

FAHASÁBOT, LEGÓT, PLÜSSFIGURÁT, FAGYOTT ÉS FOLYÉKONY ALMALÉT A TANTEREMBE!

Bokor Nándor
BME Fizika Tanszék

Az alábbi írás témája – a címből nehezen kikövetkeztethető módon – az úgynevezett *teniszütő-tétel* (Tennis Racket Theorem), más néven a *közbülső tehetetlenségi nyomatékú tengely tétele*. A *Barátaim: Tigris és Micimackó* animációs sorozat *Mackó pocskék napja* című epizódjában van egy jelenet [1], amelyben egy levegőbe felhajított sárgarépa fejbetalál és bekapcsol egy játékrobotot, az végigmegy a szekrény tetején, ráesik egy székre lefektetett teniszütő nyelére, a teniszütő erre pörögve felrepül, és több fordulat után Micimackó fején landol. A jelenetet látva biztosak lehetünk benne, hogy az animáció készítői egyszerűen matematikailag előírták, hogy a teniszütő a levegőben szép szabályosan forogjon a tömegközéppontján átmenő tengely körül. Ha rendes fizikai modellt használtak volna, akkor rögtön látták volna, hogy az ütő nem így száll a levegőben. Aki teniszezik, játék után az öltözőbe menet gyakran érez kísértést, hogy szórakozottan feldobálja az ütőjét, mégpedig úgy, hogy először lapjával vízszintesen tartja, mint egy palacsintasütőt, majd a nyelénél fogva maga felé pörgetve feldobja, és egyetlen fordulat után ismét a nyelénél elkapja. Rögtön észre is vehet egy furcsaságot: a feldobott ütő pörgés közben automatikusan átfordul a levegőben, és a nem várt oldalával felfelé érkezik vissza a játékos kezébe. Ebből a gyakori tapasztalathból ered a cikk elején említett teniszütő-tétel elnevezés. A másik elnevezés háttere: a merev testeknek három fő tehetetlenségi nyomatéka van (a részleteket lásd lejjebb), és többségüknél ez a három mind különböző számértékű; van tehát köztük egy legkisebb, egy legnagyobb, és egy közbülső nagyságú. A *közbülső tehetetlenségi nyomatékú tengely körüli forgás* – épp ilyen a teniszütő azon forgása, amit a Micimackó-epizódban mutatnak – *instabil*, gyakorlatilag sosem játszódhat

le úgy, ahogy a mesefilmben látjuk. A [2] videóban különböző márkájú ütőkkel illusztrálják a tényleges effektust. A kísérlet egyszerűen elvégezhető, természetesen nemcsak teniszütővel, hanem bármilyen merev testtel, amelynek három fő tehetetlenségi nyomatéka mind különböző. (A mobiltelefonjukat szórakozottan feldobálók is rácsodálkozhatnak a meglepő, bucskázó mozgásra.)

A cikket kettős céllal írtam. Az egyik, hogy – egyetemi szintű tankönyvek [3] tárgyalására alapozva – olyan *elméleti összefoglalót* adjak erről az érdekes fizikai hatásról, amely egyrészt kellően precíz és mélyreható, másrészt részletei egy elsőéves mérnökhallgató vagy akár egy középiskolás tanuló számára is végigkövethetők. A másik cél – ezzel függ össze a cikk címe – olyan egyszerű kísérleti eszközöket javasolni a hatás szemléltetésére, amelyekkel a tanulók a tanteremben vagy akár otthon, saját maguk is könnyen próbálgathatják az effektust. A javasolt kísérletek kidolgozásánál az motivált, hogy látványosabbak, élményszerűbbek legyenek, mint a teniszütős változat, a kísérleti eszközök pedig kisméretűek, közvetlenül hozzáférhetőek vagy könnyen elkészíthetőek legyenek, és kevésbé törékenyek, mint a mobiltelefon vagy a tv-távírányító.

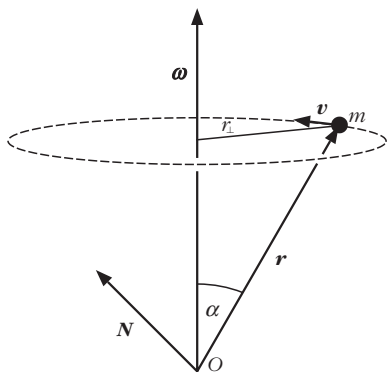
Elméleti magyarázat

A merev testek forgásának általános leírását lehetővé tevő matematikai „nehéztüzérségből” épp csak annyit hagyok meg, ami a jelenség pontos megértéséhez elég. Szerencsére a szükséges matematika nem bonyolultabb annál, amivel középiskolások, de különösen elsőéves hallgatók amúgy is találkozhatnak.

Az 1. ábrán egy \mathbf{r} helyvektorral rendelkező m tömegpont látható, amely körmozgást végez. A mozgást olyan vonatkoztatási rendszerből figyeljük, amelynek origója az O pont, innen mutat \mathbf{r} a tömegpontra. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ebben a vonatkoztatási rendszerben az \mathbf{r} „nyíl” kezdőpontja áll, végpontja pedig körpályán mozog. Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor a körmozgás síkjára merőleges, irányát a jobbcsavarszabályból tudjuk megállapítani. A tömegpont kerületi sebessége az ábra szerint $v = \omega r_{\perp} = \omega r \sin \alpha$. Az ábráról az is leolvasható, hogy \mathbf{v} merőleges az $\boldsymbol{\omega}$ és \mathbf{r} által kifeszített síkra, azaz $\mathbf{v} \parallel (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Ezt a két eredményt



Bokor Nándor egyetemi docens a BME-n szerzett villamosmérnök-diplomát 1993-ban, majd ugyanott fizikából PhD fokozatot 1999-ben. Munkájában – az optika számos területén végzett kutatásai mellett – legszívesebben a fizika, azon belül kiemelten a relativitáselmélet oktatásának pedagógiai kérdéseivel foglalkozik. Ez utóbbi témában számos publikációja jelent meg a *Fizikai Szemlében*, valamint a *Physics Education* és a *European Journal of Physics* folyóiratokban.



1. ábra. Körmozgást végző tömegpont.

összekombinálhatjuk egyetlen vektori szorzattá: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Mivel a sebesség a helyvektor változási üteme, az előző összefüggés így is írható:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1)$$

ahol a szimbólum fölé írt pont az adott mennyiség idő szerinti differenciálhányadosát jelöli.

A mechanikában nagyon hasznos fogalom az \mathbf{N} impulzusmomentum. Perdületnek is hívjuk, kicsit megtévesztő elnevezéssel, mert \mathbf{N} akkor – például egyetlen tömegpont mozgása esetén – is jól használható mennyiség, amikor semmi sem „perdül”. Egy \mathbf{r} helyvektorral rendelkező, $m\mathbf{v}$ impulzusú tömegpont – mint amilyent az 1. ábra mutat – O origóra vonatkozó impulzusmomentumát az

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2)$$

képlet definiálja. \mathbf{N} iránya a keresztszorzás jobbkézszabályával könnyen megállapítható (lásd 1. ábra). Az (1) és (2) képletekből leolvasható, hogy ha a tömegpont sebességét növelni kezdjük, a v -vel együtt $|\boldsymbol{\omega}|$ és $|\mathbf{N}|$ is arányosan nő, azaz $|\boldsymbol{\omega}|$ és $|\mathbf{N}|$ egymással is minden pillanatban egyenesen arányosak. (Ugyanakkor maga az \mathbf{N} vektor nem egyszerűen az $\boldsymbol{\omega}$ vektor állandó számszorosa, mert a két vektor nem feltétlenül párhuzamos, lásd az 1. ábrát.) Ugyanez a helyzet, ha nem egyetlen tömegpontról, hanem kiterjedt merev testről van szó. Az ilyen testnek ugyanis szükségszerűen olyan a mozgása, hogy minden pillanatban létezik a térben egy pillanatnyi forgástengely, amely körül a test összes pontja éppen ugyanazzal az $\boldsymbol{\omega}$ pillanatnyi szögsebességgel végez egy körmozgásdarabkát (kivéve azokat a tömegpontokat, amelyek éppen a forgástengelyen vannak). A merev test teljes impulzusmomentuma az egyes tömegpontok impulzusmomentumának összege:

$$\mathbf{N} \equiv \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

A jobb oldalon szereplő tagok nagysága az előző bekezdés szerint egyenként mind egyenesen arányos az adott tömegpont szögsebességével, amelyről viszont most láttuk, hogy egy-egy pillanatban minden tömeg-

pontra ugyanaz. Azt a felfedezést, hogy a merev test \mathbf{N} pillanatnyi impulzusmomentuma *lineáris kapcsolatban* áll a test $\boldsymbol{\omega}$ pillanatnyi szögsebességével, így írhatjuk fel:

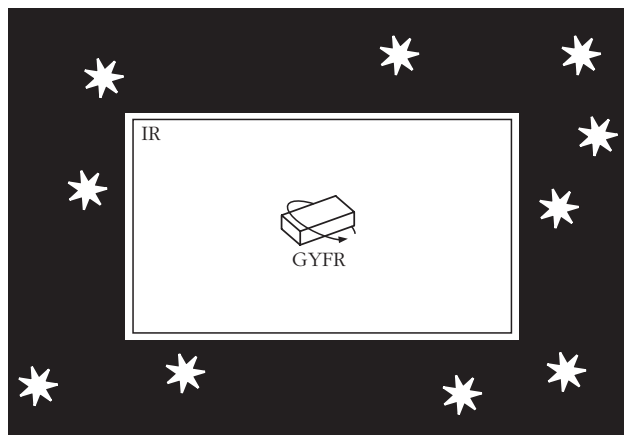
$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

ahol tehát $\boldsymbol{\theta}$ nem egyetlen szám, hiszen két nem feltétlenül párhuzamos 3D vektor közötti lineáris kapcsolatot fejezi ki. A $\boldsymbol{\theta}$ neve: tehetetlenségnyomaték-tenzor. Egy adott koordináta-rendszerben – amelyben \mathbf{N} és $\boldsymbol{\omega}$ vektorok a három komponensükkel írhatók fel – $\boldsymbol{\theta}$ egy 3×3 -as mátrix alakjában adható meg.

A (3) egyenletben szereplő \mathbf{N} és $\boldsymbol{\omega}$ vektorok egy adott vonatkoztatási rendszerben „mérődnek”, onnan nézve van fizikai tartalmuk. Ettől függetlenül ezekre a vektorokra – elfeledkezve fizikai jelentésükről –, mint adott hosszúságú és tájolású „nyilakra a térben” más vonatkoztatási rendszerekből is ránézhetünk, és a lineáris kapcsolatot kifejező (3) egyenletet természetesen ezekből a nézőpontokból is pillanatról pillanatra igaznak találjuk. Amikor pedig (3)-at kiírjuk három külön skalár komponensegyszerűként, azok konkrét alakja már nem csak attól függ, milyen vonatkoztatási rendszert választunk, hanem attól is, hogy azon belül milyen irányban vesszük fel a *koordinátatengelyeket*, amelyekre vetítve leolvassuk a két vektor komponenseit. Vonatkoztatási rendszerre mutat két példát a 2. ábra, amelyen egy világűrben szabadon lebegő űrkabin látunk, benne egy szabadjára engedett, bucskázó-forgó mozgást végző merev téglatesttel. (Az alábbi tárgyalás semmit sem veszít általános érvényéből, ha mostantól kezdve feltételezzük, hogy a téglatest tömegközéppontja nyugalomban van az űrkabinhoz képest.)

Az űrkabin, mint vonatkoztatási rendszer, *inerciarendszer* (IR): ha egy mozgást ennek falaihoz viszonyítva írunk le és elemzünk, joggal használhatjuk *Newton* törvényeit. Ha pedig képzeletben a bucskázó-forgó téglatesthez rögzítjük magunkat, és ehhez viszonyítva írjuk le a környező jelenségeket, egy másik vonatkoztatási rendszert kapunk; ebben úgy érezhetjük magunkat, mint a földi kiképzéskor a centrífugába be-

2. ábra. Vonatkoztatási rendszerek: inerciarendszer (IR) és „gyomorforgató rendszer” (GYFR).



szíjazott úrhajósok, akik a külvilágot vadul összevissza mozogni látják. Ezért a téglatesthez rögzített vonatkoztatási rendszert *gyomorforgató rendszernek* (GYFR) nevezem. A 2. ábra szorosan kapcsolódik a témánkhoz, mert a cikk elején említett feldobott teniszütő – a feldobás és az elkapás között legalábbis – szabadesést végez, súlytalanságban van, tehát éppen úgy „érzi magát”, mint a 2. ábrán látható téglatest, amit például az úrkabin utasa perdített be valahogyan, azután elengedte, és most figyelni a mozgását. (Az úrhajós előnyösebb helyzetben van, mint a teniszező, mert a hasáb forgása tetszőlegesen hosszú ideig folytonosan megfigyelhető, míg a Földön a kezünkől kiengedett teniszütő 1-2 másodperc alatt leesik.)

A következő lépés, hogy a (3) egyenletet komponens alakban írjuk fel. Erre vonatkoztatási rendszerként *nem az IR-t, hanem a GYFR-t fogjuk választani*. Igaz, hogy végső soron arra akarunk fényt deríteni, milyen mozgást végez a téglatest (a GYFR) az úrkabin (az IR) falaihoz képest – vagy a teniszütő egy földi inerciarendszerhez képest –, de semmit sem veszítünk azzal, ha a *fordított kérdésre* találjuk meg a választ. Ha ugyanis le tudjuk írni az úrkabin mozgását a téglatesthez rögzített nézőpontból, akkor a minket érdeklő kérdésre is rögtön választ kapunk, hiszen a két relatív mozgás egyszerűen egymás fordítottja. Ez természetesen még nem magyarázza, hogy miért kifejezetten előnyösebb a GYFR-t választani nézőpontnak, mint az IR-t. A válasz: azért, mert míg az úrkabinból nehéz matematikai alakban megfogalmazni a kérdésünket (hogyan mozog a levegőben bucskázó téglatest?), addig a téglatesthez rögzített nézőpontból nagyon egyszerűen és elegánsan tudjuk matematikai formába önteni a fordított kérdést (hogyan mozog körülöttünk az úrkabin?). Erre az egyszerű és elegáns megfogalmazásra az ad lehetőséget, hogy a magára hagyott téglatestre nem hat semmilyen erő, tehát *nem hat rá forgatónyomaték sem, ezért az \mathbf{N} impulzusmomentuma időben állandó*. Az, hogy az \mathbf{N} időben állandó (tehát mindig „a térnek” ugyanabba az irányába mutat), csak inerciarendszerből nézve igaz, mert az előző mondatban dőlt betűvel írt fizikai törvény, az úgynevezett impulzusmomentum-tétel, a Newton-axiómákból következik, márpedig azok csak inerciarendszerben érvényesek. Tehát akárhogy is forog, bukfeneczik a magára hagyott téglatest az úrkabin belsejében, az \mathbf{N} -vektora *az úrkabinhoz képest állandó tájolású*; ha az \mathbf{N} „nyíl” kezdőpontját a téglatest álló tömegközéppontjába képzeljük, akkor végpontja az úrkabin falának mindig ugyanarra a pontjára mutat. Most már érthető, miért érdemes a GYFR nézőpontjába helyezkednünk: ha le tudjuk írni a GYFR-hez képest *ezen egyetlen vektor* mozgását (időbeli változását), akkor magának az úrkabinnak a mozgását sikerült leírni, ami viszont inverz módon az eredeti kérdésünkre is megadja a választ.

A természet még ezenfelül is a segítségünkre siet. Éppen a testhez rögzített GYFR-ben teszi lehetővé, hogy az \mathbf{N} időbeli változását leíró egyenleteket a lehető legegyszerűbb matematikai alakban fogalmazhas-

suk meg. Bármilyen ugyanis a merev test alakja (téglatest, teniszütő, krumpli stb.), a testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben az egymásra merőleges koordinátatengelyek irányának ügyes megválasztásával mindig elérhető, hogy a (3) egyenlet komponensekkel felírt alakja ilyen legyen:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \theta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

amelyben tehát a θ tehetetlenségnyomaték-tenzor *diagonális*, azaz csak a főátlóban vannak nemzérus elemek, és azok konstansok. Az egyenleteket egyenként kiírva:

$$\begin{aligned} N_x &= \theta_x \omega_x, \\ N_y &= \theta_y \omega_y, \\ N_z &= \theta_z \omega_z. \end{aligned} \quad (5)$$

E speciális koordináta-rendszer x , y , z tengelyeit *főtengelyeknek* hívjuk, θ_x -et, θ_y -t és θ_z -t pedig a test három *fő tehetetlenségi nyomatékának*. A főtegyek fizikai jelentése kiolvasható az (5) egyenletekből: ha a testet úgy pörgetjük be, hogy $\boldsymbol{\omega}$ történetesen az egyik ilyen tengely irányába mutat, vagyis három komponense közül csak az egyik nem nulla, akkor (5) szerint az \mathbf{N} vektornak is csak ugyanez a komponense lesz nullától különböző, vagyis ekkor $\mathbf{N} \parallel \boldsymbol{\omega}$. (Általános mozgásnál az $\mathbf{N} \parallel \boldsymbol{\omega}$ nem szokott teljesülni.) A θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékok a tehetetlen tömeggel analóg fizikai fogalmak: azt fejezik ki, mennyire nehéz forgásba hozni a testet az egyes főtegyek körül. A főtegyek mindig átmennek a merev test tömegközéppontján. Téglatest esetén egybeesnek a test három szimmetriatengelyével. Az x , y , z betűkkel jelölt tengelyek a 6–9. képek mindegyikén az adott test főtegyeit mutatják.

Foglaljunk össze néhány fontos eddigi pontot. Az (x, y, z) koordináta-rendszert a GYFR-hez rögzítettük, origója a test tömegközéppontjában van, ami az IR-hez képest áll, a koordinátatengelyek pedig együtt forognak a testtel. Az $\boldsymbol{\omega}$ vektor a test pillanatnyi szögsebességét jelenti az IR-ből nézve, \mathbf{N} pedig a test impulzusmomentuma; ez utóbbi az IR-ből nézve állandó (az úrkabinnak ugyanarra a pontjára mutat), a GYFR-ből nézve viszont – bár nagysága ebből a nézőpontból nézve is állandó – ide-oda billeg, változtatja orientációját a testhez rögzített koordinátatengelyekhez képest. A (5) egyenletekben szereplő vektor-komponensek az \mathbf{N} és $\boldsymbol{\omega}$ vektoroknak ebben a különleges koordinátarendszerben leolvasott vetületei. Az egyenletekben megjelenő θ_x , θ_y és θ_z mennyiségek a test merevsége miatt időben állandók, de az \mathbf{N} - és $\boldsymbol{\omega}$ -komponensek a test mozgása során változnak. Az \mathbf{N} vektor GYFR-ből észlelhető billegéseit az $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ függvények írják le, feladatunk ezek meghatározása.

A továbblépést az a felismerés adja, hogy mivel a test az űrkabinhoz képest éppen ω pillanatnyi szögsebességgel forog, az űrkabin – és vele együtt az \mathbf{N} vektor is! – a testhez képest éppen $-\omega$ szögsebességgel forog. Vagyis a GYFR nézőpontjából az \mathbf{N} vektor éppen úgy viselkedik, mint az 1. ábrán az \mathbf{r} vektor az ábrát felrajzoló ember nézőpontjából, azzal a különbséggel, hogy most az \mathbf{N} végpontja ellenkező irányban fordul el, mint az 1. ábrán az \mathbf{r} végpontja. Ezek szerint lemásolhatjuk az (1) egyenletet, és $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{N}$, $\omega \rightarrow (-\omega)$ betűcserékkel a mostani helyzetre érvényes egyenletet kapunk [a GYFR nézőpontjából]:

$$\dot{\mathbf{N}} = (-\omega) \times \mathbf{N} = \mathbf{N} \times \omega, \quad (6)$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtam a keresztszorítás úgynevezett antikommutatív tulajdonságát. (5) alapján a (6) egyenletet komponensalakban is kiírhatjuk [a GYFR nézőpontjából]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_x \omega_x \\ \dot{\theta}_y \omega_y \\ \dot{\theta}_z \omega_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \theta_x \omega_x & \theta_y \omega_y & \theta_z \omega_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}, \quad (7)$$

ahol \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y és \mathbf{e}_z az (x, y, z) koordináta-rendszer egységvektorai, és a jobb oldalon a keresztszorítás szabályának könnyű megjegyzésére szolgáló úgynevezett determinánsalak szerepel. A keresztszorítást elvégezve az alábbi 3 komponensegyenletet kapjuk [a GYFR nézőpontjából]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_x \omega_x &= \theta_y \omega_y \omega_z - \theta_z \omega_z \omega_y, \\ \dot{\theta}_y \omega_y &= \theta_z \omega_z \omega_x - \theta_x \omega_x \omega_z, \\ \dot{\theta}_z \omega_z &= \theta_x \omega_x \omega_y - \theta_y \omega_y \omega_x. \end{aligned} \quad (8)$$

Az (5) összefüggések segítségével kiküszöbölve az ω -komponenseket a (8) egyenleteket ilyen alakba írhatjuk át [a GYFR nézőpontjából]:

$$\begin{aligned} \dot{N}_x &= \frac{\theta_y - \theta_z}{\theta_y \theta_z} N_y N_z, \\ \dot{N}_y &= \frac{\theta_z - \theta_x}{\theta_z \theta_x} N_z N_x, \\ \dot{N}_z &= \frac{\theta_x - \theta_y}{\theta_x \theta_y} N_x N_y. \end{aligned} \quad (9)$$

A (9) egyenleteket, amelyek az \mathbf{N} időbeli viselkedését írják le a testhez képest, a forgómozgás Euler-egyenleteinek hívjuk. Ha ezt a három csatolt differenciálegyenletet megoldjuk az $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ függvényekre, választ kapunk arra, hogy a merev test orientációja miként fog változni az IR-hez képest, ha a kezdő időpillanatban adott módon bepörgetjük, majd szabadon engedjük. Van valami, amit már számolás nélkül, ránézésre meg tudunk állapítani: ha sikerülne

„végtelen tizedesjegy pontossággal” valamelyik fő tengely körül bepörgetni a testet, akkor ez a fő tengely az IR-ben végig megőrizné irányát, a test ezután csakis e körül a tengely körül forogna. Ez onnan látszik – példának az x tengely körüli bepörgetést használom, de az érvelés a másik két tengelyre is ugyanez –, hogy ha a (9) egyenleteknek az $N_x(0) \equiv N$, $N_y(0) \equiv 0$, $N_z(0) \equiv 0$ kezdőfeltételeket adjuk, tehát az impulzusmomentum kezdetben hajszálpontosan x irányú, akkor mindhárom egyenlet jobb oldala azonosan nulla, tehát a GYFR-ből nézve egyik impulzusmomentum-komponens sem változik időben. Ez azt jelenti, hogy – ebben a példában – az \mathbf{N} végig az x tengely irányában fog állni, illetve megfordítva: az x tengely, ami most a forgástengely, az IR-ben végig ugyanabba az irányba fog mutatni. Ezt a fajta helyzetet *stacionárius forgásnak* nevezzük. Mindhárom fő tengely körüli forgás tehát stacionárius forgás, egyfajta egyensúlyi helyzet. A kérdés, hogy *stabilak-e* ezek az egyensúlyi helyzetek. Különösen arra vagyunk kíváncsiak, hogy miért lesz drasztikusan más az az eset, amikor a *közbülső* tehetetlenségi nyomatékú fő tengely körül pörgetjük be a testet, mint amikor a másik két fő tengely körül. Miért hívhatjuk a *közbülső* fő tengely körüli forgást *instabilnak*, és hogy néz ki pontosan a test mozgása ebben az esetben?

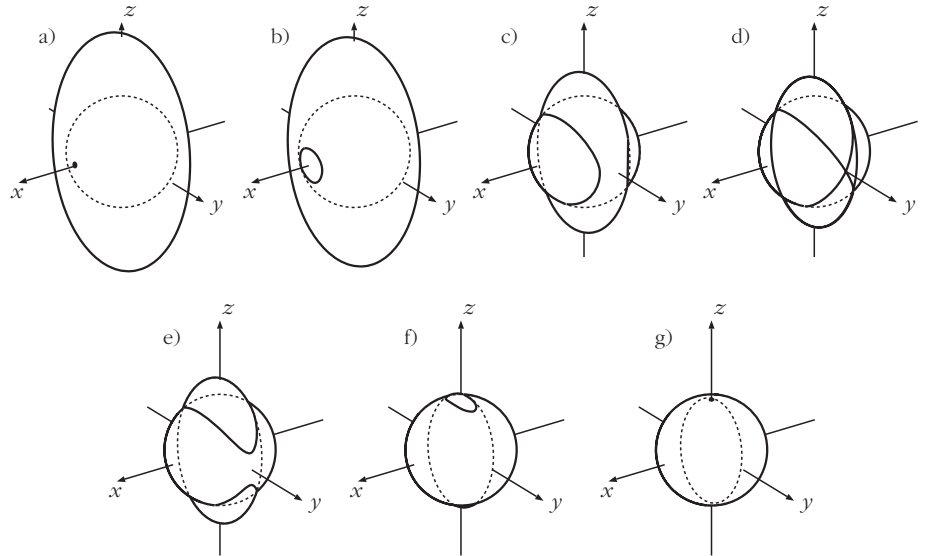
A (9) egyenletek teljesen szimmetrikusak az x , y , z alsó indexekre, azt gondolhatnánk, hogy az $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ időfüggvényeknek muszáj azonos módon viselkedniük. Ez azonban csalóka. Az olyan testekre, mint például a 6–9. képeken látható tárgyak, a θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékok mind különbözők, tehát nagyság szerint sorrendbe állíthatók. Ez viszont azzal jár, hogy a (9) Euler-egyenletek közül *kettőben* negatív lesz a

$$\frac{\theta_i - \theta_j}{\theta_i \theta_j}$$

együttható, *egyben* viszont pozitív. Ha például $\theta_x < \theta_y < \theta_z$ (mostantól a cikk példáiban a koordináta-rendszer mindig úgy veszem fel, hogy ez a reláció teljesüljön), akkor a (9) középső egyenlete, az N_y -ra vonatkozó fog másként viselkedni, mint a másik kettő. Általánosan tehát: azon N_i -komponens „mozgásegyenlete”, amely a *közbülső nagyságú* θ_i szerinti irányba mutat, alapvetően, jellegében eltér a másik kettőtől. Ezzel algebrailag máris érthetővé vált, miért várhatjuk, hogy a *közbülső* tehetetlenségi nyomatékú fő tengely körüli forgás teljesen más viselkedést mutasson, mint a másik két fő tengely körüli forgás.

Mielőtt konkrét példákon megvizsgálunk, milyen megoldást adnak a (9) egyenletek különböző kezdőfeltételek mellett, érdemes megnéznünk egy másik, különösen elegáns magyarázatot a teniszütő-tétel jelenségére. Ez *geometriai* diagramokkal, intuitív módon világítja meg az y tengely eltérő viselkedését. A geometriai tárgyalás egy tisztán matematikai kérdésre épül: *hogyan néz ki egy gömb és egy általános (nem bengerszimmetrikus) ellipszoid áthatása a két idom*

relatív méretének függvényében? A 3. ábrsorozat mutatja az azonos középponttal rendelkező ellipszoidot és gömböt. Az ellipszoid mérete a 3.a és 3.g ábrák között folyamatosan csökken, és a koordinátatengelyeket úgy vettem fel, hogy azok egybeessenek az ellipszoid szimmetriatengelyeivel. Az ellipszoid három különböző féltengellyel rendelkezik (az ellipszoid-féltengely analóg fogalom a gömb sugarával). A 3.a ábrán az ellipszoid legkisebb féltengelye éppen akkora, mint a gömb sugara, tehát a gömb teljesen az ellipszoid belsejében helyezkedik el, és mindössze az x tengely két



3. ábra. Gömb és általános ellipszoid áthatása; a metszetgörbék változása a két test relatív mérete függvényében.

átellenes pontján érinti azt. Ha az ellipszoid méretét kicsit csökkentjük (3.b-c ábra), a két test metszete mindig két görbét ad, amelyek szimmetrikusan helyezkednek el az x tengely pozitív és negatív félegyeneséről. Ha az ellipszoid éppen akkora, hogy a középső féltengelye egyezik meg a gömb sugarával, a 3.d ábrán látható helyzet áll elő. Mondhatjuk, hogy az ellipszoid ekkor az y tengely két átellenes pontján „érinti a gömböt”, ez azonban feltűnően más helyzet, mint amit a 3.a ábrán az x tengelyen látunk. Az ellipszoidot tovább zsugorítva (3.e-f ábra) jellegre ugyanaz ismétlődik meg a z tengely irányában, mint ami a folyamat elején történt az x tengely mentén. Végül, amikor az ellipszoid már olyan kicsi, hogy a legnagyobb féltengelye egyezik meg a gömb sugarával, a gömb teljes egészében körülveszi az ellipszoidot, és a metszetgörbék ismét két ponttá zsugorodnak össze, ezúttal a z tengely két átellenes oldalán (3.g ábra). Figyeljük meg a 3.a, d, g ábrákon milyen drasztikusan más a két test áthatása, amikor az y tengely (az ellipszoid középső féltengelye) mentén „érintik egymást”, mint amikor az x vagy a z tengely (az ellipszoid legkisebb vagy legnagyobb féltengelye) mentén!

Nézzük, hogyan kapcsolódik a témánkhöz ez a geometriai érdekesség. Egy olyan merev test mozgási energiája, amelynek a tömegközéppontja éppen nyugalomban van, a

$$K = \frac{1}{2} \theta_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} \theta_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} \theta_z \omega_z^2 \quad (10)$$

alakban írható. (Ezt a mozgási energiát az inerciarendszerben mérik ekkorának, de a képletben szereplő θ - és ω -komponensek a testhez rögzített GYFR-ben, a főtengelyekkel kijelölt (x, y, z) koordinátarendszerben értelmezett értékek.) A (10) összefüggés levezetését mellőzöm, de maga a képlet középiskolásoknak is ismerős lehet, mert felbukkan a hőtanban: így írjuk fel egy többatomos (három forgási szabadságfokkal rendelkező) molekula forgási energiáját. Az

(5) összefüggések segítségével a (10) jobb oldalát átírhatjuk úgy, hogy szögsebesség helyett az impulzusmomentum komponenseivel legyen kifejezve:

$$K = \frac{N_x^2}{2 \theta_x} + \frac{N_y^2}{2 \theta_y} + \frac{N_z^2}{2 \theta_z}. \quad (11)$$

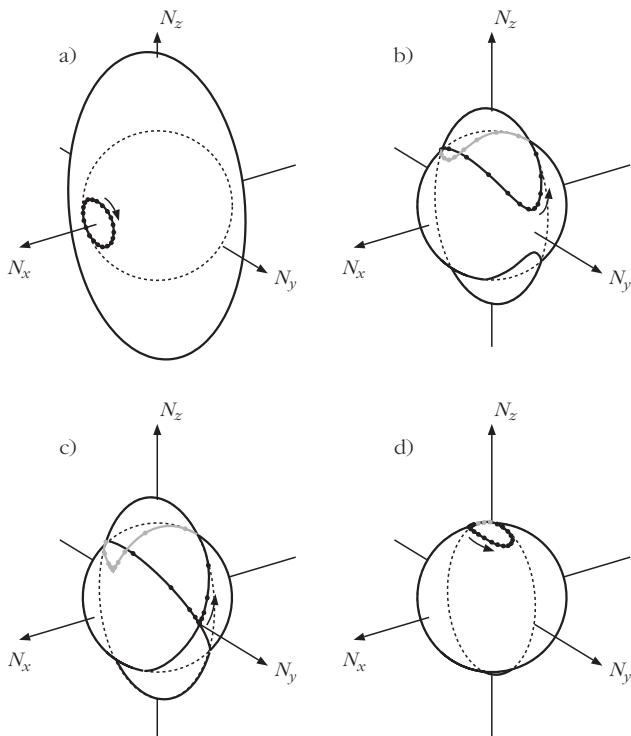
Vezessük be az

$$a_x^2 \equiv 2 K \theta_x, \quad a_y^2 \equiv 2 K \theta_y, \quad a_z^2 \equiv 2 K \theta_z \quad (12)$$

jelöléseket. A (12) jobb oldalain szereplő mennyiségek a test mozgása közben nem változnak, hiszen a bepörgetett és a levegőben magára hagyott test K mozgási energiája állandó, és a fő tehetetlenségi nyomatékok is azok (az utóbbiak csak a merev test főtengelyekhez képest mért tömegeloszlásától függenek). Az új jelölésekkel (11) az alábbi egyszerű alakba írható:

$$\frac{N_x^2}{a_x^2} + \frac{N_y^2}{a_y^2} + \frac{N_z^2}{a_z^2} = 1. \quad (13)$$

A (13) egyenletben egy origó-középpontú, a_x , a_y , és a_z féltengelyekkel rendelkező ellipszoid egyenletére ismerünk rá. Olyan ellipszoid ez, amelyet nem a valós 3-dimenziós térben, hanem az N_x , N_y , N_z merőleges tengelyekkel jellemzett, elvont „impulzusmomentum-térben” kell elképzelni. Az ellipszoid alakját – a féltengelyek arányát – a (12)-ből látható módon a θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékok határozzák meg, tehát például a 6-9. képeken látható tárgyak mindegyikére egy-egy jellegzetes ellipszoidalakot kapunk. Egy konkrét test különböző mozgásaihoz különböző nagyságú ellipszoid tartozhat, hogy mekkora, azt – szintén a (12)-ből látható módon – a test K mozgási energiája dönti el. Ez utóbbi okból a (13) ellipszoidot mozgásienergia-ellipszoidnak (K -ellipszoidnak) hívjuk.



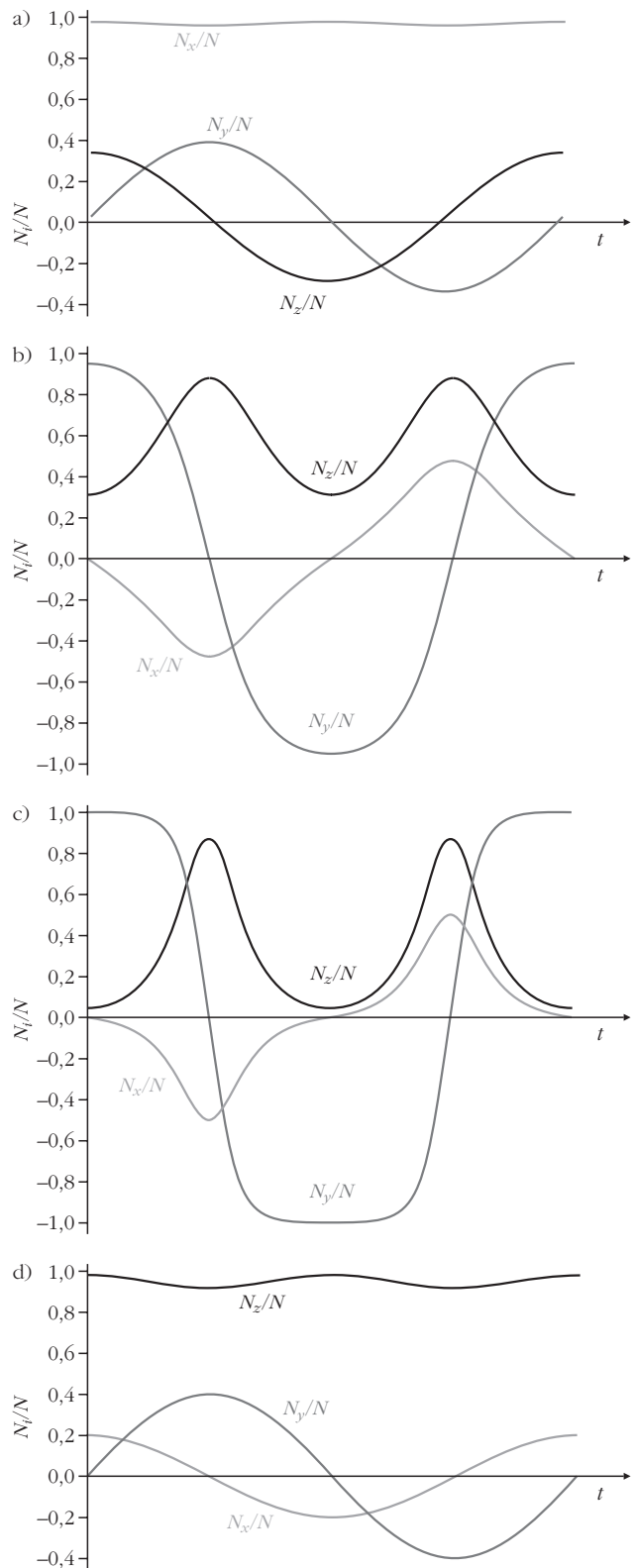
4. ábra. Az N -gömb és a K -ellipszoid áthatása, állandó értéken tartott impulzusmomentum és egyre kisebb mozgási energiák esetére.

Mint korábban láttuk, a test N impulzusmomentum-vektora is időben állandó, de csak az inerciarendszertől nézve. Az N_x , N_y , N_z komponensek viszont a testhez rögzített GYFR-ben vannak értelmezve. Ebből a nézőpontból nézve maga az N vektor nem állandó (változási üteme a (6) egyenletnek engedelmeskedik), de *hossza* igen:

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = N^2 = \text{állandó.} \quad (14)$$

A (14)-ben egy N sugarú gömb egyenletére ismerünk. Ezt a gömböt, mivel a *nagyságát* az impulzusmomentum értéke határozza meg, *impulzusmomentum-gömbnek* (N -gömbnek) nevezzük. Most már érthető, hogyan kapcsolódik a teniszütő-tételhez a gömb és ellipszoid áthatását mutató 3. ábra: mivel a szabadon hagyott test mozgása során mind a (13), mind a (14) egyenletnek teljesülnie kell, az N vektor végpontjának egyszerre rajta kell lennie a K -ellipszoid és az N -gömb felületén. Ez a végpont tehát *csak a két idom valamelyik metszetgörbéje mentén mozoghat*.

A 4. és 5. ábrákon ugyanazon merev test különböző mozgásait követhetjük nyomon az absztrakt impulzusmomentum-térben. (Pontosabban fogalmazva azt követhetjük nyomon, hogy a testhez rögzített nézőpontból az N vektor – és ezzel a testet körülvevő inerciarendszer, a „külvilág” – hogyan mozog. E mozgás fordítottját végzi maga a test a külső szemlélő szerint.) Ezek az ábrák megadják a választ a (9) egyenletek alatti bekezdésben feltett kérdésre: a 3 fő tengely körüli forgások közül melyek stabilak/instabilak, és miért? A 4–5. ábrákról le hagytam azt a három esetet, amikor a forgás *pontosan* valamelyik fő tengely, mint



5. ábra. Az N impulzusmomentum-vektor három komponensének időfüggése, a 4.a–d ábrákon vázolt esetekre.

forgástengely körül történik; az a három ábra teljesen úgy nézne ki, mint a 3.a, d, g ábrák. Tudjuk, hogy az a három eset egyensúlyi, stacionárius állapot (az indoklás a (9) egyenletek alatti bekezdésben található). A stabilitás kérdését úgy kell eldönteni, hogy kicsit

kimozdítjuk a testet egy-egy ilyen egyensúlyi állapotból, és megnézzük, ilyen körülmények között hogyan mozog tovább.

A 4–5. ábrákat a következőképpen készítettem: választottam 3 különböző számértéket – az ábrák megfelelő aleteire mindig ugyanazokat – a θ_x , θ_y , θ_z fő tehetetlenségi nyomatékoknak (úgy, hogy a $\theta_x < \theta_y < \theta_z$ reláció teljesüljön), és megválasztottam az \mathbf{N} vektor nagyságát, valamint hogy milyen kezdő irányban álljon a GYFR-ből nézve (ez utóbbi adat az ábrák (a)–(d) eseteire más és más, és ezt a kezdő irányt mindig úgy jelöltem ki, hogy a három fő tengely valamelyikéhez *közel* legyen). Ezek az előre megadott paraméterek a (11) összefüggés alapján egyértelműen rögzítették a K mozgási energia értékét, tehát a (13), illetve a (14) alapján felrajzolhatóvá vált a mozgási-energia-ellipszoid és az impulzusmomentum-gömb (4. ábra). Az \mathbf{N} végpontja az ellipszoid és a gömb valamelyik metszetgörbéjén mozog; hogy a két metszetgörbe közül melyiken, az az $N_x(0)$, $N_y(0)$, $N_z(0)$ kezdőértékekből kiderül. Ennek kiderítéséhez pedig, hogy ezen a metszetgörbén milyen irányban és milyen gyorsan fut végig az \mathbf{N} végpontja, egyszerű számítógépes programot írtam, amely a fent említett kezdőfeltételek mellett numerikusan integrálja a (9) differenciálegyenleteket. Az így kiadódott $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$ időfüggvényeket a 4. ábra egyes eseteire az 5. ábra megfelelő grafikonjai mutatják. Az időfüggvények ismeretében a 4. ábrán a metszetgörbéken pöttyökkel jelöltem, hogy egyenletes időközönként éppen hol tart az \mathbf{N} vektor végpontja, a kis nyílak pedig \mathbf{N} mozgásának az irányát mutatják.

A 4–5. ábrákat átböngészve a következőket figyelhetjük meg:

- 4.a és 5.a ábrák: ha a testet *majdnem* az x tengely – a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú tengely – körül pörgetjük be ($N_x(0) \gg N_y(0), N_z(0)$), akkor az \mathbf{N} végpontja mindvégig az N_x tengely közelében marad, akörül imbolyog. (Ezt az ω szögsebességű forgáshoz képest lassú imbolygó mozgást precessiónak nevezük.) A valós térbeli mozgásra lefordítva: a test x tengelye az IR egy rögzített iránya körül végez kis precessziókat. *A test x tengely körüli forgása tehát stabil*; hiszen amikor az x tengely körüli stacionárius forgáshoz képest egy kicsit kimozdítottuk a kezdőállapotát, mozgása végig az egyensúlyi állapot közelében maradt.

- 4.d és 5.d ábrák: ha a testet nagyjából a z tengely – a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú tengely – körül pörgetjük be ($N_z(0) \gg N_x(0), N_y(0)$), hasonló a helyzet: az \mathbf{N} vektor végpontja mindvégig az N_z tengely közelében marad. A test z tengelye az IR egy rögzített iránya (az \mathbf{N} iránya) körül precesszál. *A test z tengely körüli forgása is stabil*.

- 4.b és 5.b ábrák: itt a testet úgy indítjuk útjára, hogy majdnem az y tengely – a *közbuló* tehetetlenségi nyomatékú tengely – körül pörgetjük be ($N_y(0) \gg N_x(0), N_z(0)$). Egészen más mozgást kapunk, mint az előző két esetben. Két dologra figyelhetünk fel. Egyrészt a mozgás során N_y periodikusan előjelet vált a testhez rögzített nézőpontból nézve, vagyis a test szá-

bályos időközönként *átfordul* a térben, y tengelye az IR-ből nézve oda-vissza billeg. *A test azon forgása tehát, amelyet az y tengely körül indítunk, instabil*; hiszen amikor az y tengely körüli egyensúlyi forgási állapothoz képest egy kicsit eltérő állapotból indítottuk útnak, mozgása az idő folyamán drasztikusan eltávolodott ettől az egyensúlyi állapottól. Az y tengely oda-vissza átfordulását mutató ábrákkal érthetővé vált a cikk elején említett teniszütős tapasztalat. A 4.b ábrából az is látható, hogy az \mathbf{N} végpontját jelképező pöttyök a $\pm N_y$ tengely közelében *sűrűsödnek*. Ez azt jelenti, hogy a test több időt tölt a két szélső állapotban, vagyis a nagyjából $\pm y$ tengely körüli forgásokkal, mint azzal, hogy „átbucskázzon” az egyik szélső esetből a másikba. Ez a jelenség még jobban megfigyelhető a 4.c és 5.c ábrákon, ahol $N_y(0) = 0,999N$, tehát a testet képzeletben szinte pontosan az y tengely körüli forgással bocsátottam útnak. (A 4.c ábrán tehát egy hajszálnyi más az ellipszis és a gömb áthatása, mint a 3.d ábrán!)

Az 5. ábrán az időtengelyt nem kalibráltam számokkal. Minden grafikont vízszintes irányban akkorára nyomtam össze, hogy a folyamatoknak éppen egy teljes periódusa férjen rá. Ez a periódusidő azonban az egyes esetekre eltérő. Az 5.b és 5.c ábrák között például nem csak az a különbség, hogy az utóbbin az N_y/N két szélső állapota „vízszintesebb”, és hosszabb ideig tart az előjelváltás időtartamához képest, hanem az is – ez az ábrákból nem látszik, csak a számszerű részletekből –, hogy a teljes periódusidő is *hosszabb*, mint az 5.b ábrán. Tehát minél inkább sikerül a kezdeti bepörgetéskor az \mathbf{N} -t az y tengely irányába állítani, annál jobban elnyúlik a folyamat teljes periódusa. Ha sikerül(hetne) végtelen tizedesjegy pontosságra az y tengely körül bepörgetni a testet, akkor az oda-vissza billegés periódusideje a végtelenhez tartana, tehát a test sosem fordulna át, mindvégig az y tengely körül forogna. Ez (lenne) az az egyensúlyi, stacionárius forgás, amiről fentebb már volt szó.

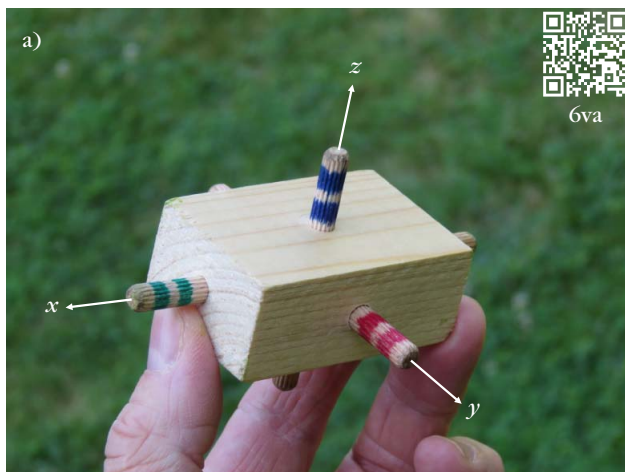
Az x tengely és a z tengely körüli forgás tehát stabil. De *egyformán* stabilak-e? Ha a forgást végző testben valamilyen belső disszipatív folyamat zajlik – a következő szakaszban, a kísérletek között látunk majd erre példát –, akkor a test K forgási energiája nem marad időben állandó, egy része hővé alakul. A lecsökkent forgási energia *kisebb K -ellipszoidot jelent*. Ugyanakkor a test impulzusmomentuma, tehát az \mathbf{N} -gömb mérete állandó marad, hiszen a belső erők nem fejtenek ki a testre eredő forgatónyomatékot. Ha ilyen körülmények között a testet kezdetben például nagyjából az x tengely körül pörgetjük be, tehát körülbelül a 4.a ábrán látható állapotból (az egyik „pöttyből”) indítjuk ki, a K csökkenése miatt az \mathbf{N} vektor precessziós mozgása nem válhat tartóssá, és a mozgás végső soron „a 4.d ábrán túli” állapotban köt ki, amikor a K -ellipszoid már a lehető legkisebb, és csak az N_z tengely két pontjában érinti az \mathbf{N} -gömböt. Disszipatív hatások jelenlétében tehát a test mozgása végső soron z tengely körüli forgássá alakul: *a test legstabilabb forgása a legnagyobb tehetetlenségi nyo-*

matékú főtengely körüli forgás, ehhez tartozik adott impulzusmomentum mellett a lehető legkisebb mozgási energia. A következő szakaszban látni fogjuk, hogy e jelenség bemutatására leghétköznapibb tárgyaink némelyikével kifejezetten egyszerű és látványos kísérletet lehet végezni.

Kísérletek

Az y tengely körül forgásba hozott test oda-vissza billegését Dzsani-bekov-hatásnak is nevezik, *Vlagyimir Dzsani-bekov* űrhajós tiszteletére. Dzsani-bekov egy 1985-ös űrutazás alkalmával fedezte fel, hogy amikor egy szárnyas anyacsavart lepörget a csavaráról, az a levegőben – a súlytalanságban – úgy pörög tovább, hogy szimmetriatengelyét oda-vissza billegtetni a térben. Inkább újrafelfedezés volt ez, hiszen a közbűlső tehetetlenségi nyomaték tétele már a 19. század első felétől ismert volt a fizikában, de Dzsani-bekov előtt talán senkinek nem volt még alkalma ennyire döbbenetes látványként megtapasztalni. Most már mindannyian megtehetjük, például egy YouTube-on található NASA-videóklip megtekintésével [4]. Érde-

6. kép. Tiplikkel ellátott fahasáb, három különböző fő tehetetlenségi nyomatékkal: $\theta_x < \theta_y < \theta_z$. Lásd a *6va* és *6vb* videóklipet, amelyek megtekinthetők a QR-kódokra kattintva, illetve az 1. és 2. lábjegyzet segítségével.



mes meggyőződni róla, hogy ez a változat tényleg mennyivel látványosabb, mint a levegőbe dobott teniszütő egyetlen átfordulása. A dolog kulcsa a *súlytalanság*, hiszen a kikapcsolt hajtóművel lebegő űrhajóban, mint inerciarendszerben, az egyhelyben lebegő és csak forgó mozgást végző test tetszőlegesen hosszú ideig tanulmányozható. Igaz, hogy a feldobott teniszütő is súlytalanul, szabadon mozog a levegőben, de repülése nagyon rövid ideig tart, és az alatt is lassan forog a levegőben. Célunk, hogy földi körülmények között is hasonló személyes élményt éljünk át, mint Dzsani-bekov vagy a NASA-videóklip rögzítő űrhajósok. Ehhez célszerű a nagy teniszütő helyett inkább valamilyen kis tárgyat használni, és azt *nagy kezdő szögsebességgel* bepörgetni. Az űrhajósok maguk is súlytalanul lebegnek, tehát kényelmes nézőpontból tudják a test forgását figyelni: a térnek mindvégig ugyanarra a pontjára szögezhetik tekintetüket. Ezt elvileg a Földön is utánozhatnánk (például megtehetnénk, hogy egy 20 méter magas ugrótoronyból vízbe ugranánk, és az elrugaszzkodás pillanatában bepörgetnénk és rögtön ki is engednénk a kezünkől a kis tárgyat, ilyen módon a vízbeérésig körülbelül 2 másodpercig közlelről figyelhetnénk a tárgy forgását), ez azonban kicsit körülményes és talán veszélyes is lenne. Érdekes inkább stabilan állni a földön, amikor a tárgyat eldobjuk. Ezzel feladjuk az inerciarendszerbeli nézőpontot, hiszen a szabadon, relaxált állapotban mozgó tárgy hozzánk képest parabolapályán *gyorsul*, és ezt tekintetünkkel sajnos követnünk kell, viszont az effektus sok esetben így is nagyon szépen látható. A mozgás részletesebb megfigyeléséhez pedig a tárgyról *lassított felvételen* videót készíthetünk. Ehhez nem feltétlenül kell drága és nagy berendezés, sok diáknak van például olyan mobiltelefonja, amelyben beépített funkció a lassított felvétel. Én a Canon SX60-HS típusú, bridge-kategóriás fényképezőgépet használtam mind a normál videók, mind a lassított felvételek elkészítésére. Ez a fényképezőgép (igaz, nagyon kis felbontás mellett) 8-szorosra lassított videók felvételére képes.

Talán a legegyszerűbb alakzat, amellyel a teniszütő-tétel demonstrálható, a téglatest. A 6. kép két nézetből mutat egy fából készült téglatestet, amelynek oldalközéppontjaiba 6 fatipli van merőlegesen befúrva. (Hálás köszönetemet fejezem ki *Pósfai Józsefnek*, aki a 6. képen látható mellett több méretben és méretarányban készített nekem ilyen remek kísérleti eszközöket.) A tiplik egyrészt fizikailag is láthatóvá teszik a fő tehetetlenségi tengelyeket, másrészt – és ez sokkal fontosabb – az eszközt a tipliknél fogva könnyű nagy szögsebességgel bepörgetni a főtengelyek körül. Hogy a videókon és az élő kísérletben is jobban követhetők legyenek a test különféle mozgásai, a tengelyek pozitív oldalát különböző színekkel jelöltem meg: zölddel az x , pirossal az y , kékkel pedig a z tengelyét. Mint a *6va videó*¹ mutatja, valós időben, sza-

¹Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/6va> helyen.



7. kép. Három különböző tárgy legóból. A fekete tengely az adott tárgy a) legkisebb, b) közbülső, c) legnagyobb fő tehetetlenségi nyomatéka. Lásd a 7va és 7vb videóklipet, amelyek megtekinthetők a QR-kódokra kattintva, illetve a 3. és 4. lábjegyzet segítségével.

bad szemmel is jól látható az y tengely körüli forgás instabil jellege, illetve az x és z tengely körüli forgások stabilitása. Ha az y tengely körül pörgetjük be a testet, az 5.c ábra kapcsán részletezett okból nagy eséllyel nem az átbutcskázás közben fogjuk elkapni, hanem akkor, amikor éppen egész számú átfordulást végeztünk. Nagyon kis gyakorlás kell ahhoz, hogy a testet fel-feldobálva mindig egy teljes átfordulás után, ellentétes oldalával érjen vissza a kezünkbe az y tengely. Ez jól látható a 6va videó középső szegmensében, amelynek felvételét szinte semekkorá gyakorlás

8. kép. Plüsstárgyak, három különböző fő tehetlenségi nyomatékkal: $\theta_x < \theta_y < \theta_z$. Lásd a 8va és 8vb videóklipet, amelyek megtekinthetők a QR-kódokra kattintva, illetve az 5. és 6. lábjegyzet segítségével.



nem előzte meg. A 6vb videó² ugyanezen test mozgását mutatja a három fő tengely körül, lassított felvételben. A megfigyelési idő „széthúzásával” nagyon szépen visszakapjuk az űrhajósok által filmre vett döbbenetes látványt. (Szubjektív megjegyzés: a dobálgatható fahasáb nem csak kísérleti eszköznek, hanem ki-kapcsolódást nyújtó „fidget” játéknak is nagyszerű.)

Legóból is nagyon egyszerűen építhetünk kísérleti eszközt. A 7. képen látható modellek elkészítésénél az motivált, hogy a Dzsánibekov-féle szárnyas anyához hasonló szimmetriájú eszközzel végezzek kísérleteket. Itt nem egyetlen tárgyat pörgettem be a három fő tengelye körül, hanem háromféle tárgyat egy-egy fő tengelye körül. Ehhez egy olyan egyszerű alapelemet készítettem, amelybe különböző hosszúságú tengelyeket lehet illeszteni: a 7.a, b és c képeken a fekete tengely hossza rendre 12, 6, illetve 3 egység. A fekete tengely az így kapott tárgyaknak rendre a legkisebb, a közbülső, illetve a legnagyobb tehetlenségi nyomatékú fő tengelye lett, ezt tükrözik a tengelyek eltérő betűjelei a 7.a, b és c képeken. A 7Va videón³ valós sebességgel figyelhető meg a 3 test mozgása. A videó középső szegmensében tisztán kivehető és nagyon izgalmas látványt nyújt a tárgy teljes átfordulása a térben. A 7vb videó⁴ ismét azt szemlélteti, hogy érdeemes lassítva is megnézni a háromféle mozgást.

Az elméleti leírásban felbukkant K -ellipszoid adhatja az ötletet, hogy a kísérleteinkhez keressünk olyan tárgyat is, amelynek tényleges alakja általános ellipszoid vagy ahhoz hasonló. Ezeknek külön pedagógiai haszna van: a diákokkal meg lehet beszélni, hogy a (homogén tömegeloszlásúnak tekintett) tárgy ellipszoid alakja milyen kapcsolatban van az absztrakt impulzusmomentum-térben létező K -ellipszoid alakjával. (A válasz: jellegét tekintve fordított kapcsolatban. A K -ellipszoid az N_x tengely irányában a leghosszabb, míg a tárgy az x tengely mentén a leghosszabb, mindkettő azért, mert az x tengely körüli forgáshoz tartozik a legkisebb tehetlenségi nyomaték.) A 8. képen látható plüsstárgyak közel ellipszoid alakúak. Szigorúan véve nem merev testek, ráadásul a

²Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/6vb> helyen.

³Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/7va> helyen.

⁴Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/7vb> helyen.

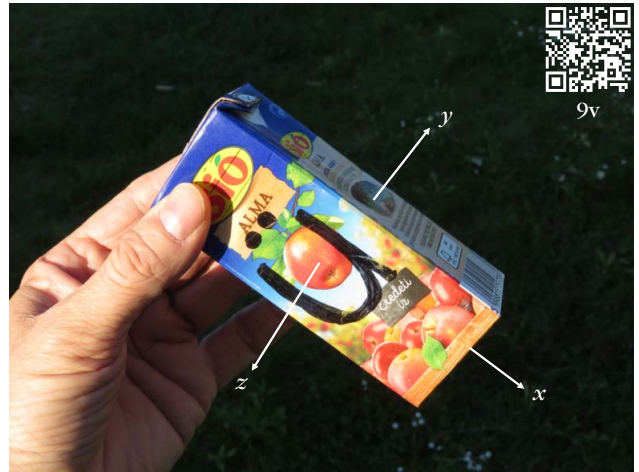
8.b képen szereplő kutyának lifegő füle, farka, lábai vannak, de – mint a $8va^5$ és $8vb^6$ lassított videókon látható – ezek a plüsstárgyak is teljesen alkalmasak a teniszütő-tétel bemutatására.

A következő példával visszatérek a téglatesthez (9. kép). Ez talán a legegyszerűbb kísérleti eszköz az összes közül, és bizonyos szempontból a legtanulságosabb. A dobozos gyümölcslet – de a dobozos tej-szín is éppen ilyen jól működik – aránylag nagy tömege miatt egy kézzel is könnyű felhajítani a levegőbe úgy, hogy jó pontossággal az y tengelye körül kezdjen pörögni. A mozgás azonban nem úgy folytatódik, ahogy egy merev testtől a teniszütő-tétel alapján várnánk: a doboz az eldobás után szinte azonnal befordul olyan irányba, hogy amerre eredetileg az y tengelye nézett, most a z tengelye fog nézni, és *onnantól kezdve végig a z tengely körül forog*. A kísérlet nagyon jól megfigyelhető szabad szemmel, illetve valós sebességű videón, már csak azért is, mert a doboz feltűnően más irányban áll, amikor elkapjuk, mint amikor feldobtuk: „lapjával” bepörgetve dobtuk fel, és mindig az „élével” érkezik vissza a kezünkbe. A $9v$ videó⁷ középső szegmense ezt a jelenséget mutatja lassítva. (A lassított videón ismét hagytam, hogy a tárgy leessen a földre, hogy szabadesése minél hosszabban megfigyelhető legyen.) E jelenség okáról fentebb már volt szó: a test azért állapodik meg a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú tengely körüli forgásnál, mert pörgése közben van egy mechanizmus – az almalé turbulens áramlása a dobozban –, amely disszipálja a kezdeti forgási energia egy részét. Az almalés dobozt tehát a 4.c ábrának megfelelő állapotból indítottam ki, és abban a forgási állapotban stabilizálta magát, amelyben a K -ellipszoid olyan kicsi, hogy már csak az N_z tengely mentén érinti az N -gömböt. (Szemléletes kép lenne, csak pontatlan, azt mondani, hogy a folyamat közben a K -ellipszoid fokozatosan „belezsugorodott” az N -gömbbe. Azért pontatlan, mert amíg a doboz belsejében a folyadék-molekulák különböző irányokban áramlanak, nem használható a teljes mozgási energia leírására a – csak merev testre érvényes – (11) összefüggés, tehát a K -ellipszoid fogalma sem.) Ha azt akarjuk, hogy az almalés doboz is produkálja a Dzsani-bekov-hatást, *merev* testet kell csinálni belőle. Erre két egyszerű módot találtam: az első esetben az almalét fél napig a mélyhűtőbe tettem, tehát a dobozt a kísérlet alatt már jéggé fagyott almalé töltötte ki. Ezt mutatja a $9v$ videó első szegmense. A dobozra filctollal nagy „J” betűt írtam, hogy könnyen megkülönböztethető legyen az eredeti kísérlettől. Mint a videón látható, a fagyott almalés dobozzal szépen bemutatható a Dzsani-bekov-hatás. A másik lehetőség: meginni az almalevet. Az üres doboz már merev testként viselkedik. Ez lát-

⁵Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/8va> helyen.

⁶Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/8vb> helyen.

⁷Megtalálható a <http://fizikaiszemle.hu/extra/bokor202205/9v> helyen.



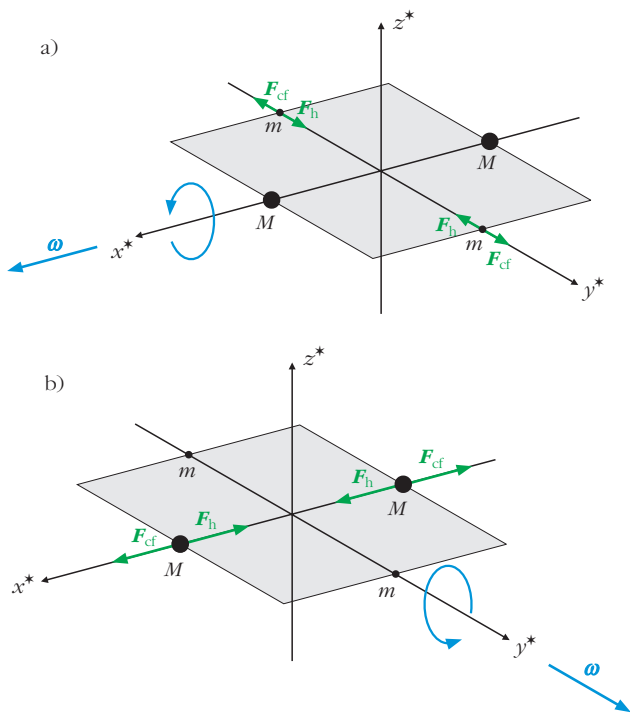
9. kép. Dobozos almalé, három különböző fő tehetetlenségi nyomatékkal: $\theta_x < \theta_y < \theta_z$. Lásd a $9v$ videoklipet, amely megtekinthető a QR-kódra kattintva, illetve a 7. lábjegyzet segítségével.

ható a $9v$ videó harmadik szegmensén, amelyen a dobozra filctollal nagy „Ü” betű van írva (az üres almalés doboz látható a 9. képen is). Vannak azért eltérések: az üres doboz nagyon kis tömegű, sokkal nehezebb vele a kísérletet elvégezni, mint a fagyott almalés dobozzal. Még két kézzel fogva sem könnyű olyan kiegyenlítettten feldobni, hogy éppen az y tengely körül kezdjen gyors forgásba. Ha a kísérletet a szabadban végezzük, a kis tömeg miatt arra is ügyelni kell, hogy teljes szélcsend legyen. Ha nincs, a diákokkal azt is meg lehet figyelni és diszkutálni lehet, milyen változásokat okozhat az elméleti esethez képest egy-egy széllelökés.

A fenti kísérleti eszközök csak néhány példát mutattak arra, hogy egyszerű tárgyakat használva is élvezettel és sokoldalúan lehet tanulmányozni a teniszütő-tételt és a hozzá kapcsolódó jelenségeket. Ha az embert elkapja a teniszütő-tétel láza, a lakásában járva-kelve szinte mindenütt kipróbálásra érdemes kísérleti eszközöket talál.

Kiegészítés az elmélethez: a Terry Tao-féle magyarázat

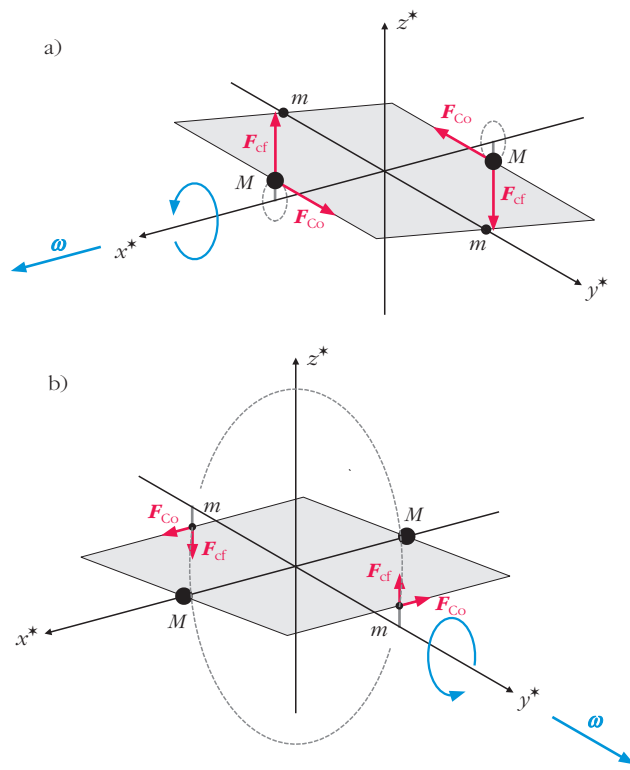
A cikk fenti, csatolt differenciálegyenletekre, elvont impulzusmomentum-térre hivatkozó elméleti összefoglalója esetleg hiányérzetet hagyhat az olvasóban. Nincs-e olyan, legalább kvalitatív magyarázat a teniszütő-tételre, amely a test tömegpontjaira ható *erők* segítségével az átbucskázást okozó „fizikai mechanizmust” világítja meg, és így talán közvetlenebbül érthető egy elsőéves vagy egy középiskolás számára? A választ (de igen, van) és a magyarázatot Terry Tao matematikus adta meg néhány évvel ezelőtt egy internetes fórumon [5]. Az alábbiakban ezt az érvelést foglalom össze. Tekintsük a 10.a ábrán látható merev testet. Ez egy elhanyagolható tömegű (az ábrán szürkével jelölt) négyzet alakú lapból, valamint 2-2 hozzáerősített pontszerű tömegekből áll, amelyekre $M \gg m$. Kis utána-gondolással belátható, hogy a 10.a ábrán az x^* , y^*



10. ábra. $2(M+m)$ tömegű merev test forgása pontosan a) a legkisebb, illetve b) a közbülső tehetetlenségi nyomatékú tengely körül.

és z^* tengelyek rendre a test legkisebb, közbülső és legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú fő tengelyeivel esnek egybe, összhangban az eddigi betűjelöléseinkkel. A test mozgásának elemzését viszont most *nem* a testhez rögzített GYFR-ből és nem is az IR-ből végezzük, hanem egy olyan vonatkoztatási rendszerből, amely az IR-hez képest az adott pillanatban éppen *a test ω pillanatnyi szögsebességével forog*. Erre utal a tengelyek megcsillagozása is; fontos tudatosítani, hogy ezek a tengelyek *nincsenek a testhez rögzítve*, hanem valamelyikük – hogy melyik, azt mindig előre eldöntjük – mindvégig a pillanatnyi ω irányával esik egybe, a másik kettő pedig ezzel az ω -val forog az IR-hez képest. A 10.a és a 11.a ábrákon az x^* tengely esik egybe az ω vektorral, tehát ez a test mozgásának pillanatnyi forgástengelye, a 10.b és a 11.b ábrákon pedig az y^* tengely. A test mozgását az m és M tömegpontokra ható *erők* segítségével fogjuk elemezni, amelyekbe a csillagos vonatkoztatási rendszerben bele kell érteni a centrifugális erőt és a Coriolis-erőt is, hiszen ez a vonatkoztatási rendszer az IR-hez képest forog. (A neve a továbbiakban: forgó vonatkoztatási rendszer, „FVR”.)

A 10.a ábrán a test pontosan a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú fő tengelye körül forog, az x^* forgástengely egybeesik a test x fő tengelyével. Ilyenkor az ω mellett (az ábrán nem jelölt) \mathbf{N} impulzusmomentum is az x^* tengely irányában áll (emlékeztetőül az ok: az (5) összefüggések). A test a FVR-ből nézve nyugalomban van. Erőkkel úgy magyarázhatjuk ezt az egyensúlyt, hogy mindkét m tömegre hat egyfelől a forgó nézőpontból származó fiktív \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő, másfelől a szürke lapban valóságosan ébredő \mathbf{F}_h húzóerő, és a két erő kiejti egymást. Stabil-e ez az



11. ábra. A 10. ábrán látható merev test forgása, amikor a pillanatnyi forgástengely (az x^* , illetve az y^* tengely) kicsit eltér a test a) legkisebb, illetve b) közbülső tehetetlenségi nyomatékú fő tengelyétől.

egyensúly? A választ már tudjuk: igen. De nézzük, hogyan indokolhatjuk ezt erőkkkel. Tekintsünk egy olyan, kicsit kibillentett helyzetet, amikor az x^* pillanatnyi forgástengely nem egészen esik egybe a test x tengelyével. Ezt a helyzetet a 11.a ábra mutatja. Ekkor a két M tömegpont nincs rajta a forgástengelyen, tehát $M r \omega^2$ nagyságú \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő hat rájuk, amely igyekszik az M -eket a forgástengelytől eltávolítani, tehát az egész testet az (x^*, y^*) síkhoz képest még jobban kibillenteni (r az M tömegpontok x^* tengelytől mért távolsága, amit az ábrán betűvel nem jelölök). Egy ilyen kibillentéssel szemben az m tömegeknek „nincs semmi kifogása”, hiszen az ő pozíciójuk az (x^*, y^*, z^*) koordináta-rendszerben ettől nem változik. A forgástengelytől távolodni kezdő M -ekre viszont, amint a FVR-ben valamilyen \mathbf{v}^* sebességre tesznek szert, egyenként $\mathbf{F}_{Co} = 2M\mathbf{v}^* \times \boldsymbol{\omega}$ Coriolis-erő kezd hatni, kezdetben a 11.a ábrán jelzett irányban. A két M tömegpont megpróbál elmozdulni a Coriolis-erők irányába, ez viszont – a lemezben ébredő mechanikai feszültségek közvetítésével – a kis m tömegpontok helyén is érezteti hatását, hiszen ahhoz, hogy az M tömegek a Coriolis-erőnek engedelmessé váljanak a (x^*, z^*) síkból, „magukkal kell rántaniuk” az m tömegeket is, amelyekről most már az van elvárva, hogy kimozduljanak az (y^*, z^*) síkból. A nagy M tömegek a kis m tömegeket meggyőzően tudják „rábeszélni” erre a kimozdulásra, mert a Coriolis-erők az M -mel arányosak, tehát nagyok, az m tömegpontok pedig, kis tömegük miatt, nem tudnak ellenállni a lemezben ébredő nagy

húzó-nyíró erőknél. A Coriolis-erő így tehát eredményesen eltéríti a M tömegeket az x^* tengelytől elfelé mutató iránytól, és pályájukat begörbíti. Mihelyt a pálya begörbül, a Coriolis-erő iránya is elfordul a 11.a ábrán jelzett irányhoz képest befelé, az x^* tengely felé, hiszen F_{Co} mindig merőleges az M tömegek pillanatnyi sebességére. Végeredményben – állítja Tao okfejtése – a két M tömegpont az x^* tengely körül „inog”, ahogy a 11.a ábra vékony szaggatott görbéi jelzik, és az egész test – mereven megtartva az alakját – az x^* tengely körül „billog”.

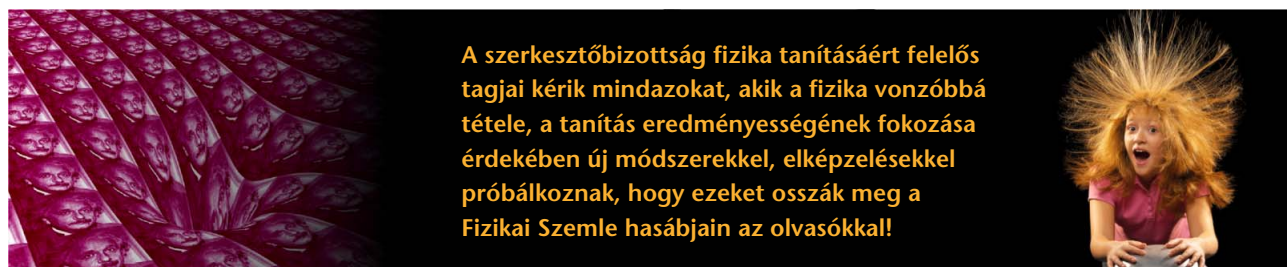
A 10.b és 11.b ábrák lényegében ugyanezt a situációt mutatják, csak az m és M tömegek szerepcseréjével, de ez a szerepcseré az érvelés végeredményét drasztikusan módosítja. A 10.b ábrán a forgástengely az y^* tengely, ami most egybeesik a test *közbülső* tehetetlenségi nyomatékú fő tengelyével. Az ω a 10.a ábrához hasonló módon párhuzamos az N impulzusmomentummal, a test a FVR-ből nézve ismét nyugalomban van (mindkét M tömegnél a rájuk ható F_{cf} centrifugális erő és F_h húzóerő kiegyenlíti egymást). Tudjuk, hogy az egyensúlyi állapot ezúttal *instabil*. Hogyan lehetséges ez? A magyarázathoz ismét billentsük ki egy kicsit a testet az egyensúlyi helyzetből: pörgessük be úgy, hogy az y^* pillanatnyi forgástengely ne pontosan essen egybe a test y tengelyével (11.b ábra). A két m tömegpont lekerült a forgástengelyről, tehát $m r \omega^2$ nagyságú F_{cf} centrifugális erő hat rájuk, amely igyekszik őket a forgástengelytől még jobban eltávolítani, azaz a testet az (x^*, y^*) síkhoz képest még jobban megdőnteni. Ez az egyre nagyobb kibillentés nyugodtan végbemehet, az M tömegek nem fejtenek ki vele szemben ellenállást, mert ez az elmozdulás az ω pozíciójukat háborítatlanul hagyja: ők továbbra is az x^* tengely két átellenes pontján maradhatnak. A forgástengelytől távolodni kezdő m -ekre a FVR-ben a Coriolis-erő is elkezd hatni a 11.b ábrán mutatott irányokban, ez az erő mindkét testre $F_{Co} = 2 m \mathbf{v}^* \times \boldsymbol{\omega}$, ahol \mathbf{v}^* az adott test sebessége a FVR-ben. Csakhogy ezek a Coriolis-erők az m -mel arányosak, tehát nagyon kicsik. Amikor megpróbálják – a lemezben ébredő mechanikai feszültségek közvetítésével – a nagy M -eket kimozdítani az (x^*, z^*) síkból, ezen tömegpontok nagy tehetetlensége miatt kudarcot valtanak. A kis m -eknek tehát csak az a mozgása maradhat meg, amellyel szemben a nagy M -ek nem fejtenek ki ellenállást, tehát az, hogy a centrifugális erő hatására tovább távolodnak az y^* forgástengelytől, és a test egyre jobban bedől az (x^*, y^*) síkhoz képest. Az y tengely körüli forgás tehát *instabil*, mert ha az y ten-

gelyt egy picit kibillentjük a y^* forgástengely irányából, akkor gyorsulva egyre jobban eltérül ettől az iránytól. Ez az eltávolodás természetesen nem folytatható a végtelenségig. Onnantól kezdve, hogy az m tömegpontok átlendülnek az (x^*, z^*) síkon, a rájuk ható centrifugális erő, amely továbbra is elfelé mutat az y^* tengelytől, már lassítja őket, míg végül az m -ek az y^* tengely közvetlen közelében megállnak, és az egész folyamat kezd visszafelé lejátszódni, azután pedig periodikusan ismétlődik.

A Terry Tao-féle, kissé elnagyolt magyarázat érdeme, hogy azokhoz is közelebb viheti a teniszütő-tétel megértését, akik számára az erők – köztük a tehetetlenségi „erők” – világa ismerős terep, de talán megrettennek a K -ellipszoidra és N -gömbre épülő, absztraktabbnak tűnő gondolatmenettől. Ugyanakkor a Tao-féle érvelés csak a 10.a ábrán láthatóhoz hasonló, speciális tömegeloszlású tárgyakra működik meggyőzően, és legfeljebb kvalitatív magyarázatot ad. Emellett olyan koordináta-rendszert használ, amelyben az ω van nyugalomban, ez pedig nem is inerciarendszer, nem is a tárgyhoz rögzített nézőpont, és az, hogy a tárgy hogyan mozog e vonatkoztatási rendszerhez képest, nehezebben átlátható magyarázatot ad a jelenségről, mint ha eleve arra a kérdésre adná meg a választ, hogy miként mozog a tárgy az IR-hez képest. Mindenképpen érdemesnek látom ezért az érdeklődő diákokat megismertetni a K -ellipszoidra és N -gömbre épülő geometriai levezetéssel is, még akkor is, ha az minden érintettől nagyobb erőfeszítést igényel. Az a levezetés bármilyen alakú tárgyra általánosan működik, és *kvantitatív* magyarázatot ad a tárgy mozgásának összes fontos részletére. Ráadásul a geometriai tárgyalásmód – amely egyébként Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) és áttételesen Louis Poincaré (1777–1859) nevéhez fűződik – eleganciájával, matematikai szépségével szinte ugyanolyan lenyűgöző élményt nyújthat tanárnak és diáknak, mint a fizikai jelenség, amelyet leír.

Irodalom

1. https://www.aparat.com/v/skH9C/My_Friends_Tigger_and_Pooh_-_Pooh's_Badful_Day_-_?t=556
2. <https://youtu.be/IhnHC-u2gdw?t=59>
3. Budó Á.: *Mechanika* (1965); M. Levi: *Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal Control* (2014); H. Goldstein, Ch. Poole, J. Safko: *Classical Mechanics* (2000); T. L. Chow: *Classical Mechanics* (2013); R. D. Gregory: *Classical Mechanics* (2006); J. R. Taylor: *Classical Mechanics* (2005)
4. <https://www.youtube.com/watch?v=1x5UjwEEvpQ>
5. <https://mathoverflow.net/questions/81960/the-dzhanibekov-effect-an-exercise-in-mechanics-or-fiction-explain-mathemat>



A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kérik mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Fizikai Szemle hasábjain az olvasókkal!