XXIV. ORSZÁGOS SZILÁRD LEÓ FIZIKAVERSENY – 2. rész

Sükösd Csaba
BME Nukleáris Technikai Intézet

A 24. Országos Szilárd Leó Fizikaverseny döntőjét 2021. április 23–25. közötti napokra terveztük, ám a koronavírus-járvány közbeszólt, és ebben az évben sem lehetett közös jelenléti döntőt tartanunk. A versenybizottság már a verseny meghirdetésekor megpróbált felkészülni arra, hogy a pandémia miatt nem lesz lehetőség a versenyzők és tanáraik éjszakai szállását Pakson megoldani. Ezért olyan forgatókönyvet is felvázoltunk a verseny meghirdetésekor, amely a döntőt egyetlen napra korlátozta volna. A járványügyi szabályozások még ezt is átírták: az iskolák számára kizárólag a saját diákok (és tanáraik) belépését engedélyezték, így sem a különböző iskolákból jött tanulók és kísérőtanáraik, sem pedig a versenybizottság tagjai nem léphettek volna be a Paksi Energetikai Technikum és Kollégium területére.

2020-ban hasonló helyzet adódott; akkor először elhalasztottuk a Verseny döntőjét, abban reménykedve, hogy az ősz folyamán sikerül megtartani, de végül a koronavírus-járvány ezt is keresztülhúzta. Így 2020-ban a döntő forduló megrendezése nélkül, csak az elődöntőben elért eredmények alapján tudtunk eredményt hirdetni.

A tanárok – és rajtuk keresztül a versenyzők is – erős nyomás alá helyezték a versenybizottságot, hogy ebben az évben mindenképpen rendezzük meg a döntőt, ami találkozott a versenybizottság véleményével, pusztán a kivitelezés módját kellett megtalálni. Első pillanattól világos volt, hogy a járványügyi szabályok miatt a döntő fordulót – ahogy a többit is – csak a résztvevő diákok iskoláiban lehet megrendezni. Ebből viszont néhány nem-triviális probléma is adódott.

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a versenybizottság *nem* feltételezi egyik versenyző diákról vagy egyik felkészítő tanárról sem, hogy nem megengedett módon viselkedik. Ugyanakkor, ha csak egyik versenyzőben (vagy tanárjában) felmerül a *gyanú,* hogy valaki más nem-megengedett eszközöket használt, az az egész verseny légkörét megmérgezheti. Ezért a versenybizottság mindent megpróbált elkövetni annak érdekében, hogy még a gyanú árnyéka se essen a verseny tisztaságára. Amikor Pakson tartjuk a döntőt, a jelenléti ellenőrzés miatt, ez viszonylag könnyen biztosítható. Most, hogy a döntőt is az iskolákban kellett megrendeznünk, olyan feltételeket és olyan szervezést kellett találjunk, amely minimalizálja a nem-megfelelő viselkedés esélyét.

Sajnos, a döntő *kísérleti* részéről le kellett mondani, hiszen a tervezett kísérlethez szükséges eszközök nincsenek meg az iskolákban.

A döntő *írásbeli* részét nyilván meg lehet rendezni az iskolákban, hiszen az elődöntőt is ott rendezzük. Ez azonban különbözik az elődöntőtől, hiszen a versenyzők dolgozatait a versenybizottság tagjai és nem a tanulók felkészítő tanárai értékelik. Ezért a diákok dolgozatait gyorsan – a nem-megengedett beavatkozási lehetőségeket minimalizálva – kellett eljuttatni a versenybizottság számára. Ezt egy kifejezetten a döntő számára létrehozott „Classroom” segítségével oldottuk meg. A legtöbb tanuló már ismerte ezt a felületet, hiszen a digitális oktatás során is találkozott vele. A tanulók az írásbeli rész végén visszakapták telefonjaikat a felügyelő tanártól, sorra lefényképezték a megírt dolgozat lapjait, és feltöltötték őket a „Classroom”-ba. Ennek a kipróbálására és „begyakorlására” a döntő előtt egy héttel minden tanuló számára lehetőséget adtunk, amelyet a tanulók ki is használtak. A fényképek pontos beérkezési időpontját a rendszer naplózta, így biztosítani lehetett, hogy az írásbeli forduló hivatalos befejezési időpontja és a fényképek beérkezési időpontja között mindössze néhány perc teljen el.

Sokat gondolkodtunk a döntő szimulációs fordulójának a végrehajthatóságán is. Itt a fő probléma abból adódott, hogy a programot számítógépen kell használni, viszont a verseny tisztasága érdekében a versenyzők nem férhetnek hozzá az Internethez. Tehát az általuk használt számítógépek nem csatlakozhatnak az Internetre, ugyanakkor ezen gépekre a verseny kezdetekor fel kell telepíteni a programot, és a verseny végén az eredményeket ezekről a gépekről el kell juttatni a versenybizottságnak. Mégpedig ugyancsak rövid időn belül. Azt a megoldást találtuk, hogy megkértük az iskolákat arra, hogy

a) a versenyzők számára biztosítsanak számítógépet, amely *nem* csatlakozik az Internethez;

Sükösd Csaba (1947) a BME címzetes egyetemi tanára, az ELFT elnökségi tagja. Kísérleti magfizikus, aki kísérleti munkáját nagyrészt külföldi kutatóintézetekben végezte. Kutatási területe a magreakciók, óriásrezonanciák és némely asztrofizikailag releváns magreakció vizsgálata radioaktív ionnyalábokkal. Marx György tanítványaként részt vett a 70-es évek MTA oktatási kísérletében. Azóta is szoros kapcsolata van a fizikatanárok közösségével, több tanár- és oktatással kapcsolatos program vezetője.

b) a nem fizika vagy természettudományi szakos felügyelő tanárnak legyen olyan számítógépe, amely viszont csatlakozik az Internethez;

c) legyen kéznél valamilyen eszköz (többnyire pen-drive), amellyel a tanári gép és a diákok gépe között át tudják vinni az adatokat;

d) a felügyelő tanárokat meghívtuk egy chat-szobába, ahol a versenybizottság néhány tagja folyamatosan jelen volt. Ezzel biztosítottuk az „egyenlő esélyt”, azaz, ha valamelyik versenyzőnél valamilyen probléma vagy kérdés felmerült, akkor az arra adott válaszról valamennyi versenyző azonnal értesülhetett a felügyelő tanáron keresztül. Ez a chat-szoba már az írásbeli forduló alatt is működött (bár nem minden iskola használta ki e lehetőséget).

Az iskolák nagyon együttműködők voltak, biztosították ezen feltételeket, amit ez úton is köszönünk nekik. Külön köszönöm *Tarján Péter,* a versenybizottság tagja segítségét a „Classroom” és a chat-szoba létrehozásában és üzemeltetésében.

A döntő számára létrehoztuk a http://sukjaro.eu/SzilardVerseny/ weblapot, amelyről a szükséges anyagok a döntő időpontjaihoz igazodva, „időzítve” voltak letölthetők. E weblap azóta is működik, de most már a döntő valamennyi dokumentuma folyamatosan elérhető, az időzítéseket kikapcsoltuk. E weboldalra a Verseny után az eredmények is felkerültek.

A fenti nehézségek ellenére – a kísérleti forduló kivételével – sikerült megrendezni a Verseny döntőjét. 2021. április 23-án, pénteken délelőtt került sor az írásbeli fordulóra, ugyanez nap délutánján pedig a szimulációs fordulóra.

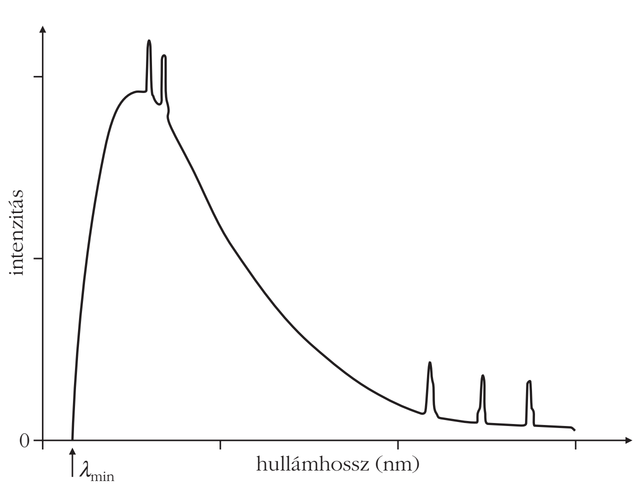
Az alábbiakban ismertetjük a döntő feladatait, valamint a számítógépes szimulációs feladatot is. Az első hét elméleti feladat közös volt mindkét korcsoportnak, a maradék három feladat pedig különböző.

1. feladat

kitűzte: *Mester András*

Egy röntgencsőben az elektronok $1{,}8 \cdot 10^8$ m/s sebességre gyorsulnak fel.

a) Hány százalékos lesz az elektronok tömegének látszólagos növekedése?



b) Mekkora feszültség gyorsítja az elektronokat?

c) A röntgensugárzás intenzitására vonatkozó ábrán a folytonos tartományt az anódba becsapódó elektronok úgynevezett „fékezési sugárzása” adja. Mekkora lesz a kibocsátott röntgensugarak $\lambda_{\min}$ legrövidebb hullámhossza?

d) Vajon mi okozza az ábrán látható „tüskéket” (a folytonos spektrumra rárakódó vonalas spektrumot)?

Megoldás

a) A sebesség jelentős növekedésével megnőtt a látszólagos tömeg:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{(0{,}6\,c)^2}{c^2}}} = 1{,}25 \cdot m_0,$$

azaz a tömeg látszólagos növekedése 25%-os.

b) Az elektromos tér munkája megegyezik az elektronok mozgási energiájának változásával. Figyelembe véve, hogy a mozgási energia értéke a relativisztikus összenergia és a nyugalmi energia különbsége, kapjuk:

$$e\,U = m\,c^2 - m_0\,c^2 = 0{,}25 \cdot m_0\,c^2.$$

Innen azonnal adódik:

$$U = \frac{0{,}25 \cdot m_0\,c^2}{e} \approx 128 \text{ kV}.$$

c) Mivel a fékezési sugárzás miatt az ábrán is látható folytonos spektrum jön létre, a legnagyobb fotonenergiát (legkisebb hullámhosszat) akkor kapjuk, amikor egy elektron teljes energiája egyetlen foton energiájává alakul. Az ehhez tartozó minimális hullámhossz:

$$e\,U = \frac{h\,c}{\lambda_{\min}}.$$

Ebből

$$\lambda_{\min} = \frac{h\,c}{e\,U} \approx 9{,}964 \cdot 10^{-12} \text{ m} \simeq 0{,}01 \text{ nm}.$$

d) A röntgensugárzás egyik összetevője a fékezési sugárzás, amely egy fotonenergia-tartományban folytonos, elektromágneses sugárzás. Az elektronokat gyorsító feszültségtől függ, hogy ez milyen hullámhossztartományt ölel át. A kis tüskék jelzik a röntgensugárzás másik összetevőjét, az úgynevezett karakterisztikus röntgensugárzást. Az anódba becsapódó elektronok az anód atomjainak valamely belső elektronhéjáról képesek kiütni egy-egy elektront. A kiütött elektron helyére magasabb héjakon lévő elektronok ugranak, a két elektronállapot energiája közötti különbséget jól meghatározott fotonenergiájú elektromágneses sugárzás formájában kibocsátva. Az így keletkezett – az anód anyagára jellemző – karakterisztikus sugárzás okozza a tüskéket.

2. feladat

kitűzte: *Sükösd Csaba*

Nem tudjuk pontosan, hogy egy koronavírus-vakcinával beoltott ember mennyi ideig marad védett a vírus ellen. Valószínűleg ez sok – eddig ismeretlen – tényezőtől függ (az immunrendszer állapota, egyéb biológiai tényezők stb.). Ezért vannak olyanok, akiknél a védettség rövid ideig tart, másoknál hosszabb ideig. Tegyük fel, hogy bár a védettség időtartama az egyes embereknél véletlenszerű és előre megjósolhatatlan, ám nagyon sok ember esetén a radioaktív atommagokhoz hasonlóan exponenciális eloszlású: azaz N beoltott emberből T „felezési idő” után már csak $N/2$ marad védett. (A valóságban ez valószínűleg nem így változik, de mivel nem ismerjük annak mechanizmusát, válasszuk ezt a modellt!). A járványügyi szakemberek szerint a „nyájimmunitást” akkor érjük el, ha egy adott idő után a lakosságnak legalább 60%-a védett lesz.

a) A 60% átoltottság elérése után legalább milyen, időben állandó sebességgel kell oltani az éppen nem immunis embereket ahhoz, hogy a védett személyek aránya ne csökkenjen 60% alá?

b) Hány főt kellene hetente beoltani egy tízmilliós lakosságú országban, ha például $T = 25$ hét?

Megoldás

A jelenség analóg a radioaktív egyensúllyal, amikor valamely folyamat révén radioaktív atommagok keletkeznek (például atomreaktorban, neutronbesugárzás hatására, vagy akár a légkörben kozmikus sugárzás hatására) és a radioaktivitásuk miatt el is bomlanak. E két folyamat egyensúlyba kerül: az aktivitás az egyensúly beállta után állandó marad. Esetünkben a „keletkezés” a védőoltás felvétele és az immunitás kialakulása, a „bomlás” pedig az immunitás megszűnése. Ezért ahhoz, hogy az egyensúly fennmaradjon, időegység alatt annyi személyt kell beoltani, amennyi „elbomlik”. Ez utóbbit az aktivitás fogalma fejezi ki a radioaktív atommagok esetén:

$$A = N\frac{\ln 2}{T}.$$

Esetünkben a meglévő „radioaktív” magok száma: a lakosság 60%-a. Így a szükséges V oltási sebesség:

$$V_{\text{oltás}} = 0{,}6 \cdot \frac{\ln 2}{T} \cdot N_{\text{népesség}}.$$

A feladat adataival:

$$V_{\text{oltás}} = 0{,}6 \cdot \frac{0{,}693}{25\ (\text{hét})} \cdot 10^7 = 166\,355\ \frac{1}{\text{hét}}.$$

b) Ennek alapján – állandó, folyamatos oltás esetén – t idő alatt beoltandó személyek száma:

$$N_{\text{oltott}}(t) = V_{\text{oltás}}\, t.$$

A fenti számadatot $t = 1$ héttel megszorozva éppen 166 355 személyt kapunk. Kicsit eltérő adatot kapunk akkor, ha az oltás nem folyamatos, hanem szakaszos: például hetente csak szombatonként oltanak. A védett emberek számának relatív változása egy hét alatt a bomlástörvény alapján:

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - 2^{-\frac{t}{T}} = 1 - 2^{-\frac{1}{25}} = 0{,}0273.$$

Tehát a védett emberek (a népesség 60%-a) 2,73%-a veszíti el hetente a védettségét. A konstans védettségi szint fenntartásához legalább ennyi embert kell hetente beoltani. A teljes lakosságnak ez 1,64%-a, tízmilliós lakosságnál ez 164 070 személy hetente. Ez mintegy 2300 személlyel kevesebb, mint a korábban kiszámított érték. Ez amiatt adódik, mivel a hét során nem oltunk, ezért a hét során az átoltottság 60% alá csökken. Azt csak a hét végén korrigáljuk vissza.

Megjegyzés: a versenyzőktől a fenti két megoldás bármelyikét helyesnek fogadtuk el.

3. feladat

kitűzte: *Halász Máté*

A rezonanciaabszorpció jelenségét (amit kibocsát, azt el is tudja nyelni) az atomi spektroszkópiában már meglehetősen korán megfigyelték, azonban a γ-sugárzás esetén sokáig nem sikerült kísérletileg kimutatni. Ennek oka az, hogy a γ-fotonnak sokkal nagyobb lendülete van, mint egy optikai fotonnak, amely miatt mind az elnyeléskor, mind a kibocsátáskor az atommag meglökődik (illetve visszalökődik), és mozgási energiát is kap. Emiatt elnyeléskor a belső energiaszintek E_0 különbségénél nagyobb energiájú γ-fotont képes csak elnyelni az atommag, foton kibocsátásakor pedig éppen fordítva: az E_0 energia egy része az atommag visszalökődésére fordítódik, és emiatt a kibocsátott γ-foton az E_0 energiánál kisebb energiával rendelkezik. Az egyik lehetséges mód a rezonanciaabszorpció megfigyelésére az, ha a forrást az elnyelő céltárgy felé nagy sebességgel mozgatjuk (például egy sebesen forgó korongra erősítve), és a Doppler-effektus segítségével küszöböljük ki a visszalökődésekből származó energiakülönbséget. Mekkora fordulatszámmal kell ehhez forgatnunk egy $r = 5$ cm sugarú korongot, amelynek kerületére egy $E_\gamma = 412$ keV energiájú gamma-sugárzást kibocsátó ^{198m}Hg sugárforrás van erősítve?

Adatok: a ^{198m}Hg atom tömege $M = 197{,}97$ u és 1 u = 931,49 MeV/c^2.

Megoldás

Az atommag meglökődési (fotonabszorpció) és a visszalökődési (fotonemisszió) energiáját a lendület- és energiamegmaradás törvényének segítségével számíthatjuk ki. A γ-foton lendülete a következőképpen fejezhető ki:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Mind az abszorpció, mind az emisszió esetén ekkora lendületet kap az atommag a lendületmegmaradás miatt. A két esetben csak a lendület iránya más: abszorpció esetén az atommag lendületének iránya megegyezik a fotonéval, az emisszió esetén pedig azzal ellentétes. Az atommag által kapott E_m mozgási energia azonban csak a kapott lendület négyzetétől függ, így az előjelnek nincs szerepe. Ezért ezt az energiamegmaradás egyenletébe helyettesítve a meglökődési, illetve visszalökődési energia a következő:

$$E_m = \frac{p_m^2}{2\,M} = \frac{E_\gamma^2}{2\,M\,c^2}.$$

A ^{198m}Hg 412 keV energiájú γ-vonala esetén ez az energia

$$E_m = 0{,}46 \ \text{eV}.$$

Ahhoz, hogy a céltárgyban lévő ^{198}Hg atommagok képesek legyenek elnyelni a forrás által kibocsátott γ-fotonokat, a Doppler-effektus segítségével $2\,E_m$ energiakülönbségnek megfelelő frekvenciaeltolódást kell elérnünk:

$$E'_\gamma = E_\gamma + 2\,E_m = E_\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

(Mivel a várható sebesség jóval kisebb a fénysebességnél, ezért elegendő volt a Doppler-effektus klasszikus képletével számolni.) A sebesség innen kifejezhető:

$$v = c\left(\frac{E_\gamma + 2\,E_m}{E_\gamma} - 1\right) = c\,\frac{2\,E_m}{E_\gamma} \approx 670\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A fordulatszám a sebességből és a korong sugarából számítható:

$$f = \frac{v}{2\,r\pi} \approx 2{,}13\cdot 10^3\ \frac{1}{\text{s}} = 1{,}28\cdot 10^5\ \frac{1}{\text{min}}.$$

Megjegyzés

A megoldás során történt egy elhanyagolás, amelyre nem hívtuk fel külön a figyelmet. A $p_\gamma = E_\gamma/c$ képlet számlálójában szereplő E_γ nem pontosan ugyanakkora az abszorpció és az emisszió során! A kettő között éppen $2\,E_m$ energiakülönbség van. Ebben a lépésben azonban ezt a

$$\frac{2\,E_m}{E_\gamma} \approx 10^{-6}$$

relatív eltérést elhanyagolhatjuk, mivel az eredményben ez már csak a második rendben okozna változást.

4. feladat

kitűzte: Sükösd Csaba

Becsüljük meg a határozatlansági reláció felhasználásával az egydimenziós harmonikus rezgőmozgást végző kvantumos részecske (oszcillátor) potenciális és kinetikus energiájának arányát az oszcillátor alapállapotában!

Megoldás

Alapállapotban az oszcillátor nem „mozog”, azaz lendületének várható értéke nulla: $\langle p\rangle = 0$. Az állapotfüggvény azonban véges kiterjedésű (Δx), és így a Heisenberg-összefüggés miatt Δp_x „lendületkiterjedése” is kell legyen. Ezek miatt az alapállapot energiája:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{(\Delta p_x)^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,D(\Delta x)^2.$$

Használjuk a Heisenberg-összefüggést (becslésünkhöz tegyük fel, hogy egyenlőség áll fenn, hiszen ekkor kerülünk a legközelebb a megszokott klasszikus esethez):

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2\,\Delta x}.$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk:

$$E = \frac{\hbar^2}{8\,m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}\,D(\Delta x)^2.$$

Alapállapotban e kifejezés minimumát keressük. Ehhez használjuk fel a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a\cdot b},$$

ahol az egyenlőség csak $a = b$ esetén áll fenn. Legyen az energiakifejezés két tagja:

$$\frac{a}{2} = \frac{\hbar^2}{8\,m(\Delta x)^2} \quad \text{és} \quad \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\,D(\Delta x)^2.$$

A fentiek alapján a minimumot akkor kapjuk, amikor $a = b$. Mivel $a/2 = E_{\text{kin}}$ és $b/2 = E_{\text{pot}}$, ezért

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{a}{b} = 1.$$

Megjegyzés #1

Egy további érdekes eredményt is megkaphatunk, bár a feladat erre nem kérdezett rá. Az

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

egyenlőségből kapjuk:

$$\frac{\hbar^2}{8\,m(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}\,D(\Delta x)^2.$$

Ebből

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{D\,m}}$$

és ezt visszahelyettesítve megkaphatjuk a harmonikus oszcillátor alapállapoti energiáját is:

$$E = \frac{\hbar^2}{8\,m\,(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}\,D(\Delta x)^2 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{8\,m}\,\frac{2}{\hbar}\sqrt{D\,m} + \frac{1}{2}\,D\,\frac{\hbar}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{D\,m}} =$$

$$= 2\,\frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{D}{m}}\,.$$

Figyelembe véve, hogy egy klasszikus harmonikus oszcillátorra

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}\,,$$

kapjuk végül:

$$E = \frac{1}{2}\,\hbar\,\omega\,.$$

Megjegyzés #2

Az egyik versenyző – a viriáltételre hivatkozva – $2\,E_{\mathrm{kin}} = -E_{\mathrm{pot}}$ hibás következtetésre jutott.

A helyes választ természetesen meg lehet adni a viriáltétel segítségével is, de figyelembe kell venni, hogy azokban a speciális esetekben, amikor a részecskék közötti kölcsönhatási potenciál a távolságtól $V(r) = C\,r^n$ alakban függ, akkor a viriáltétel értelmében $2\,\tilde{E}_{\mathrm{kin}} = n\,\tilde{E}_{\mathrm{pot}}$. Itt a „hullám” az átlagolást jelenti. A harmonikus oszcillátornál $n = 2$ – tehát parabolapotenciál –, így ebből azonnal adódik, hogy $\tilde{E}_{\mathrm{kin}} = \tilde{E}_{\mathrm{pot}}$.

5. feladat

kitűzte: *Papp Gergely*

A magas légkörben alacsony energiájú neutronok ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ atommagokkal való kölcsönhatása során keletkezhet ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ radiokarbon atommag. A radioaktív ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ atommag bomlásakor keletkező elektronok maximális energiája $E_0 = 0{,}156$ MeV.

a) Írjuk fel a ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ atommag bomlásának folyamatát!

b) Milyen részecske keletkezik még a következő reakcióban? $\mathrm{n} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + ?$

c) Milyen mozgási energiával keletkezik a ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ és a kérdéses részecske? (A bejövő neutron és a nitrogén mag mozgási energiáját hanyagoljuk el!)

Adatok: $m_{\mathrm{p}} = 938{,}272\ \mathrm{MeV}/c^2$, $m_{\mathrm{n}} = 939{,}565\ \mathrm{MeV}/c^2$, $m_{\mathrm{e}} = 0{,}511\ \mathrm{MeV}/c^2$.

Megoldás

a) A radiokarbon negatív béta-bomlással bomlik, azaz ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}$.

b) Tömeg- és töltésmegmaradás miatt proton kell keletkezzen: $\mathrm{n} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{p}$.

c) A keletkező részecske egy körülbelül 14 u tömegű ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ és körülbelül 1 u tömegű proton. Tehát a két részecske jó közelítéssel 1:14 arányban fog osztozni a reakcióenergián (számolhatnánk pontosabb értékkel is, de nem szükséges). A Q reakcióenergiát a tömegkülönbségekből lehet meghatározni:

$$m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{N}} = m_{\mathrm{C}} + m_{\mathrm{p}} + \frac{Q}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{c^2} = m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{N}} - m_{\mathrm{C}}\,.$$

Ezen a ponton két választásunk van: vagy kikeressük a táblázatból az atomtömegeket, vagy felhasználjuk a megadott adatokat. Az utóbbiak szerint a ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ bomlásakor keletkező elektron maximális energiája 0,156 MeV. Felírva erre az energiamegmaradást kapjuk

$$m_{\mathrm{C}} = m_{\mathrm{N}} + m_{\mathrm{e}} + m_{\bar{\nu}} + 0{,}156\ \mathrm{MeV}/c^2.$$

Ezt az egyenletet a fentivel kombinálva, és kihasználva, hogy $m_{\bar{\nu}} \approx 0$ elhanyagolható, kapjuk:

$$\frac{Q}{c^2} = m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{e}} - 0{,}156\ \mathrm{MeV}/c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = 939{,}565 - 938{,}272 - 0{,}511 - 0{,}156 =$$

$$= 0{,}626\ \mathrm{MeV}.$$

(Ez egyezik az irodalmi adattal.) Ezen az energián osztoznak körülbelül 1:14 arányban a radiokarbon és a proton, tehát $E_{\mathrm{p}} = 0{,}5843$ MeV és $E_{\mathrm{C}} = 0{,}0417$ MeV.

6. feladat

kitűzte: *Veres Gábor* és Tarján Péter

A ${}^{137}\mathrm{Cs}/{}^{137}\mathrm{Ba}$ „izotópgenerátort” gyakran használják a radioaktív bomlás bemutatására a Ba rövid felezési ideje miatt. A hosszú felezési idejű (~30 év) céziumot egy kis tartályban helyezik el, ahol folyamatosan termeli leányelemét, a báriumot. Szükség esetén a tartály belsejéből a báriumot ki lehet oldani (kémiai különbözősége miatt), míg a cézium benne marad.

Tegyük fel, hogy egy alkalmazáshoz kioldottuk a tartályban lévő összes báriumot. Mennyi ideig tart ezután, amíg a tartályban a Ba aktivitása újra eléri a Cs aktivitásának 90%-át?

Adatok: a ${}^{137}\mathrm{Cs}$ felezési ideje $T_1 = 30$ év, a ${}^{137\mathrm{m}}\mathrm{Ba}$ felezési ideje $T_2 = 2{,}55$ min.

Útmutatás: egy bomlási sor második tagjának aktivitása az idő függvényében általános esetben

$$A_2(t) = A_1(0)\,\frac{T_1}{T_1 - T_2}\left(2^{-t/T_1} - 2^{-t/T_2}\right),$$

ha a leányelem mennyisége kezdetben nulla.

Megoldás

A Cs (továbbiakban 1 indexű) és a Ba (a továbbiakban 2 indexű) elég hosszú idő után egyensúlyba kerülnek a Cs sokkal hosszabb felezési ideje miatt. Ilyenkor időegység alatt ugyanannyi Ba atom keletkezik a Cs bomlásából, mint amennyi Ba a radioaktivitás miatt elbomlik. Ez azt jelenti, hogy az aktivitásaik megegyeznek: $A_1(t) = A_2(t)$. (Ezt az állapotot szekuláris egyensúlynak hívjuk.) Miután a báriumot teljesen eltávolítottuk a tartályból, a mennyisége (és ezzel az aktivitása is) nulláról kezd el növekedni és tart a cézium aktivitásához a következő – az útmutatásban szerepelt – összefüggés szerint:

$$A_2(t) = A_1(0)\,\frac{T_1}{T_1 - T_2}\left(2^{-t/T_1} - 2^{-t/T_2}\right),$$

Emeljünk ki a zárójelből $2^{-t/T_1}$-et és vegyük észre, hogy

$$A_1(t) = A_1(0)\,2^{-t/T_1}.$$

Így kapjuk, hogy

$$A_2(t) = A_1(t)\,\frac{T_1}{T_1 - T_2}\left(1 - 2^{-t\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}\right).$$

A feladat szerint azt az időt keressük, amelyre igaz az, hogy $A_2(t)/A_1(t) = 0{,}9$. Azaz

$$0{,}9 = \frac{T_1}{T_1 - T_2}\left(1 - 2^{-t\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}\right).$$

Azonos átalakítás után

$$1 - 0{,}9\,\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 2^{-t\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}.$$

Mivel $T_1 \gg T_2$, ezért $(T_1 - T_2)/T_1 \approx 1$ és $1/T_2 \gg 1/T_1$. Ezeket figyelembe véve a kifejezés jelentősen leegyszerűsödik:

$$0{,}1 = 2^{-\frac{t}{T_2}}.$$

A keresett t idő logaritmálás után könnyen kifejezhető:

$$t = -T_2\,\frac{\ln(0{,}1)}{\ln 2} \approx 8{,}47\ \text{min}.$$

Megjegyzés

A zsűri azt is elfogadta, ha valaki a cézium hosszú felezési ideje miatt $A_1(t) = A_1(0)$ feltételezéssel élt.

7. feladat

kitűzte: Halász Máté

A napban lejátszódó p-p ciklusban a legtöbb neutrínó a $p + p \to d + e^+ + \nu$ fúziós reakcióból származik, azonban a legnagyobb energiájú neutrínók a Nap belsejében szintén jelen lévő ^8B atommagok pozitív β-bomlása során keletkeznek.

a) Számítsuk ki a kibocsátott neutrínók maximális energiáját a protonok fúziója esetén, illetve a ^8B pozitív β-bomlása során, ha a ^8Be leánymag 2,84 MeV energiájú gerjesztett állapotban keletkezik!

b) A 60-as évek végén végzett Davis-kísérletben a $\nu + {}^{37}Cl \to {}^{37}Ar + e^-$ magreakciót használták a Napban lejátszódó fúzióból származó neutrínók detektálására (a keletkező radioaktív argon aktivitását kibuborékoltatás után mérték meg detektorokkal). Mi a jelentősége a ^8B pozitív β-bomlása során keletkező neutrínóknak a Davis-kísérlet szempontjából?

Adatok: a feladatban szereplő atomok tömegei:
$M(^8B) = 8{,}024606$ u, $M(^8Be) = 8{,}005304$ u,
$M(^{37}Cl) = 36{,}965897$ u, $M(^{37}Ar) = 36{,}966770$ u,
$m(p) = 1{,}00727647$ u, $m(d) = 2{,}01355345$ u,
$m(e) = 5{,}48579909 \cdot 10^{-4}$ u és
$1\ u = 931{,}494102\ \text{MeV}/c^2 = 1{,}66053886 \cdot 10^{-27}$ kg.

Megoldás

a) Számoljuk ki a neutrínók maximális energiáját a két összehasonlítandó reakcióra:

A p-p fúzióra: $p + p \to d + e^+ + \nu$

$$E_{\max,1} = \left[2\,m_p - \left(m_d + m_e + m_\nu\right)\right]c^2 \approx$$
$$\approx \left(2\,m_p - m_d - m_e\right)c^2 = 0{,}420\ \text{MeV}.$$

A ^8B pozitív β-bomlására: $^8B \to {}^8Be^* + e^+ + \nu$

$$E_{\max,2} = \left\{M(^8B) - 5\,m_e - \left[M(^8Be) - 4\,m_e\right] - m_e\right\}c^2 -$$
$$- 2{,}84\ \text{MeV} =$$
$$= 14{,}06\ \text{MeV},$$

ahol figyelembe vettük, hogy a Nap belsejében a ^8B és a ^8Be atomok túlnyomó többségben teljesen ionizált állapotban vannak jelen.

A Davis-kísérletben használt magreakció kiváltásához szükséges minimális neutrínóenergia:

$$E_{\min} = -\left[m_\nu + M(^{37}Cl) - M(^{37}Ar) - m_e + m_e\right]c^2 \approx$$
$$\approx -\left[M(^{37}Cl) - M(^{37}Ar)\right]c^2 = 0{,}813\ \text{MeV}.$$

Tehát a kísérletben használt magreakciót a fentiek közül csak a ^8B pozitív β-bomlásából származó neutrínók voltak képesek kiváltani.

8. feladat (Junior kategória)

kitűzte: Sükösd Csaba

Anna és Berci egy laboratóriumi mérés jegyzőkönyvén vitatkoznak. A jegyzőkönyv szerint egy elektron mozgásával kapcsolatos mérést végeztek, és a mért adatok (többek között): $x = (0{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-10}$ m, valamint $v_x = (1{,}5 \pm 0{,}4) \cdot 10^7$ m/s. Anna szerint a mérésben biztosan van valami hiba, Berci szerint a mérés jó. Kinek van igaza és miért?

Megoldás

A Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés szerint $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$. Itt most $\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x$. Ebből azonnal adódik, hogy a mérési jegyzőkönyvben szereplő adatokkal:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x =$$
$$= 0{,}1 \cdot 10^{-10}\ (\text{m}) \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ (\text{kg}) \cdot 0{,}4 \cdot 10^7 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) =$$
$$= 3{,}64 \cdot 10^{-35}\ \text{Js},$$

ami kisebb, mint határozatlansági összefüggésből származott $\hbar/2 \approx 5{,}27 \cdot 10^{-35}$ Js, tehát a mérési hiba becslése nem lehet jó. Annának van igaza.

9. feladat (Junior kategória) kitűzte: *Radnóti Katalin*

A Paksi Atomerőműben 4 reaktor működik.

a) Becsüljük meg a 4 reaktorban található összes urán tömegét, ha tudjuk, hogy ennek 1,14%-a hasad el évente! Tegyük fel, hogy a felszabaduló energia nagyrészt az ^{235}U hasadásából ered, és egy évben 330 napot üzemel a reaktor.

b) Mekkora lenne a paksi erőművel azonos hőteljesítményű hőerőmű évi fűtőanyag szükséglete, ha az 2,45 MJ/kg fűtőértékű szenet használna?

c) Becsüljük meg a szénerőmű által évenként kibocsátott szén-dioxid gáz térfogatát normál állapotban! Milyen vastagon borítaná ez be Magyarország területét (93033 km^2)?

Adatok: egy reaktor hőteljesítménye P_{th} = 1485 MW, egy hasadásban felszabaduló energia 32 pJ.

Megoldás

a) Egy reaktor aktív zónájában naponta elhasadt ^{235}U magok száma:

$$\frac{\Delta N_\mathrm{U}}{\Delta t} = \frac{8{,}64 \cdot 10^4 \ (\mathrm{s/nap}) \cdot 1{,}485 \cdot 10^9 \ (\mathrm{J/s})}{3{,}2 \cdot 10^{-11} \ (\mathrm{J})} = $$

$$= 4{,}0095 \cdot 10^{24} \ \frac{1}{\mathrm{nap}}.$$

Naponta egy reaktorban elhasadt ^{235}U össztömege:

$$\frac{\Delta m_\mathrm{U}}{\Delta t} = \frac{4{,}0095 \cdot 10^{24} \ (1/\mathrm{nap})}{6{,}0221 \cdot 10^{23} \ (1/\mathrm{mol})} \cdot 0{,}235 \ (\mathrm{kg/mol}) =$$

$$= 1{,}5646 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{nap}}.$$

Évi 330 üzemnappal számolva az elhasadt ^{235}U tömege 516,32 kg/év egy blokkra. Az ehhez szükséges üzemanyagtöltet egy blokkra:

$$m_\mathrm{U} = \frac{516{,}32 \ (\mathrm{kg/év})}{0{,}01141 \ (1/\mathrm{év})} = 45291 \ \mathrm{kg} \approx 45 \ \mathrm{t},$$

azaz a 4 blokkra körülbelül 181 tonna.

b) A szükséges szén tömege 4 reaktorblokkra számolva:

$$\frac{\Delta m_\mathrm{szén}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{4 \cdot 86400 \ (\mathrm{s/nap}) \cdot 1{,}485 \cdot 10^9 \ (\mathrm{W}) \cdot 330 \ (\mathrm{nap/év})}{24{,}5 \cdot 10^6 \ (\mathrm{J/kg})} =$$

$$= 6{,}9127 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{év}},$$

azaz majdnem 7 millió tonna.

c) Ha feltesszük, hogy a teljes szénmennyiség tökéletesen elég, akkor a szénatomokból CO_2 molekulák lesznek, ezek száma megegyezik a szénatomok számával. Ekkor a keletkező gáz mennyisége

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{6{,}91 \cdot 10^9 \ (\mathrm{kg/év})}{0{,}012 \ (\mathrm{kg/mol})} = 5{,}7606 \cdot 10^{11} \ \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{év}}.$$

Az évente termelt gáz térfogata normál állapotban:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 5{,}7606 \cdot 10^{11} \ (\mathrm{mol/év}) \cdot 22{,}41 \cdot 10^{-3} \ (\mathrm{m^3/mol}) =$$

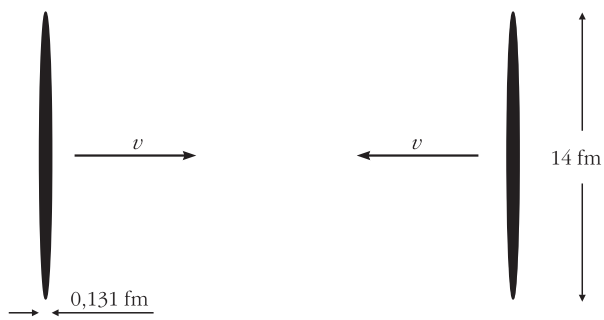
$$= 1{,}2910 \cdot 10^{10} \ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{év}}.$$

Az ország teljes területét befedő, normál állapotú, 1 év alatt megtermelt szén-dioxid-réteg vastagsága:

$$h = \frac{1{,}2910 \cdot 10^{10} \ (\mathrm{m^3})}{9{,}3033 \cdot 10^{10} \ (\mathrm{m^2})} = 0{,}1387 \ \mathrm{m} \approx 13{,}9 \ \mathrm{cm}.$$

10. feladat (Junior kategória) kitűzte: Tarján Péter

A Relativisztikus Nehézion-ütköztető (RHIC) gyorsító berendezés gyűrűiben (például) 14 fm átmérőjű $^{197}_{79}$Au atommagok haladnak egymással szemben nagy energián. Ezt a mellékelt ábrán látható módon szokták illusztrálni.



a) Értelmezzük az ábrát!

b) Adjuk meg az arany atommagok nukleononkénti mozgási energiáját!

Megoldás

a) Mint a gyorsító neve is mutatja, a felgyorsított atommagok relativisztikus sebességgel mozognak, azaz nem elhanyagolható a Lorentz-kontrakció: a laboratóriumi rendszerből nézve a mozgás irányába eső méretek lerövidülnek. Így lesz a gömb alakú atommagból látszólag „palacsinta”.

b) Az extrém nagy lapultság fénysebességhez igen közeli sebességre utal. A „palacsinta” vastagsága a relativisztikusan rövidült gömbátmérő.

$$D = D_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

ahol az ábra alapján D = 0,131 fm és D_0 = 14 fm.

Ebből

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}009357.$$

Egy nukleon mozgási energiája:

$$E_m = m_0\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) = 105{,}87\cdot m_0\,c^2.$$

Mivel egy nukleonra $m_0 c^2 \approx 0{,}937$ GeV, így kapjuk, hogy $E_m \approx 99$ GeV.

Megjegyzés

Egy gömb alakú objektum még látszólag sem lapul „palacsintává”, mint ahogy a feladat szövege szerint „illusztrálni szokták”, hanem a relativisztikus hatások miatt csak elfordulni látszik (Penrose–Terrell-effektus). Lásd: https://en.wikipedia.org/wiki/Terrell_rotation.

8. feladat (I. kategória) kitűzte: *Szűcs József*

Egy, a Nap körül ellipszis pályán keringő, fekete gömbnek tekinthető űrszonda legmagasabb (kelvinben mért) egyensúlyi hőmérséklete $2T_0$ (K), a legalacsonyabb pedig T_0 (K). Napközelben a Naptól való távolsága 1 CSE (csillagászati egység, a Föld közepes távolsága a Naptól).

a) Mekkora a szonda maximális és minimális egyensúlyi hőmérséklete?

b) Hány év a szonda keringési ideje?

Adatok: Napállandó 1 CSE távolságnál 1360 W/m^2, Stefan–Boltzmann-állandó: $5{,}67\cdot10^{-8}$ W/(m^{2}K^4).

Megoldás

Alkalmazzuk a Stefan–Boltzmann-törvényt az űrszonda két helyzetére:

$$S_1\,R^2\pi = \sigma(2\,T_0)^4\,4\,R^2\pi \quad \text{napközelben,}$$

$$S_2\,R^2\pi = \sigma(T_0)^4\,4\,R^2\pi \quad \text{naptávolban.}$$

Itt S_1 és S_2 a Naptól mért távolság négyzetével fordítottan arányos helyi napállandók, R pedig a szonda sugara. Az állandósult legmagasabb és legalacsonyabb hőmérsékleteket az első egyenletből kapjuk:

$$2\,T_0 = \sqrt[4]{\frac{S_1}{4\,\sigma}} = 278{,}27\ \text{K} = 5{,}27\ {}^\circ\text{C} \quad \text{napközelben,}$$

$$T_0 = 139{,}13\ \text{K} = -133{,}86\ {}^\circ\text{C} \quad \text{naptávolban.}$$

b) A napközeli és naptávoli Stefan–Boltzmann-egyenletek hányadosából a napállandókra kapjuk az $S_1/S_2 = 16$ arányt. Ebből a szonda R_1 napközeli és R_2 naptávoli távolságainak az arányára kapjuk:

$$16 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1/R_1^2}{1/R_2^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 4.$$

A feladat szerint napközelben az űrszonda távolsága éppen 1 CSE, így $R_1 = 1$ CSE és $R_2 = 4$ CSE, ebből pályájának fél nagytengelye

$$a = \frac{R_1+R_2}{2} = 2{,}5\ \text{CSE}.$$

Kepler II. törvényét alkalmazva az űrszonda és a Föld keringésére, kapjuk:

$$\frac{T_\text{sz}^2}{T_\text{F}^2} = \frac{(2{,}5\ \text{CSE})^3}{(1\ \text{CSE})^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_\text{sz} = T_\text{F}\sqrt{2{,}5^3} = 3{,}95\,T_\text{F} = 3{,}95\ \text{év}.$$

9. feladat (I. kategória) kitűzte: Szűcs József

Egy Compton-szórást vizsgáló kísérletben a $\lambda_1 = 0{,}01$ nm hullámhosszúságú röntgenfotonok paraffinból elektronokat löknek ki. A kísérletben csak a beeső nyaláb irányához képest 8 fokban Compton-szóródott röntgenfotonok által meglökött elektronokat vizsgálják. A Compton-szórás szempontjából az elektronok szabad elektronoknak tekinthetők. Egy másik kísérletben az 1,5 eV kilépési munkájú fémből léptetnek ki elektronokat bizonyos λ_2 hullámhosszúságú monokromatikus fénnyel. Mind a fémből kiléptetett, mind pedig a paraffinból kilökött (vizsgált) elektronok azonos U_Z feszültség által létrehozott ellentérrel fékezhetők le.

a) Mekkora az elektronokat lefékező ellenterek U_Z zárófeszültsége?

b) Milyen tartományba esik és mekkora a fotoeffektust kiváltó fény λ_2 hullámhossza?

Megoldás

Számítsuk ki a Compton-szóráskor a foton hullámhosszváltozását:

$$\Delta\lambda = \lambda_\text{C}(1-\cos\vartheta) = 2{,}3648\cdot10^{-14}\ \text{m}.$$

Így a fotonok megnövekedett hullámhossza

$$\lambda' = 10^{-10}\ \text{m} + 2{,}3648\cdot10^{-14}\ \text{m} \approx$$

$$\approx 1{,}0002365\cdot10^{-10}\ \text{m}$$

lesz. Így a foton energiavesztesége, amely megegyezik a meglökött elektron mozgási energiájával, kiszámítható:

$$W_\text{kin} = \Delta E_\text{foton} = h\,c\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda}\right) = \frac{h\,c}{\lambda+\Delta\lambda}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda} =$$

$$= 47{,}029\cdot10^{-20}\ \text{J} = 2{,}93\ \text{eV}.$$

Vagyis mindkét esetben az ellentereket létrehozó feszültség:

$$U_Z = \frac{W_{\mathrm{kin}}}{e} = 2{,}93 \text{ V}.$$

b) A fotoeffektusnál alkalmazott fény hullámhosszát a fotoeffektus egyenletéből számíthatjuk ki:

$$\frac{h\,c}{\lambda_2} = E_{\mathrm{ki}} + W_{\mathrm{kin}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{h\,c}{E_{\mathrm{ki}} + W_{\mathrm{kin}}} = 2{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 280 \text{ nm}.$$

Vagyis az alkalmazott fény az UV-tartományba esik.

10. feladat (I. kategória) kitűzte: Papp Gergely

Tudjuk, hogy párkeltés során a kiindulási foton és a keletkezett pozitron-elektron pár mellett mindig kell legyen egy „negyedik partner” is ahhoz, hogy az energia- és lendületmegmaradási törvényeket egyszerre teljesíteni lehessen. A legtöbb esetben ez a negyedik partner egy nehéz atommag. Legalább mekkora E_{min} fotonenergia kell ahhoz, hogy ez a negyedik test egy „nyugvó” elektron lehessen? (Az energiát praktikus az elektron nyugalmi energiájának egységében megadni.)

Megoldás

A megoldás kulcslépése azt felismerni, hogy a párkeltési küszöbön a párkeltés után a tömegközépponti rendszerben nincs mozgási energia, csak a keletkezett részecskék nyugalmi energiája. Ebben az esetben szükséges a lehető legkevesebb energia.

Megoldás #1

Több részecskéből álló rendszerekre is érvényes az

$$E^2 - (P\,c)^2 = \left(M_0\,c^2\right)^2$$

relativisztikus energiaösszefüggés, ahol E, P, M_0 a rendszer teljes energiája, lendülete és nyugalmi tömege. A jobb oldalon lévő „nyugalmi” tömeg nyilván koordináta-rendszertől független mennyiség. Ebben az egyenletben két ismeretlen van, de két inerciarendszerben külön-külön felírhatjuk az egyenletet és így a két ismeretlent meghatározhatjuk. A két inerciarendszer egyike a laboratóriumi rendszer (ahol kérdéses a foton energiája), és a tömegközépponti rendszer (TKP), ahol a rendszer teljes lendülete definíció szerint nulla, megkönnyítve a számítást. A nyugalmi tömeg mindkét rendszerben ugyanaz, és ezzel könnyen összekapcsolhatjuk a két rendszert.

A továbbiakban jelöljük a foton kérdéses bejövő energiáját E_γ-val, lendületét pedig p-vel, ekkor $E_\gamma = p\,c$. Fejezzük ki a foton+elektron rendszer nyugalmi tömegét a párkeltés előtti pillanatban! A TKP rendszerben definíció szerint az összes lendület nulla, a laboratóriumi rendszerben minden lendületet a bejövő foton hordoz, a teljes energia pedig a foton $p\,c$ energiája plusz a nyugvó elektron $m_0\,c^2$ nyugalmi energiája. Tehát a párkeltés előtt:

$$\underbrace{E^2_{\mathrm{TKP}} - 0}_{\text{TKP}} = \underbrace{\left(p\,c + m_0\,c^2\right)^2 - (p\,c)^2}_{\text{laboratórium}} = \left(M_0\,c^2\right)^2.$$

Párkeltés után a keletkezési küszöbön nincs mozgási energia (a foton épp annyi energiát hozott be, hogy a párkeltés létrejöhessen), így minden energiát az eredeti elektron, illetve a keletkezett elektron-pozitron pár nyugalmi energiája ad ki. Tehát a TKP rendszerben párkeltés után:

$$E_{\mathrm{TKP}} = 3\,m_0\,c^2.$$

Az energiamegmaradás értelmében E_{TKP} ugyanaz kell legyen párkeltés előtt és után is, így ezt a fenti egyenlet bal oldalába helyettesítve és a négyzetre emeléseket elvégezve kapjuk:

$$\left(3\,m_0\,c^2\right)^2 = (p\,c)^2 + 2\,p\,c\,m_0\,c^2 + \left(m_0\,c^2\right)^2 - (p\,c)^2.$$

Azonos átalakítások után kapjuk:

$$E_\gamma = p\,c = 4\,m_0\,c^2.$$

Megoldás #2

Ha a keletkezési küszöbön a tömegközépponti rendszerben nincs mozgási energia, ez annak felel meg, hogy a párkeltés után a 2 elektron és a pozitron a laboratóriumi rendszerben együtt mozog, azaz azonos lendülettel rendelkezik. Ezzel felírható az energia- és lendületmegmaradás a laboratóriumi rendszerben a párkeltés előtt és után:

$$p_\gamma = 3\,p_{\mathrm{e}}$$

$$p_\gamma\,c + m_{\mathrm{e}}\,c^2 = 3\sqrt{(p_{\mathrm{e}}\,c)^2 + \left(m_{\mathrm{e}}\,c^2\right)^2}\,,$$

ahol a második egyenletben a relativisztikus energiaképletet használtuk. A foton keresett energiája nyilván $E_\gamma = p_\gamma c$. Az első egyenletből kifejezve az elektronok lendületét és a másodikba helyettesítve:

$$p_\gamma\,c + m_{\mathrm{e}}\,c^2 = 3\sqrt{\left(\frac{p_\gamma\,c}{3}\right)^2 + \left(m_0\,c^2\right)^2}.$$

Négyzetre emelés és azonos átalakítások után itt is kapjuk: $E_\gamma = p_\gamma c = 4\,m_{\mathrm{e}}\,c^2$.

Értékelés

Minden feladatra maximálisan 5 pontot lehetett kapni. A feladatsor a diákok számára átlagosnak bizonyult, a korábbi évek átlagához közeli pontszámok születtek. A maximális 50 pontból az I. kategóriások legjobbjának 45 pontot sikerült szereznie, a juniorok legeredményesebbjének azonban csak 35 pontot. Meglepő, de leggyengébben a negyedik feladat sikerült; erre a lehetséges 5 pont helyett az átlagosan elért eredmény mindössze 1,43 volt az I. kategóriánál és 1,50 a junioroknál. Igaz, hogy még erre a feladatra is érkezett 5 pontos megoldás, mégpedig egy Junior kategóriás tanulótól. Ennek köszönhetően elmondhatjuk, hogy valamennyi feladatra érkezett tökéletes (5 pontos) megoldás is. Mindkét kategória a 2. feladatnál érte el a legjobb átlagos pontszámot: az I. kategóriás versenyzők 4,45 pontot, a Junior tanulók pedig 4,44 pontot.

Folytatjuk.