\cdot(1-\langle B\rangle)^2 + (1-p)\cdot(-1-\langle B\rangle)^2.$$

A $\langle B\rangle = 2p-1$ eredményt felhasználva a szórásnégyzet így

$$(\Delta B)^2 = 4p\cdot(p-1) = 4\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha = \sin^2(2\alpha).$$

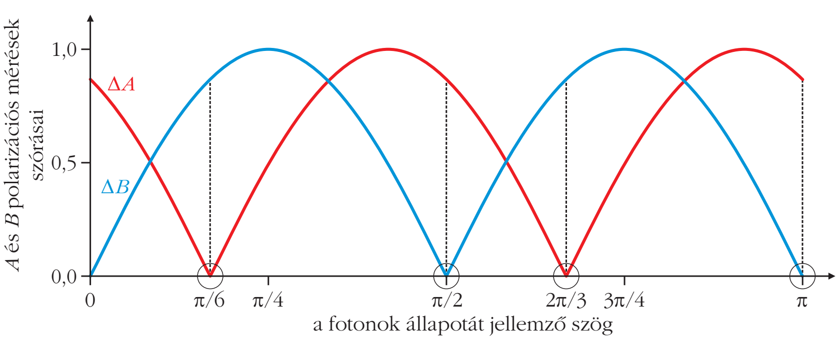
A szórás maga tehát

$$\Delta B = |\sin(2\alpha)|.$$

Hasonlóképpen elvégezhetjük ezt a számítást az A polarizátorlemezre is, ahol az áthaladás valószínűségéhez szükséges szöget a foton polarizációs irányát jellemző α szög és a polarizátorlemez helyzetét jellemző 30°-os szög eltérése adja: $\theta = \alpha - 30°$. Így

$$\Delta A = |\sin(2\alpha - 60°)|,$$

általában pedig ha X polarizációs iránya a vízszintessel ϕ szöget zár be, akkor $\Delta X = |\sin(2\alpha - 2\phi)|$. Tehát a polarizátorlemezek helyzetének változtatása a függvénygörbe vízszintes eltolásaként jelenik meg. A kapott két szórás függ a fotonok polarizációs állapotától. A kapott szórásfüggvényeket a *4. ábra* szemlélteti.



4. ábra. A fotonok állapotára vonatkozó két szórás egymástól független változik, ezért az állapotot változtatva mindkét fizikai mennyiség szórása akár *egyszerre csökkenhet* is.

A *4. ábra* legfontosabb tanulsága, hogy amikor az egyik szórás eltűnik, a másik nullától eltérő véges értéket ($\sqrt{3}/2$) vesz fel. Ezeket az állapotokat karikák jelölik az ábrán. Látjuk azt is, hogy a szórások a fotonok állapotának függvényében egymástól függetlenül változnak. Az ábra azt is szemlélteti, hogy a kétállapotú rendszerek szórása mindig véges, ezért nem is lehetséges, hogy a végtelenbe „elszálljanak”. Ez viszont a megszokott értelmezésbe, miszerint „az egyik fizikai mennyiség szórásának 0-hoz közelítése a másik fizikai mennyiség szórásának teljes elmosódottságával járna” nem illik bele. *Az így kapott határozatlansági egyenlőtlenség pusztán abból következik, hogy az egyik fizikai mennyiséghez rendelt operátornak biztosan van véges szórása.*

Összegzés

Írásomban rámutattam, hogy a középiskolában tanított, valamely részecske helyének és lendületének egyszerre elvégzett mérésére vonatkozó határozatlansági egyenlőtlenség az általános határozatlansági elv különleges esete. A határozatlansági egyenlőtlenség mindig a *két fizikai mennyiségnek a kvantumrendszer valamilyen állapotában mért átlagértékeire vonatkozik,* ezért az egyenlőtlenség jobb oldalán nem mindig áll nullától különböző érték.

A határozatlansági elv lényege az, hogy *léteznek olyan fizikai mennyiségek, amelyek nem mérhetők egyszerre tetszőleges pontossággal,* ami megengedi, hogy bizonyos állapotokban a mért mennyiségek elvi szórásának szorzata nulla legyen. Például kétállapotú rendszeren mért mennyiségek mérésének szórása sosem lehet végtelen, ezért, ha van olyan állapot, amelyen az egyik mennyiség elvi szórása nulla, akkor a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán olyan függvénynek kell állnia, amely bizonyos állapotokban eltűnik (pontosan ott, ahol az egyik mennyiség mérésének szórása nulla).

Bemutattam, hogy a kvantummechanika modellezésére alkalmas fotonpolarizációt használó tananyagban a határozatlansági elv lényege értelmezhető, mert a polarizátorlemezek alkalmazásának sorrendje nem felcserélhető. Így modellezhető velük az a helyzet, hogy az egyik polarizátorlemezen az áthaladásnak mindig van nemnulla szórása, és az egyiké (és csakis az egyiké) lecsökkenthető pontosan nullára (ha a két polarizátorlemez polarizációs iránya nem egyirányú, illetve nem merőleges). Ugyanakkor a polarizáción alapuló tananyagból levezethető $\Delta A \cdot \Delta B \geq 0$ egyenlőtlenség a hely és lendület egyidejű mérésére vonatkozó bizonytalanságot nem képes kifejezni. A polarizáción alapuló tanításban ezért a szórások szimultán eltűnésének lehetetlenségét érdemes hangsúlyozni, és csupán megemlíteni érdemes, hogy vannak olyan mennyiségpárok, ahol a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán nullától különböző mennyiség áll.

Irodalom

1. A cikk szerzője által áttanulmányozott magyar nyelvű határozatlansági relációt említő középiskolás tankönyvek és ismeretterjesztő irodalmak, ezenfelül a kvantummechanikát feldolgozó egyetemi könyvek, jegyzetek és a téma tanításával kapcsolatos cikkek megtalálhatók a http://theorphys.elte.hu/fiztan/QMirod honlapon.
2. M. Michelini, R. Ragazzon, L. Santi, A. Stefanel: *Quantum physics as a way of thinking: an educational proposal.* Physics teacher education beyond 2000, Girep book of selected papes, Elsevier, Paris (2001) 479–482.
3. M. Michelini, R. Ragazzon, L. Santi, A. Stefanel: Proposal for quantum physics in secondary school. *Physics Education 35/6* (2000) 406–410.
4. Gesche Pospiech, Marisa Michelini, Alberto Stefanel, Lorenzo Santi: Central features of quantum theory. In *Physics education, in Frontiers of Physics Education*. R. J.-Sepic et al eds., Zlatni, Rijeka, (2008) 93–101.
5. Lásd a honlapom: https://kvantummechanikus.wordpress.com/ (2020. 10. 01.)
6. P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics.* 4th ed., Clarendon, Oxford (1958).
7. Patkós András: *Bevezetés a kvantumfizikába: 6 előadás Feynman modorában*. Typotex, Budapest (2012).
8. https://quantumgame.io/ (2020.10.26.)
9. Gálfi László, Rácz Zoltán: *Elméleti fizikai példatár 3.* Tankönyvkiadó, Budapest (1983) 10–11.
10. Leonard Eisenbud: *The conceptual foundations of quantum mechanics.* AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, RI, USA (2007).