

# A GÁZOK POLITROPIKUS ÁLLAPOTVÁLTOZÁSÁIRÓL

Siposs András  
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium

Az ideális gázok azon állapotváltozását nevezzük politropikusnak, amelynek során a  $pV^z$  szorzat állandó (ahol  $p$  a gáz nyomása,  $V$  a térfogata,  $z$  pedig egy – lényegében tetszőleges – valós szám, a politropikus kitevő.<sup>1</sup> Az állandó szorzat (az általános gáztörvény miatt):  $nRTV^{z-1}$ .

Rögtön a cikk elején említjük meg, hogy a gázok négy fő nevezetes állapotváltozása, alkalmas kitevő választásával, mind leírható politropikus változásként. Az izotermikus változás  $z = 1$ , az izobár  $z = 0$ , az adiabatikus

$$z = \kappa = \frac{f+2}{f}$$

esetben valósul meg ( $f$  a termodinamikai szabadsági fokok száma). A hatványozást mintegy határértékként kiterjesztve, a  $z = \infty$  választással az izochor változás is leírható.

Vizsgáljuk meg az egyes állapotjelzők változását egy ilyen folyamatban! Induljunk ki abból, hogy a kezdeti térfogat az  $i$ -szeresére változik:

$$V_2 = i V_1. \quad (1)$$

Ekkor az új nyomás:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1^z}{V_2^z} = \frac{p_1 V_1^z}{i^z V_1^z} = \frac{1}{i^z} p_1 = i^{-z} p_1 (= j p_1), \quad (2)$$

az új hőmérséklet pedig

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{p_1 i V_1}{i^z nR} = \frac{1}{i^{z-1}} T_1 = i^{1-z} T_1$$

<sup>1</sup>Bár a szakirodalomban a kitevőre általában az  $n$  jelölés a használatos, ez nem szerencsés, mert összekeverhető az általános gáztörvény ( $pV = nRT$ ) miatt a témában szintén felbukkanó anyagmennyiség jelével, különösen az olyan származékképletekben, ahol már nem a kitevő pozíciójában szerepel.



Siposs András matematika–fizika tanár, sokszoros tankönyv- és példatárszerző, kutatótanár, szaktanácsadó, vezetőtanár, Ericsson-díjas. Emellett dalszerző, aktív zenész, az indián kultúra kutatója, háromgyermekes apuka.

lesz. Az energiaviszonyok szempontjából fontos hőmérséklet-változás pedig:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (i^{1-z} - 1) T_1. \quad (3)$$

A gáz belső energiájának változása:

$$\Delta E = \frac{fR}{2M} m \cdot \Delta T = \frac{fR}{2} n \cdot \Delta T. \quad (4)$$

A térfogati munka:

$$\Delta W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{áll.}}{V^z} dV = - \text{áll.} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^z} dV.$$

Itt  $z$ -től függően kétféle primitív függvénnyel lehet dolgoznunk:  $z = 1$  esetén  $\ln V$  és  $z \neq 1$  esetén

$$\frac{V^{-z+1}}{-z+1} \left( = \frac{V^{1-z}}{1-z} \right);$$

az állandó pedig  $nRT_1 V_1^{z-1}$ . Az első esetben tehát (amely a fentiek szerint az izoterm változás)

$$\Delta W = - nRT_1 V_1^{1-1} [\ln V]_{V_1}^{V_2} = - \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) nRT \quad (5)$$

(amint jól ismert, és a hőmérséklet állandósága miatt nem is írtunk neki indexet). A második esetben pedig

$$\begin{aligned} \Delta W &= - nRT_1 V_1^{z-1} \left[ \frac{V^{1-z}}{1-z} \right]_{V_1}^{V_2} = \\ &= - \frac{nRT_1 V_1^{z-1}}{1-z} (V_2^{1-z} - V_1^{1-z}) = \\ &= \frac{nRT_1 V_1^{z-1}}{z-1} (i^{1-z} V_1^{1-z} - V_1^{1-z}) = \\ &= \frac{nRT_1}{z-1} (i^{1-z} - 1), \end{aligned}$$

ami (felhasználva (3)-at):

$$\frac{nR \cdot \Delta T}{z-1}. \quad (6)$$

Ha mi végzünk munkát a gázon, szokás értelmezni a (0 és 1 közé eső)

$$\frac{\Delta E}{\Delta W} = \alpha \quad (7)$$

hányados, azt érzékeltetendő, hogy a munkavégzésünk hányadrésze fordítódott a gáz belső energiájának növelésére (a többit hőként leadta). A  $z \neq 1$  esetben véve a (4) és (6) alatti mennyiségek hányadosát,

$$\alpha = \frac{\frac{fR}{2} n \cdot \Delta T}{\frac{nR \cdot \Delta T}{z-1}} = \frac{f(z-1)}{2}. \quad (8)$$

(A  $z = 1$ , izoterm esetben a hányados

$$\alpha = \frac{\frac{fR}{2} n \cdot \Delta T}{-\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) n R T},$$

ami  $\Delta T = 0$  miatt maga is 0, és ez érdekes módon „kijön” a (8) alatti, általános esetbeli képletből is, éppen  $z = 1$  miatt.) Átrendezve, a politropikus kitevő

$$z = \frac{2\alpha}{f} + 1. \quad (9)$$

Átalakítva:

$$1 - \alpha \frac{-2}{f} = 1 - \alpha \frac{f - (f+2)}{f} = 1 - \alpha \left(1 - \frac{f+2}{f}\right),$$

vagyis végül a

$$z = 1 - \alpha(1 - \kappa) \quad (10)$$

alakot kapjuk.<sup>2</sup> (Kiváló összhangban van ez a speciális folyamatok azon, könnyen meggondolható eseteivel, hogy az adiabatikus változás során  $\alpha = 1$  és  $z = \kappa$ , valamint az izoterm változás során  $\alpha = 0$  és  $z = 1$ .)

A hőtan első főtétele:

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta W. \quad (11)$$

Terjesszük ki az  $\alpha$  hányados fenti értelmezését más folyamatokra is – ekkor előfordulhat negatív értéke (például a gáz végzett munkát, miközben belső energiája nőtt, mert hőt vett fel – vagy mindez fordítva történt), vagy 1-nél nagyobb értéke is (a főtétel mindhárom szereplőjének változása azonos előjelű). Ekkor írhatjuk:

$$\alpha \cdot \Delta W = \Delta Q + \Delta W,$$

vagyis

$$(\alpha - 1) \Delta W = \Delta Q. \quad (12)$$

<sup>2</sup>Ez a képlet – nyilván csak sajnálatos sajtóhiba folytán – tévesen szerepel Holics L., Flórik Gy.: *Fizika* (Akadémiai Kiadó, 2009) című művének 374. oldalán. (Basa István [ELTE Apáczai Gimnázium] észrevétele).

A hatásfokot hagyományosan olyan folyamatokban értelmezzük, amelyben a gáz hőt vesz fel, cserében munkát végez nekünk:

$$\eta = \frac{-\Delta W}{\Delta Q}, \quad (13)$$

alapesetben ez is 0 és 1 közé eső érték. Ezt is értelmezhetjük kiterjesztően, ekkor itt is előfordulhat negatív érték (például a gáz munkát végzett nekünk, miközben még hőt is adott le – vagy fordítva), vagy 1-nél nagyobb érték (a gáz a felvett hőt kívül még a belső energiája, „tartaléka” egy részét is munkavégzésre fordította – persze mindezen említett folyamatok elvi lehetőségek, hogy miként kell ezt technikailag megvalósítani, az más kérdés). A (12) és (13) képletek összevetésével:

$$\eta = \frac{-\Delta W}{(\alpha - 1) \Delta W} = \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (14)$$

De összefüggést teremthetünk a hatásfok és politropikus kitevő között is, (8) és (14) révén:

$$\eta = \frac{2}{2 - f(z-1)}. \quad (15)$$

Vizsgáljuk meg a folyamatbeli hőcserét is! A (11) első főtételt (7) révén így is írhatjuk:

$$\Delta E = \Delta Q + \frac{\Delta E}{\alpha},$$

átrendezve

$$\Delta Q = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \Delta E = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{fR}{2M} m \cdot \Delta T. \quad (16)$$

Másfelől, mint szokásos,  $\Delta Q = c m \cdot \Delta T$ , amiből a fajhőre:

$$c = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{fR}{2M}, \quad (17)$$

illetve (8) révén

$$c = \frac{f(z-1) - 2}{z-1} \frac{R}{2M} = \left(\frac{f - \frac{2}{z-1}}{2M}\right) R. \quad (18)$$

Ellenőrzésül: szépen adódik az izobár ( $z = 0$ ) esetben, hogy

$$c_p = \frac{(f+2)R}{2M}$$

és az izochor ( $z \rightarrow \infty$ ) esetben

$$c_v = \frac{fR}{2M}.$$

Az Olvasóra bízunk az adiabatikus

$$z = \kappa = \frac{f+2}{f}$$

esetbeli  $c_a = 0$ , és az izoterm ( $z = 1$ ) esetbeli „ $c_T$  nem értelmezhető” (illetve  $c_T \rightarrow -\infty$ ) igazolását.

## A vizsgált mennyiségek egymás közti összefüggései.

	$z$	$\alpha$	$\eta$	$c$	$x$
$z$		$1 - \alpha(1 - \kappa)$	$\frac{2(\eta - 1)}{\eta f} + 1$	$1 - \frac{2R}{2cM - fR}$	$\frac{x - 2}{x}$
$\alpha$	$\frac{f(z-1)}{2}$		$\frac{\eta - 1}{\eta}$	$\frac{fR}{fR - 2cM}$	$-\frac{f}{x}$
$\eta$	$\frac{2}{2 - f(z-1)} = \frac{\kappa - 1}{\kappa - z}$	$\frac{1}{1 - \alpha}$		$1 - \frac{fR}{2cM}$	$\frac{x}{x + f}$
$c$	$\left(\frac{f - \frac{2}{z-1}}{2M}\right)R = \frac{fR}{2M} \frac{z - \kappa}{z - 1}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{fR}{2M}$	$\frac{fR}{2M(1 - \eta)}$		$\frac{(f + x)R}{2M}$
$x$	$\frac{2}{1 - z}$	$\frac{2}{\alpha(1 - \kappa)} = -\frac{f}{\alpha}$	$\frac{\eta f}{1 - \eta}$	$\frac{2cM}{R} - f$	

A későbbiek kedvéért érdemes tetszőleges folyamat fajhőjét

$$c = \frac{(f + x)R}{2M} \quad (19)$$

alakban is felírni. Ekkor (18) miatt

$$x = \frac{2}{1 - z}, \quad (20)$$

illetve tovább (10) révén

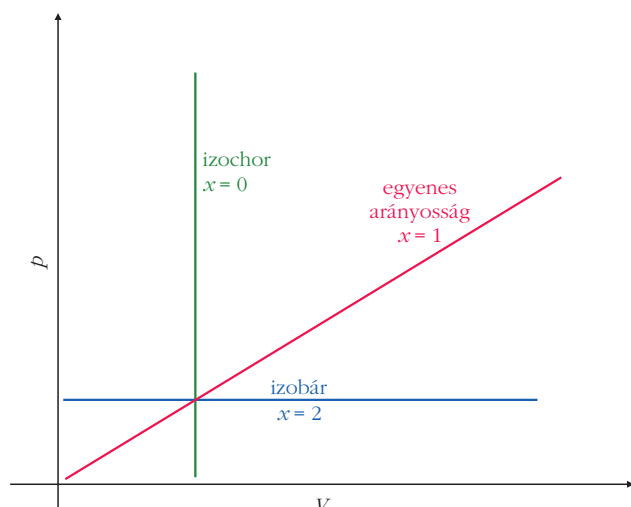
$$x = \frac{2}{\alpha(1 - \kappa)}, \quad (21)$$

illetve még tovább,  $\kappa$  definíciója miatt

$$x = -\frac{f}{\alpha}. \quad (22)$$

Bármelyikből alkalmas helyettesítéssel adódik az izobár esetre  $x = 2$ , izochorra  $x = 0$ , adiabatikusra  $x = -f$ , izotermre pedig „ $x$  nem értelmezhető” (illetve  $x \rightarrow -\infty$ ).

1. ábra



2. táblázat

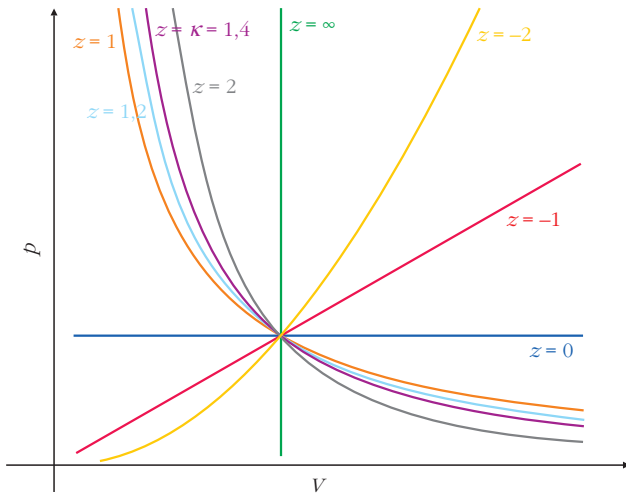
## A nyolc (többé-kevésbé) nevezetes folyamat tárgyalt jellemzői.

	$z$	$\alpha$	$\eta$	$c$	$x$
izoterm	1	0	1	$-\infty$	$-\infty$
izobár	0	$-\frac{f}{2}$	$\frac{2}{2+f}$	$\frac{(f+2)R}{2M}$	2
izochor	$\infty$	$\infty$	0	$\frac{fR}{2M}$	0
adiabatikus	$\kappa = \frac{f+2}{f}$	1	$\infty$	0	$-f$
egyenes arányosság	-1	$-f$	$\frac{1}{1+f}$	$\frac{(f+1)R}{2M}$	1
$pV^2$ állandó	2	$\frac{f}{2}$	$\frac{2}{2-f}$	$\frac{(f-2)R}{2M}$	-2
$\frac{p}{V^2}$ állandó	-2	$-\frac{3f}{2}$	$\frac{2}{2+3f}$	$\left(\frac{f+\frac{2}{3}}{2M}\right)R$	$\frac{2}{3}$
$pV^{1.2}$ állandó	1,2	$\frac{f}{10}$	$\frac{10}{10-f}$	$\frac{(f-10)R}{2M}$	-10

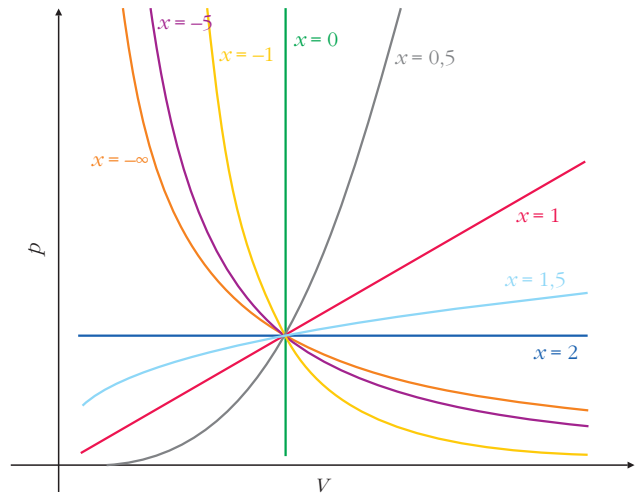
Tanulságos az 1. táblázatba foglalni a megvizsgált mennyiségek egymás közti összefüggéseit.

A négy, már ismert fő nevezetes folyamaton kívül további, bizonyos szempontból speciális állapotváltozások is találhatóak a politropikusok között. Elsősorban ilyen az, amelynek során a nyomás és a térfogat egymással egyenesen arányos<sup>3</sup>, ( $p/V$ , avagy – hogy jól láthatóan politropikus legyen –  $pV^{-1}$  állandó), e folyamat képe a  $p$ - $V$  diagramon egy az origón áthaladó egyenes egy szakasza. Ekkor persze  $z = -1$ , és az 1. táblázat szerint kiszámíthatjuk a többi, már tárgyalt jellemzőt, amelyek közül a legérdekesebb, hogy  $x = 1$ , azaz a fajhő

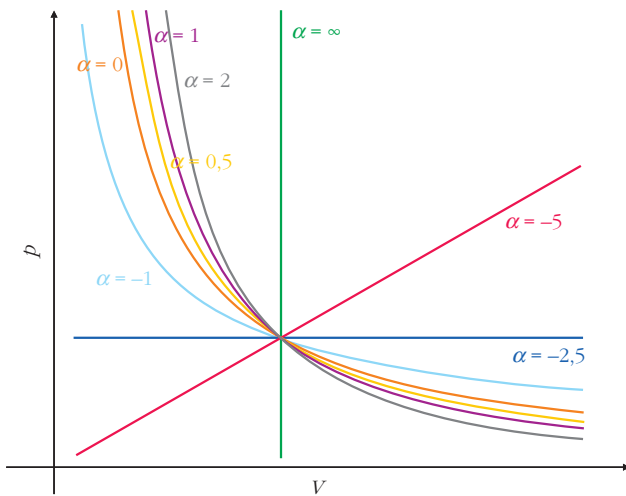
<sup>3</sup>Lásd például Siposs A.: *Türelőkönyv – Fizika feladatgyűjtemény középiskolásoknak*. (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2018) 587. feladat.



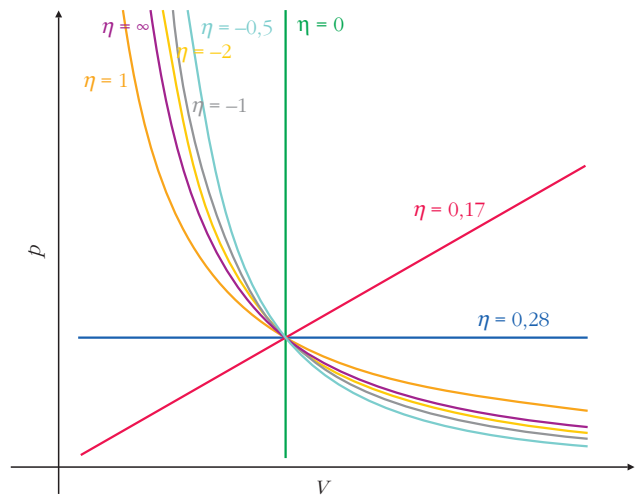
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

$$c = \frac{(f+1)R}{2M}$$

A  $p$ - $V$  diagramon ábrázolva ezt az egyenes arányosságot az izochor és az izobár folyamattal együtt, tanulságos, hogy grafikusán miként helyezkednek el rendre az  $x = 0; 1; 2$  esetek (1. ábra).

Ugyancsak érdekes lehet a  $pV^2$  állandó folyamat (vagy más megközelítésben:  $V\sqrt{p}$  állandó<sup>4</sup>), vagy a  $p/V^2$  (azaz  $pV^{-2}$ ) állandó, vagy például a  $pV^{1,2}$  állandó<sup>5</sup>. A 2. táblázatba foglaltuk ezen nyolc (többé-kevésbé) nevezetes folyamat tárgyalt jellemzőit.

E nyolc folyamat a  $p$ - $V$  diagramon (2. ábra) a következő öt nevezetes (izoterm, adiabatikus [kétatomos gázzal], izochor, egyenes arányosság, izobár) és a 2. táblázatban vizsgált három másik kitevő esete. Érde-

<sup>4</sup>Lásd például Siposs A. idézett könyve 588. feladatát.

<sup>5</sup>A már említett Holics-Flórik: könyv csak az 1 és  $\kappa$  közti kitevőjű folyamatokat tárgyalja politropikusként, mint az adiabatikushoz képest nem tökéletes hőszigetelés esetén megvalósulókat, és ezért a gyakorlatban fontosakat. Olyan szempontból is érdekesek az ilyen folyamatok, hogy – mint az 1. táblázat alapján könnyen látható – ekkor (és csak ekkor) a fajhő negatív, vagyis a gáz hőt ad le, miközben melegszik (vagy fordítva).

mes „tartományként” áttekinteni, hol miként változik a politropikus kitevő: 0-tól 1-ig, 1-től  $\infty$ -ig, és (mintha „átfordulna” a számegeyes „túlso végére”)  $-\infty$ -tól 0-ig. A 2. táblázat segítségével ugyancsak megvizsgálható, eközben hogyan változik a többi jellemző:  $\alpha, \eta, c, x$ .

Ezek közül az 1. ábrában már láttuk az  $x = 0; 1; 2$  esetet. Érdekes most további nevezetes értékeket feltüntetve megvizsgálni, szemléletessé tenni, ez a jellemző melyik tartományban hogyan változik (3. ábra). Az öt nevezetes (az előző ábrával azonos színkódú) folyamat mellett az  $x = -1; 0,5; 1,5$  eseteket tüntettük fel. (Ezzel lényegében a fajhőket is megvizsgáltuk.)

Szintén érdekes konkrétan feliratozva megvizsgálni  $\alpha$  szerint a nevezetes folyamatokat, és még három másik esetet ( $-1; 0,5; 2$ ) (4. ábra).

Befejezőként nézzük meg ugyanígy az  $\eta$  hatásfok értékét, és annak változását az öt nevezetes folyamatban, és másik három további esetben ( $-2; -1; -0,5$ ) (5. ábra).

A  $p$ - $V$  diagramon egyenes vonallal (lineáris függvénnyel) jellemezhető állapotváltozások vizsgálatával egy későbbi cikkben foglalkozunk.