A LÉPCSŐN PATTOGÓ LABDA PROJEKT

A káosz nyomában

Tóth Ábel Levente – Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
Tél Tamás – MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

Gruiz Márton (1972–2017) emlékére,
aki elindította a projektet.

A kezdetek

2014 táján Gruiz Márton a Budapesti Osztrák Iskolába járó magántanítványai révén megtudta, hogy fizikakönyvük a labdák lépcsőn történő pattogását kaotikus mozgásként mutatja be. Ez változatlanul szerepel a ma is használt (a káosznak két oldalt szentelő) [1] tankönyvben (*1. ábra* a következő oldalon).

Márton az egyikünkkel (TT) folytatott beszélgetések során rámutatott arra, hogy a lépcsőn pattogás kaotikus jellege nem nyilvánvaló, hiszen a lépcsőfokok egyenes szakaszai síktükörként hatnak a labdákra, a visszapattanás nem okoz széttartást, az élre való pattanás viszont nagyon ritka, főleg kis görbületi sugarak esetén. Ráadásul az ábra mindössze 4 pattanás alapján vonja le a következtetést, de a mozgások kaotikussága csak hosszú idejű megfigyelés után dönthető el.

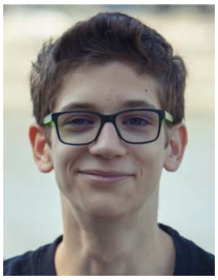
Köszönetünket fejezzük ki *Meszéna Tamásnak* a témában folytatott számos eszmecseréért. TÁ hálás középiskolai fizikatanárnőjének, *Schramek Anikónak,* amiért elindította a kutatásban és támogatta a munka során. TT köszöni *Hömöstrei Mihálynak,* hogy segítséget nyújtott az [1] osztrák könyv új kiadásának megtalálásában, valamint az NFKIH K-125171 pályázat által biztosított támogatást.

Mielőtt a részletes vizsgálatok eredményeit bemutatnánk, érdemes röviden összevetni a lépcsőn pattogás jelenségét a lejtőn történő pattogáséval.

A lejtőn pattogó labda

Mind a lejtőn, mind a lépcsőn történő pattogásban a gravitáció és az ütközési veszteség játszik fontos szerepet. Utóbbit az ütközési együtthatóval vesszük figyelembe: a felületre merőleges visszapattanási sebesség nagysága az ilyen irányú beeső sebességkomponens $k < 1$-szerese. A légellenállást itt és a továbbiakban elhanyagolhatónak tekintjük. Ennek megfelelően csak kis sebességű mozgásokra szoríthatunk.

Az $m = \mathrm{tg}\alpha$ meredekségű lejtő esetén a gravitációs gyorsulást felbonthatjuk a lejtőre párhuzamos és arra merőleges komponensre. A mozgás egészét tekinthetjük egy lejtőirányú és egy erre merőleges irányú mozgás szuperpozíciójaként. A merőleges irányú mozgás éppen olyan, mint egy vízszintes síkon pattogó labdáé, k ütközési együtthatóval, $g\cos\alpha$ nagyságú gravitációs gyorsulás mellett. Ezért tudjuk, hogy az egyes

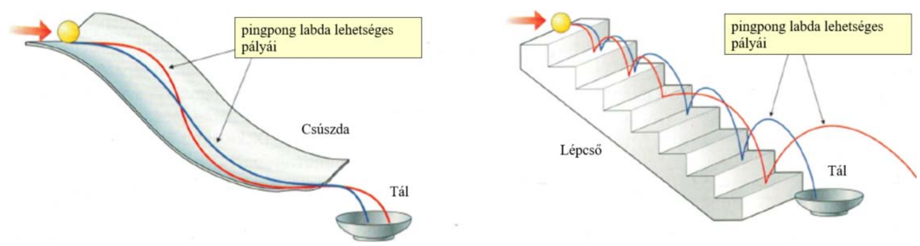


Tóth Ábel fizikushallgató az ELTE-n, a Budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban tanult speciális matematika tagozaton. 2019-ben 10. osztályosként kezdte el a tudományos kutatást a témában. Még abban az évben részt vett a kari TDK-n junior első díjat szerezve, majd 2021-ben az egyetemi OTDK-n dicséretben részesült. Az IPhO és EuPhO fizika diákolimpiákon a magyar csapat tagja volt, bronz és ezüstérmet hozott.

Tél Tamás az ELTE-n szerzett fizikus diplomát 1975-ben. Jelenleg ott emeritusz professzor. Kutatási témái a nemegyensúlyi és kaotikus rendszerektől a klímadinamikáig terjednek. A Kármán környezeti áramlások laboratórium egyik alapítója. 2007 és 2021 között a Fizika tanítása doktori program, 2011 és 2021 között az MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport és a 2016 és 2021 között létező MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport vezetője volt.

ütközések utáni pillanatban jellemző merőleges sebességek sorozata geometriai sort alkotva nullához tart. Hosszú távon, a lejtőn véges vízszintes elmozdulásokat okozó pattogások *nem alakulhatnak ki*.

Az n-edik és n+1-edik pattogás közötti t_n idő egyre rövidebb, az emelkedés ezért egyre kisebb. A lejtő menti mozgás állandó, $g\sin\alpha$ nagyságú gyorsulású. Az ilyen irányú w sebesség változása a két ütközési pillanat között $w_{n+1} = w_n + g\sin(\alpha)\, t_n$. Sok pattanás után t_n tekinthető egy kis Δt időnövekménynek, amelyhez $\Delta w = w_{n+1} - w_n$ sebességnövekmény tartozik. A pattogások sorozata végül is – az Achilles és a teknősbéka probléma szellemében – a $\Delta w/\Delta t = g\sin\alpha$ differenciálegyenletű *folytonos idejű* mozgásba megy át. A pattogások sorozatának vége a lejtőn mindig a *csúszásba* történő átmenet.



1. ábra. Az ábra az előre jelezhető és előre jelezhetetlen, vagyis kaotikus mozgások példájaként a labda csúszdán való lecsúszását (bal oldali kép) és lépcsőn történő pattogását (jobb oldali kép) mutatja be. Az utóbbi esetben a közel induló mozgások az élre eső pattanások miatt gyorsan eltávolodnak, nem esnek ugyanabba a tálba, [1] alapján.

A lépcsőn pattogás sajátos vonása, hogy a végállapot állandósult pattogás is lehet, akkor ugyanis főleg a vízszintes felületeken történik ütközés, és a veszteség a függőleges sebességkomponenst csökkenti csak.

Pattogás a derékszögű lépcsőn

Elsőként természetesnek tűnt annak vizsgálata, hogy lehetséges-e kaotikus pattogás a derékszögű lépcsőfokokból álló lépcsőn. A labdát az egyszerűség kedvéért pontszerűnek tekintjük. A lépcsősor alakját és a mozgást a *2. ábra* mutatja.

A légellenállást továbbra is elhanyagolva, adott k ütközési együttható mellett a mozgás egyértelműen követhető kizárólag a pattogások adatainak követésével. Erre két adat elegendő, egy hely- és egy sebesség-koordináta. Ezeknek az n-edik pattanás esetére az elért lépcsőfok elejétől mért x_n távolságot és az elpattanás v_n függőleges sebességét választjuk. A teljes mozgást jellemző parabolaívek a ferde hajítás szabályai szerint rekonstruálhatók. Az n-edik és az n+1-edik ütközés közötti

$$\left(x_n,\ v_n\right) \to \left(x_{n+1},\ v_{n+1}\right) \tag{1}$$

kapcsolat középiskolai módszerekkel meghatározható. Ebben a sebességet a kezdeti u_0 vízszintes komponens egységében, hosszt pedig a lépcső hosszában érdemes mérni. Ezáltal fellép egy fontos mennyiség, a

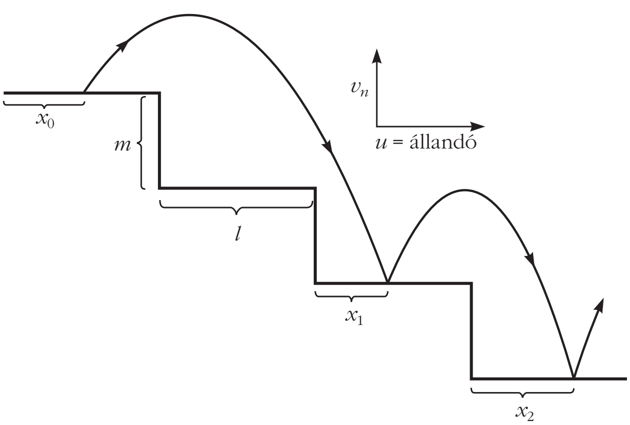
$$H = \frac{g\,L}{u_0^2} \tag{2}$$

dinamikai paraméter, amely a gravitációs gyorsulás dimenziótlan mértékének is tekinthető. Az (1) leképezés részletes levezetése, amely megtalálható [2, 3]-ban, *explicit,* egyszerű képleteket tartalmazó alakra vezet. Az említett cikkekben egyben iskolai projektmunkát lehetővé tevő feladatok is találhatók.

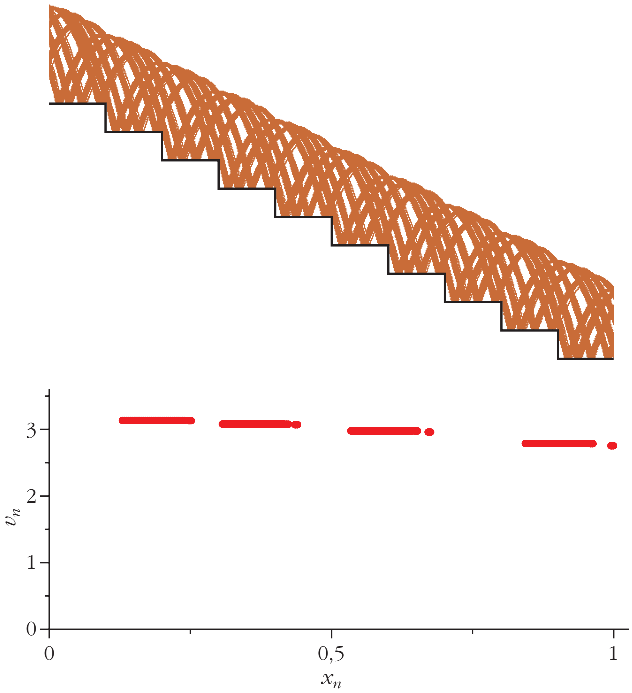
A kapott szabály nemlineáris, ezért kizárólag matematikai alakját ismerve, nem lehet kizárni a káosz lehetőségét. Ha az esetet a legörbített élű lépcső határesetének tekintjük, az r görbületi sugár $1/r$ reciproka, a görbület, nagyon nagy szám, és domború tükörként ez szabja meg a szétszóródás mértékét. A görbületre esés valószínűsége viszont nagyon kicsi, r-rel arányos. A káosz erőssége tehát egy nullaszor végtelen típusú kifejezésként írható fel, így az eredmény részletes elemzés nélkül nem kapható meg.

A labda derékszögű lépcsőn történő mozgásának követése tehát csak az (1) szabály állandó ismétlésével, iterálásával történhet. *Meszéna Tamás* és *Páll Csaba* a pécsi Nagy Lajos Gimnázium oldalán kialakítottak egy bárki által könnyen futtatható szimulálást.[1] Ebben minden paraméter szabadon változtatható és így ellenőrizhető, hogy a kezdeti feltételtől függetlenül, véges idő alatt általában állandósult pattogások alakulnak ki, attraktorok léteznek. A k < 0,4 tartományban megfigyelhető a csúszásba történő átmenet is, éppúgy, mint a lejtőn. A numerikus vizsgálat azt mutatja, hogy *kaotikus pattogás nem létezik.* Érdekesség azonban, hogy a gyakran a káosz közvetlen ellen-

2. ábra. A derékszögű lépcső és a követett pattogás adatai: a lépcsőfok hosszában mért távolságot használva a fokok magassága m (ez egyben a lépcsőre illesztett lejtő α hajlásszögének tangense). Az n-edik pattogás helye a lépcsőfok elejétől számolva x_n, a függőleges sebesség az elpattanás pillanatában v_n. Ahogy a betétrajz mutatja, a vízszintes sebesség nem változik, hiszen a labdára sohasem hat vízszintes irányú erő.



[1] Lásd: https://pallcsabamatek.hu/lepcso/



3. ábra. Állandósult kváziperiodikus mozgás k = 0,75 ütközési együttható esetén. Itt és a további ábrákon is m = 1/2, H = 4. Felső ábra: mozgás a valódi térben. A pályaívek a 10. lépcsőfok elhagyása után a kezdő felett újra ugyanabban a magasságban lépnek be a képbe. Egymáshoz közel haladnak, vastag nyalábokban, a széttartásnak semmi jele. Az x_n, v_n változók által definiált fázistérben (alsó ábra) a mozgás gyakorlatilag négy intervallumot jár be. A periodikus mozgás a felső valódi térben egyetlen görbének, az alsó fázistérben pedig egyetlen pontnak felel meg, vagyis jóval kevésbé összetett, mint a kváziperiodikus.

tétének tekintett periodikus mozgás csak nagyon ritkán, kivételes, diszkrét k értékekre fordulhat csak elő. Az N lépcsőfok átugrásával kialakuló periodikus mozgás k_N ütközési paraméterére [2, 3] szerzői a

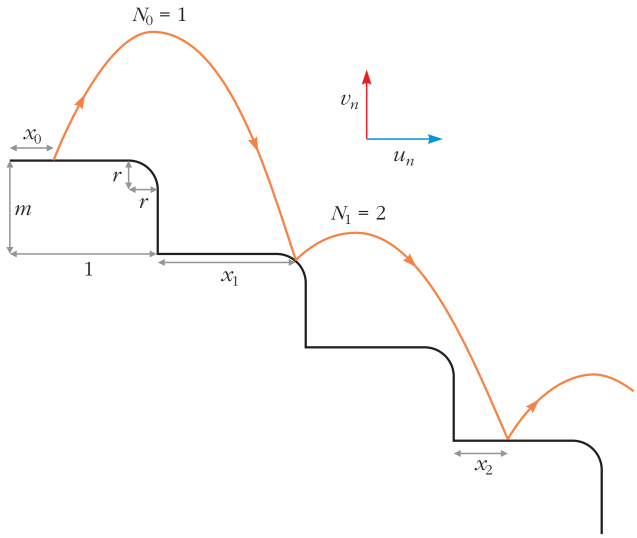
$$k_N = 1 - \frac{2}{1 + \dfrac{NH}{2\,m}} \tag{3}$$

kifejezést találták.

A periodikus attraktorhoz tartozó k értékek tehát olyan ritkák, mint a hidrogénatom energiaszintjei az összes lehetséges energia között. Az egylépcsős (N = 1) eset a tipikus m = 1/2, H = 4 paraméterekkel például a k = 0,6-ra valósul meg, a két lépcsőfok átugrásához tartozó érték k = 7/9.

Milyenek akkor a tetszőleges k értékhez tartozó állandósult pattogások? Ezek az iskolában ritkán vizsgált *kváziperiodikus* mozgások típusába tartoznak. Az elnevezés arra utal, hogy a mozgás majdnem periodikus: ugyan nem érkezik vissza pontosan oda, ahonnan indult, de az eltérés rendszerint kicsi. Ez jól megfigyelhető a pattogó pályák mintázatában (*3. ábra* felső képe), de érdekes a mozgást jellemző mennyiségek terében, az x_n, v_n úgynevezett fázistérben megjelenő mintázat is (*3. ábra* alsó grafikonja).

A kváziperiodicitásnak ez a gyakori előfordulása vezette Meszéna Tamás tanár urat arra a felismerésre,



4. ábra. A lekerekített lépcső és a követett pattogás adatai: az n-edik pattogás helye a lépcsőfok elejétől számolva x_n, a függőleges sebesség az elpattanás pillanatában v_n, a vízszintes pedig u_n. Ahogy a betétrajz mutatja, a vízszintes sebesség most változik, hiszen a görbületre pattanás (mint a lejtőn történő is) változtatja a vízszintes sebességet.

hogy érdemes iskolai tananyagot kidolgozni az ilyen típusú mozgásokra, a lépcsőn történő pattogás jelenségétől függetlenül is [4].

Pattogás lekerekített élű lépcsőn

E cikk szerzői 2019 elején kezdtek foglalkozni a lekerekítés hatásával. Munkahipotézisként a [2] cikk záró mondatát követték, miszerint: „Ha a lépcsők éles sarka helyett lekerekített átmeneteket vennénk, a körívek jelenléte a problémát szóró biliárddá tenné, és abban eléggé nagy görbületi sugarak esetén már kiterjedt, robosztus káoszt várhatunk.” Látni fogjuk, hogy a mondat káoszra vonatkozó része igaznak bizonyul, a robosztusság feltételezése azonban túlzott elvárás volt.

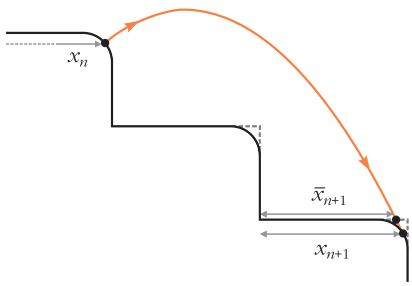
Első lépésként kizárólag a geometriát változtattuk, s az (egységnyi hosszúságú) lépcsőfokok végére r sugarú negyedköríveket illesztettünk (*4. ábra*).

Az ütközési adatokat összekapcsoló leképezés most

$$\left(x_n,\ u_n,\ v_n\right) \rightarrow \left(x_{n+1},\ u_{n+1},\ v_{n+1}\right) \tag{4}$$

alakú, ahol u és v a visszapattanási utáni sebességkomponensek a kezdeti vízszintes u_0 sebességkomponens egységében. Az y_n függőleges koordináta nem újabb változó, hiszen a lépcső alakja ismeretében x_n értékéből már következik. A (4) kapcsolat meghatározása most nehezebb, mint a derékszögű lépcső esetén, hiszen az új ütközési pont nem adható meg képlettel. E hely meghatározására az [5] cikkben az *5. ábra* szerinti eljárást követtük.

Az (1) és a (4) leképezések közötti különbség nemcsak az, hogy az utóbbi 3-változós, hanem az is, hogy



5. ábra. Az új ütközés x_{n+1} koordinátáját két lépésben határozzuk meg. Először az elképzelt derékszögű lépcsővel történő ütközés $\bar{x}_{n+1}$ koordinátáját a ferde hajítás szabályai szerint kapott analitikus képlettel, majd onnan a görbületen megvalósuló ütközés adatát numerikus eljárással.

nem explicit, egy numerikus eljárás alkalmazásával válik megadhatóvá. Az [5] cikk eredményeit az alábbiakban csak röviden és a derékszögű esettel való összehasonlításban foglaljuk össze, hiszen a részletek megtalálhatók az említett cikkben, amelyben [2, 3]-hoz hasonlóan iskolai projektmunkát lehetővé tevő feladatok is találhatók.

Az ütközési veszteségről továbbra is feltéve, hogy csak a felületre merőleges sebességet csökkenti, azt tapasztaljuk, hogy a labda már nagyon kis görbületi sugarak esetén is egyre nagyobbakat ugrik, „elszáll”, vagyis nincs attraktor (*6. ábra*).

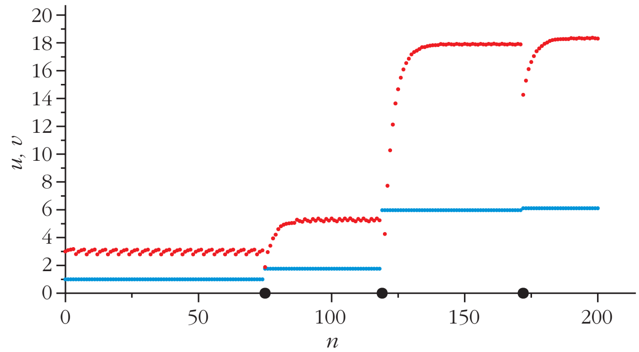
Nagy sebességgel azonban kilépünk a ferdehajításközelítés érvényességi tartományából (a közegellenállás nem hanyagolható el), ezért leállítjuk a szimulálást, ha u_n nagy. Ugyan itt még nem jellemző, de a későbbiek szempontjából megjegyezzük, hogy szimulálást leállítjuk akkor is, ha v_n nagysága olyan kicsi, amely csúszás elkezdődését jelzi. Káosz, ha létrejön is, csak véges idejű lehet. Nem találunk nagyon hosszú ideig érvényes pattogássorozatokat.

A jelentősebb ütközési veszteség biztosítása érdekében második lépésként érdemes módosítanunk az ütközési szabályt. A görbületen történő ütközéskor bevezetünk egy, a felülettel párhuzamos sebességkomponenst csökkentő ütközési együtthatót is. Ezt tangenciális ütközési együtthatónak nevezzük, és j-vel jelöljük. A módosított ütközési szabály tehát így írható:

$$\begin{aligned} v_{t,\,n+1} &= j\,v'_{t,\,n}, \\ v_{r,\,n+1} &= -k\,v'_{r,\,n}, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol a t index a tangenciális, az r pedig a radiális, avagy normális komponensre utal, a vessző a beesési sebességeket jelöli (*7. ábra*). A többletdisszipáció ahhoz vezet, hogy a csúszásba való átmenet is jellemzővé válik.

A teljes jelenség tanulmányozására egyikünk (TÁ) írt egy szimulációt, amelyet a kapcsolódó weblapról[2] bárki letölthet. Ebben minden paraméter szabadon változtatható és így ellenőrizhető, hogy a k és j értékek megválasztásával könnyen találunk ezer pattanásig tartó mozgásokat is, anélkül, hogy a labda elszállna vagy csúszásba menne át. A pattogások számát – mielőtt ez a két esemény egyike bekövetkezne – a mozgás élettartamának nevezzük.



6. ábra. Ha a *3. ábra* esetét vizsgáljuk azzal az egyetlen különbséggel, hogy r = 0,01 görbületi sugarat alkalmazunk, az ütközések v, u sebességkoordinátai a görbületre pattanáskor (amiket fekete pontok jeleznek a vízszintes tengelyen) mindig előbb-utóbb növekednek, a labda tehát messzire elszáll. Már ezen az első legörbített esetén is jól látszik, hogy a vízszintes sebesség (alsó, kék pontsorozat) nem állandó a legkisebb görbületi sugarakra sem. A mozgást jellemző változókról most és később az n indexet elhagyjuk.

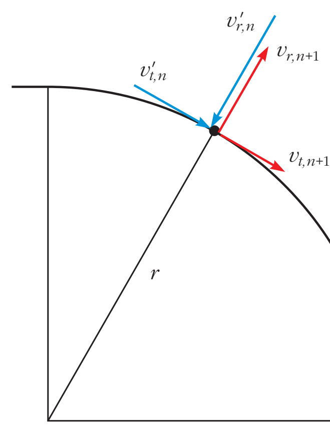
A *8. ábrán* a *3. ábrához* hasonlóan egy tipikus lekerekített lépcsőn kialakuló mozgást ábrázoltunk, érdemes egymás mellé állítva összevetni a két mintázatot. Mind a felső, mind az alsó ponthalmaz térbeli kiterjedése és bonyolultsága is nagyban megnövekedett a görbület bevezetésével. E két tulajdonság jelenléte a kaotikus mozgásokra jellemző.

A káosz egyik meghatározó tulajdonsága a kezdőértékekre való érzékenység. Két közel elindított mozgás időben átlagosan exponenciális mértékben távolodik egymástól, exponensét Ljapunov-exponensnek nevezik, amely a kaotikus mozgások egyik legalapvetőbb, kvantitatív jellemzője. Az [5] cikkben nagyságrendi becslést sikerült adnunk a λ-val jelölt Ljapunov-exponensre kis görbületi sugarak esetén:

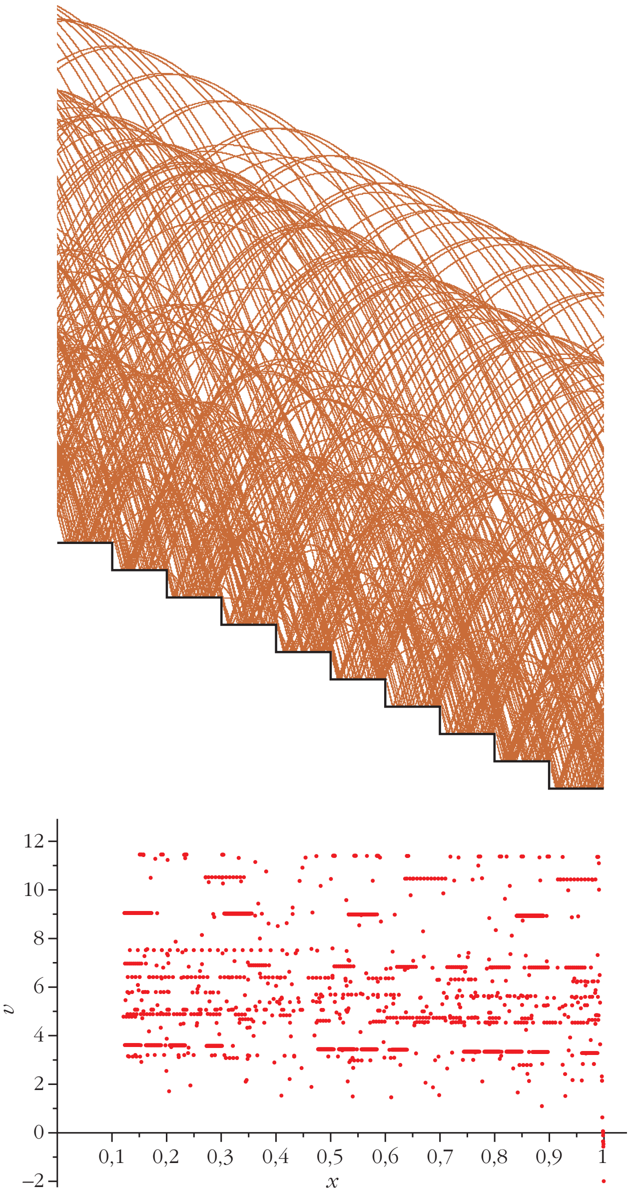
$$\lambda \sim r \ln\left(\frac{1}{r}\right). \tag{6}$$

A (6) összefüggésből világos, hogy az $1/r$-től való függés logaritmikus. Mivel a logaritmus függvény sokkal gyorsabban csökken, mint a lineáris függvény, az

7. ábra. A módosított ütközési szabály grafikus összefoglalása.



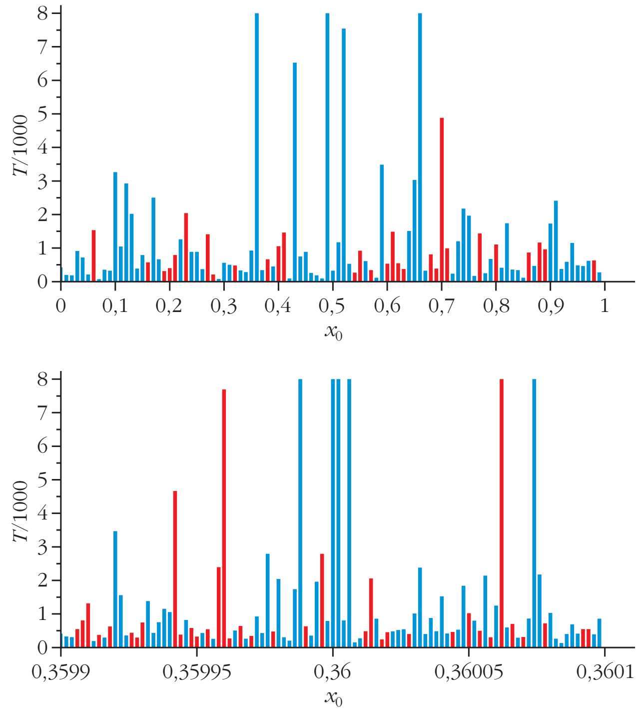
[2] Lásd: http://theorphys.elte.hu/fiztan/stairsH/index_hu.html



8. ábra. Tipikus mozgás lekerekített sarkú lépcsőn, k = 0,75, j = 0,2 és r = 0,01 görbületi sugár mellett (az első és utolsó 30 ütközés elhagyása után). Felső ábra: a mozgás valódi térbeli képe a *3. ábrához* hasonló módon, de csak az első 700 pattogásig mutatva. Alsó ábra: a mozgás az x–v síkon. Ez a mozgás 3260 pattanás után csúszásba való átmenettel ér véget. A *3. ábrával* való összehasonlítás mutatja, hogy a kaotikus mozgás összehasonlíthatatlanul bonyolultabb a kváziperiodikus mozgásnál, a periodikusról nem is beszélve.

$r \to 0$ határesetben a derékszögű lépcsőn a Ljapunov-exponens nullának adódik – a [2, 3] cikkek megfigyelésével összhangban –, nem lehet káosz.[3] A (6) összefüggés azt is mutatja, hogy *tetszőlegesen kicsi görbületek esetén is már megjelenik a káosz.*

Ahogy láttuk, tetszőleges hosszúságú pattogássorozatok nem alakulnak ki. Ez két okból sem lehetséges: vagy csúszásba átmenet vagy elszállás történik. Ezt a tulajdonságot és egyben a kezdőértékre való érzékenységet is szemléltethetjük. A *9. ábra* felső grafikonján azt mutatjuk, hogy a különböző kezdőhelyekről elindított labdák mennyi pattogás után mennek át csúszásba vagy szállnak el, a két szökési lehetőséget különböző színnel jelölve. Azt láthatjuk, hogy az egymást követő oszlopok látszólag szabályszerűség nélkül váltogatják a színüket és magasságukat. Ez a tulajdonság akkor is megmarad, ha a kezdőérték egyenesén egy adott pontra igazán ránagyítunk, és a szomszédos oszlopok távolsága csupán $2 \cdot 10^{-6}$ (*9. ábra* alsó grafikonja).



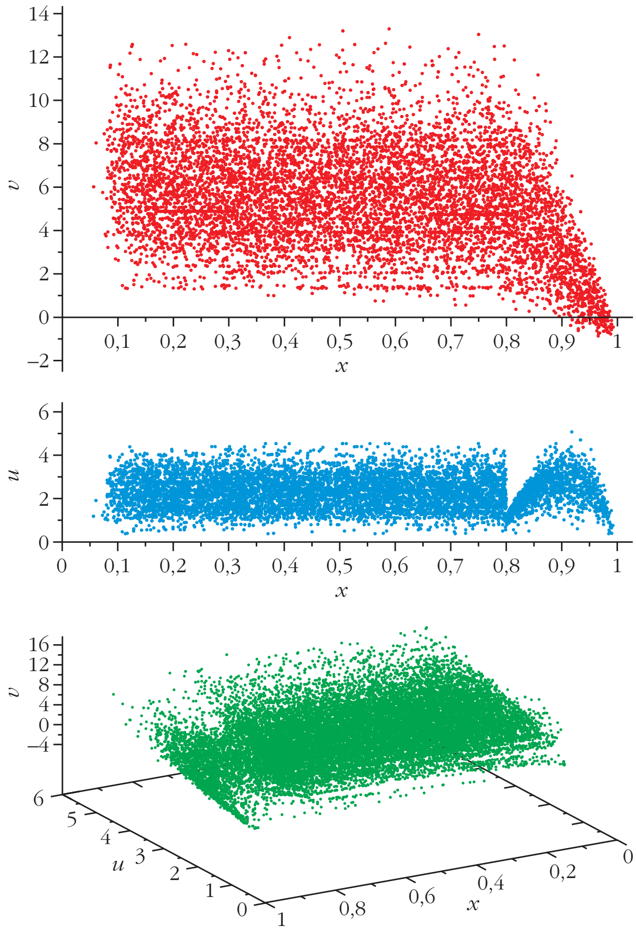
9. ábra. A mozgások élettartama (vagyis az elszállás vagy csúszásba átmenet előtti pattanások száma) az x_0 kezdőhely függvényében, j = 0,2, k = 0,75, r = 0,01 mellett, azonos, v_0 = 3 kezdősebességgel. A mozgás végállapota kék színű oszlop esetében csúszásba történő átmenet, piros oszlop esetében elszállás. Mivel minden oszlop vagy kék, vagy piros színű, reális állandósult mozgás nem lehetséges, a káosz tranziens formája van jelen. A mintázatok hasonló szabálytalansága, az eloszlás fraktáljellege a tranziens káosz általános tulajdonsága.

Végtelen élettartam az ütközési együtthatók tetszőleges finomhangolásával sem érhető el, mert azok az ütközési együtthatók, amelyek elég kicsik, hogy kizárják az elszállás lehetőségét, már bőven nem elég nagyok, hogy a csúszásba átmenet lehetőségét is elvegyék. A végtelen élettartam eléréséhez tehát olyan ütközési együtthatók kellenek, amelyek a nagy sebességeket jobban csökkentik, mint a kis sebességet. Ezen megfontolás alapján vezettük be az érintőirányú együtthatóra az alábbi, sebességfüggő kifejezést:

$$j = \exp\left(-\delta\, v_t'\right), \tag{7}$$

ahol δ egy állandó, v_t' pedig az érintőirányú (tangenciális) beesési sebesség. Ez a sebességfüggő ütközési együtthatók csak egy lehetséges változata, más kifejezésekkel is hasonló eredmények adódhatnak. A bevezetett sebességfüggés tekinthető úgy is, mint a légellenállás hatásának beépítése az ütközéses leírásba.

[3]Ha (6)-ban az $1/r$-től való függés lineáris lenne, véges Ljapunov-exponenst kapnánk. Azt, hogy nem ez a helyzet, nem lehetett előre látni a projekt kezdetekor.



10. ábra. A lépcsőn pattogó labda kaotikus attraktora. A rendszer teljes x, v, u fázisterében a k = 0,75, r = 0,2 paraméterekhez és a (7) sebességfüggő ütközési együtthatóhoz (δ = 0,3) tartozó attraktor. Felül pirossal az x, v, középen kékkel az x, u vetület, alul zölddel a 3-dimenziós kaotikus attraktor egésze látható.

Ezzel az apró, kizárólag a görbületet érintő változtatással elértük, hogy a két szökési mechanizmus eltűnjön. Még nagy görbületi sugarak esetében is a mozgások gyakorlatilag végtelen hosszú élettartamúak, és robosztus, permanens káoszt kaptunk. Az ehhez tartozó fázistérbeli mintázatot kaotikus attraktornak nevezik, hiszen az már a kezdőértéktől teljesen függetlenül minden hosszú mozgást egyaránt jellemez. Ezt láthatjuk a *10. ábrán*.

Mi lehet érdekes még?

A labda pattogásának itt bemutatott leírása mellett bonyolódó modellek egész sorozata is elképzelhető:

– A labdák kiterjedése fontos szerepet játszik a valóságban megfigyelhető pattogás folyamatában. Érdemes lehet ezért kiterjedt labdákat vizsgálni: korong vagy gömb alakúakat, ismert tehetetlenségi nyomatékukkal. A leírás jellege még leképezés marad, a forgási energia felhalmozódása miatt feltehetően nem tapasztalunk elszállást.

– A légellenállás már kiterjedés nélküli labdákra is figyelembe vehető. Ez a differenciálegyenlet folyamatos megoldását teszi szükségessé, az eddig követett billiárdszemléletet el kell hagyni.

– A kiterjedt labdákra ható légellenállás figyelembevétele jelentené a legteljesebb leírást.

Az eddigi részletes vizsgálatok alapján azonban már most mondhatjuk, hogy az [1] osztrák könyv helyes benyomást kelt a labdák lépcsőn történő pattogási dinamikájáról.

Irodalom

1. A. Nussbaumer, P. Nussbaumer: *Basiswissen, Physik-Compact 5.* Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH, Wien (2017) 12.
2. Gruiz M., Meszéna T., Tél T.: Kaotikus vagy csak összetett? Labdák pattogása lépcsőn. *Fizikai Szemle 66/4* (2016) 128., http://theorphys.elte.hu/tel/magyar/pdf_pub/Tel-201604.pdf
3. M. Gruiz, T. Meszéna, T. Tél: Chaotic or just complicated? Ball bouncing down the stairs. *Eur. J. Phys. 38* (2017) 055003., http://theorphys.elte.hu/tel/pdf_pub/EJP38.pdf
4. Meszéna T.: *Nemlineáris jelenségek tanítása a középiskolában.* Doktori értekezés, ELTE Fizika Doktori Iskola, 2021., http://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/doktorik/ertekezesek/meszena.pdf
5. Á. Tóth, T. Tél: Ball bouncing down rounded edge stairs: chaotic but tricky. *Eur. J. Phys. 42* (2021) 035004., http://elmfiz.elte.hu/kcs/pub/EJP42.pdf

Az Eötvös Társulat fönt van a facebook-on!

https://www.facebook.com/pages/Eötvös-Loránd-Fizikai-Társulat/434140519998696?fref=ts

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682
A Társulat Internet honlapja http://www.elft.hu, e-postacíme: elft@elft.hu
Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtitkár, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.
Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.
Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.
Megjelenik havonta (évente egyszer duplaszámmal), egyes szám ára: 1100.- Ft (duplaszámé 2200.- Ft) + postaköltség.
HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)