

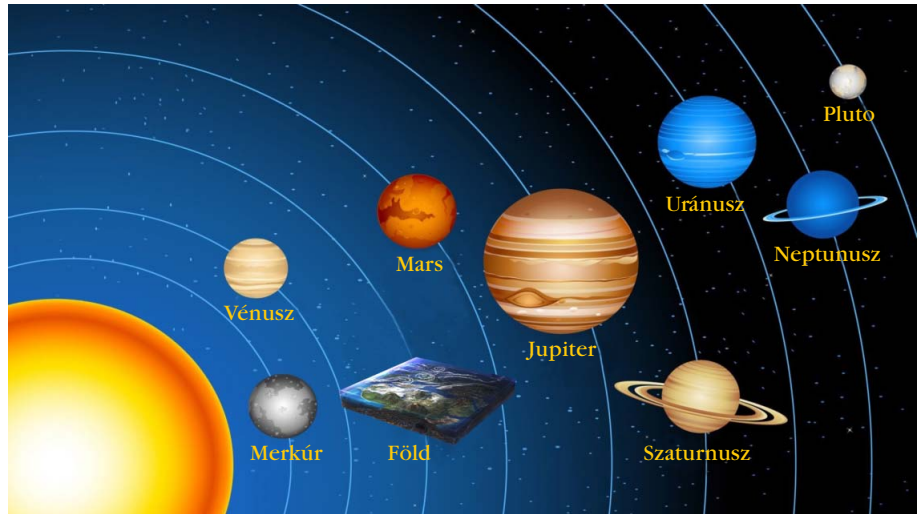
ÉLET A LAPOSFÖLDÖN

Cserti József – Eötvös Loránd Tudományegyetem, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
Dávid Gyula – Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizikai Intézet

Mielőtt a cikk címe alapján aggódni kezdene a kedves Olvasó, hogy miért engedhettem meg a *Fizikai Szemle* főszerkesztője olyan cikk megjelenését, amely a laposföldhívőknek ad teret a nagy múltú, tudományos igényű *Szemle* hasábjain, sietünk megnyugtatni az Olvasót, hogy a cikkel éppen ellenkezőleg a Laposföld-„elmélet” furcsaságaira szeretnénk felhívni a figyelmet.

Számtalan írás található a laposföldhívők elképzeléseiről, tevékenységeiről. Ezekről szándékosan nem szeretnénk részletes áttekintést adni, nem kívánjuk azt a benyomást kelteni, hogy a téma tudományosan megalapozott. Azoknak, akik nem hallottak erről a témáról, talán csak egy forrást említenénk [1].

A későbbiek megértése céljából azonban nem árt, ha röviden felvázoljuk a szóban forgó hiedelmeket! A hívők azt állítják, hogy a Föld nem gömbölyű, hanem egy nagy síklap (hogy korong vagy téglalap alakú, az vita tárgya, a továbbiakban négyzetesnek tekintjük), amelynek vízszintes síkján úgy sétálunk, mint az utcán (fizikus nyelven: a gravitációs gyorsulás vektora mindenütt merőleges a Laposföld síkjára). A síklapba mélyedő medencéket töltik ki a tengerek, amelyek felszíne – a hívők szerint – magától értetődően szintén vízszintes, és belesimul a Laposföld síkjába. Mi van a felső sík alatt? Általában úgy képzelik, hogy a sík vízszintes méreteihez képest viszonylag vékony lemezzel van szó, a felsővel párhuzamos alsó felülettel. Természetesen tudjuk, hogy a Föld nem ilyen, ezt a klasszikus fizikai és földrajzi bizonyítékok és a gömbölyű nagybolygók kialakulásának planetológiai el-



1. ábra. A Laposföld a Naprendszer többi bolygója között.

mélete mellett az utóbbi évtizedekben a Föld körül keringő sok műhold és az általuk „kívülről”, az űrből készített fotók minden értelmes ember számára nyilvánvalóan bizonyítják (1. ábra).

Egyesek azonban elgondolhatják, milyen érdekes vagy egyszerű lenne az élet egy ilyen lapos korongon vagy téglatesten. Ki tudja, távoli utódaink nem építenek-e egyszer maguknak egy ezen a konstrukción alapuló mesterséges bolygót, hogy annak felületén sétálgatva, lapos tengerein hajózáva utólag bizonyítsák a laposföldhívők igazát? Vajon valóban olyan lenne az élet ezen a mesterséges Laposföldön, ahogy a modell hívei képzelik? Az „elmélet” számtalan más égbekiáltó, a mindennapi tapasztalatnak ellentmondó részletét mellőzve (például hová bújnak éjjel a Laposföld síkja fölött mozgó Nap? – ezt a hívek további, egyre vadabb fantazmagóriákkal próbálják „magyarázni”) most csak ezzel a fentebb már említett, a laposföldhívők által természetesnek tekintett elképzeléssel foglalkozunk: vajon milyen lenne a valóságban egy ilyen lapos korong vagy téglatest gravitációs tere? Tényleg úgy lehetne korzózni rajta, ahogy a városok sík főterén, úgy lehetne szelni hajónkkal a tükörsima vízszintes tengereket, ahogy a

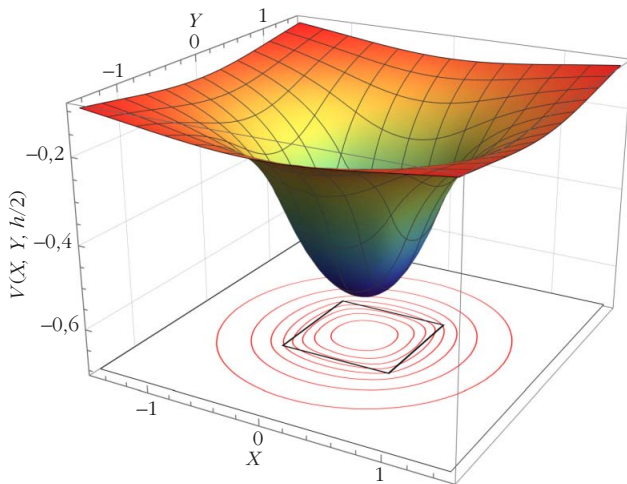
Köszönetünket szeretnénk kifejezni *Kis-Tóth Ágnesnek* a kézirat olvasása során javasolt hasznos tanácsaiért.



Cserti József 1982-ben végzett ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az Atomoktól a csillagokig előadás-sorozatot középiskolásoknak.



Dávid Gyula több mint 42 éve oktatja az ELTE fizikus hallgatóit. Kutatómunkájában relativisztikus dinamikával foglalkozik. A NYIFFF fizikaverseny alapítója, az Ortvay Rudolf Fizikaverseny és az Atomcsill előadás-sorozat társ szervezője, ez utóbbinak sokszoros előadója. Számos ismeretterjesztő fizikai és kozmológiai előadása terjed a neten. Hisz abban, hogy a fizikusok világ nagy esze előbb-utóbb betölti a táguló teret – ahogy az a Fizikus nótában is szerepel (amit nem mellékesen ő írt).



2. ábra. A $V(X, Y, h/2)$ gravitációs potenciál és a megfelelő állandó értékű (ekvipotenciális) vonalak Laposföld felszínének síkjában. Az integrációs állandót úgy választottuk meg, hogy a végtelenben a potenciál a nulla értékhez tartson. Ezért az ábrákon a potenciál értéke mindenütt negatív. A vastag fekete négyzet Laposföld határát jelöli. Itt és a továbbiakban az (X, Y, Z) koordinátákat a , a potenciált $(f\rho a^2)$ egységekben mérjük, míg a numerikus számolásoknál $h/a = 0,2$ értékeket használunk.

laposföldhívők mesélik, és a hajóból megfelelően erős távcsővel előre nézve az egész úton látni lehetne a túlsó partot?

Feladatunk tehát egy majdani valódi Laposföld gravitációs terének és az ehhez igazodó felszíni közlekedési viszonyoknak a vizsgálata – a hívek ábrándjai helyett a fizika tényleges törvényei alapján. A továbbiakban elméleti számításokkal meghatározzuk egy hipotetikus, homogén tömegsűrűségű, négyzetes hasáb alakú égitest gravitációs terét. A kapott eredmények alapján néhány furcsa, a megszokott földi életünktől eltérő jelenségre hívjuk fel a figyelmet. Remélhetőleg ez az írás is segít eligazodni a témában.

A téglatest gravitációs potenciáljának egzakt analitikus alakja már a huszadik század ötvenes éve óta ismert. A történeti sorrendet mellőzve itt csak néhány cikket említenénk meg, amelyek egyben a következő fejezetben bemutatott számítások alapjául is szolgáltak [2–4]. Közvetlen integrálással Nagy Dezső magyar származású szerző is levezette a gravitációs erőteret formuláit [5]. Továbbá Nagy, Papp és Benedek a gravitációs potenciált és annak első három deriváltját határozták meg [6]. Végül ki szeretnénk említeni Haáz István Béla magyar nyelvű, és talán emiatt kevésbé ismert munkáját, amelyben a szerző zseniális módon, lényegében egy egyszerű integrálással határozta meg a téglatest gravitációs potenciálját és annak első két deriváltját [7]. E formulákat a teljesség és a könnyebb elérhetőség kedvéért a Függelékben felsoroljuk.

A téglatest gravitációs erőterére vonatkozó számításokat kiterjesztették homogén tömegeloszlású poliéderekre is. Itt csak három cikket említünk, amelyek a téma áttekintésére is szolgálhatnak [8–10].

Megjegyezzük, hogy az Eötvös-inga kísérletekben a lengésidő kiszámításánál a gravitációs potenciál második deriváltjai lépnek fel (lásd például [11]). Ezért,

ha egy szabálytalan alakú testet (például egy hegyet) kellően kicsiny, téglatest alakú részekre bontunk, akkor a fent idézett cikkek alapján analitikus formulákkal elegendő pontossággal meghatározhatók a test gravitációs potenciálja második deriváltjai, és így az Eötvös-inga lengésideje.

A gravitációs tér Laposföldön

Tekintsünk egy $2A$, $2B$ és $2C$ oldalhosszúságú, homogén ρ tömegsűrűségű téglatestet, amelynek határfelületei a koordinátasíkokkal párhuzamos síkok, és úgy választjuk meg a koordinátatengelyeket, hogy a téglatest belső pontjaira az $-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$ és $-C \leq z \leq C$ feltételek teljesüljenek. Ekkor a téglatest gravitációs potenciálja az $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ koordinátájú pontban:

$$V(\mathbf{R}) = -f\rho \int_{-C}^C \int_{-B}^B \int_{-A}^A \frac{dx dy dz}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, \quad (1)$$

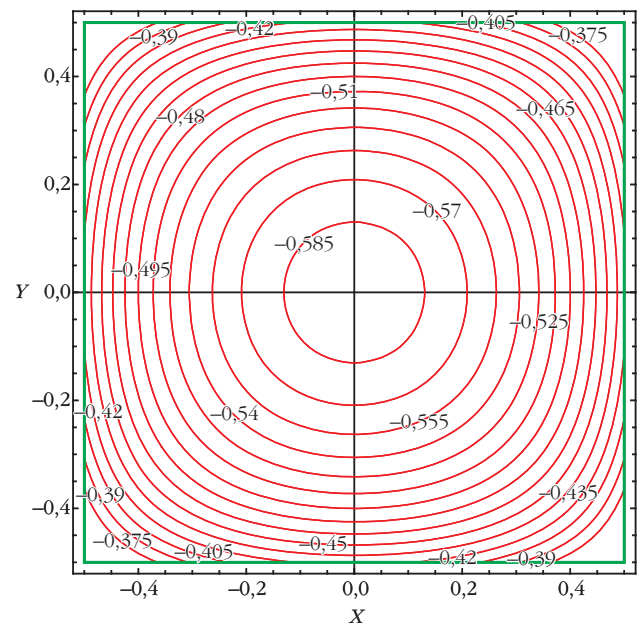
ahol $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a téglatest egy belső pontja,

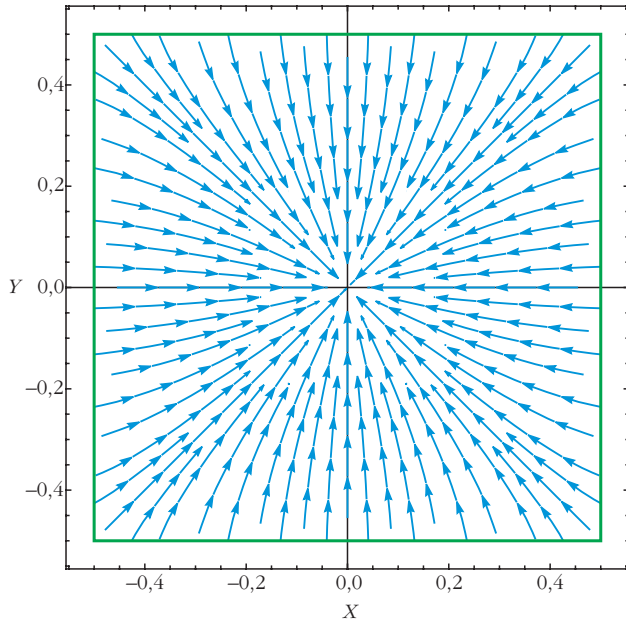
$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}| = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$$

az \mathbf{R} és \mathbf{r} pontok közti távolság, f a gravitációs állandó, és ρ a téglatest tömegsűrűsége. Az integrál eredménye, illetve a potenciál első két deriváltja a Függelékben található.

A továbbiakban feltesszük, hogy a Laposföld egy olyan téglatest, amelynek felszíne egy a oldalú négyzet, vastagsága h . Az (x, y, z) koordinátatengelyek átmennek a téglatest középpontján és párhuzamosak a téglatest oldalával, azaz $-a/2 \leq x, y \leq a/2$ és $-h/2 \leq z \leq h/2$. Az alábbiakban meghatározzuk és grafikusán ábrázoljuk Laposföld gravitációs potenciálját és az erőteret a Függelékben felsorolt formulák alapján.

3. ábra. A $V(X, Y, h/2)$ gravitációs potenciál $(f\rho a^2)$ egységekben ekvipotenciális vonalai Laposföld felszínén.

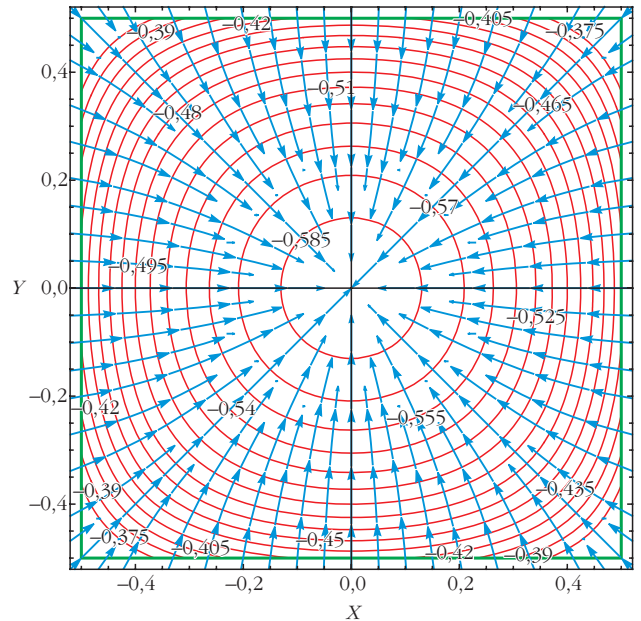
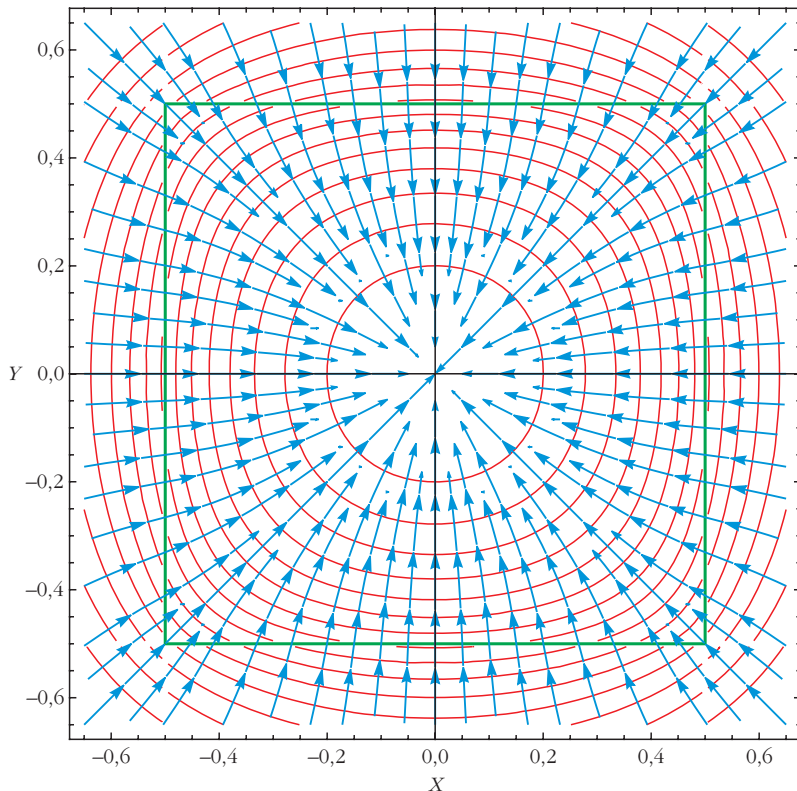




4. ábra. A gravitációs erőter erővonalai Laposföld felszínén.

A következőkben néhány számszerű eredményt mutatunk be. A függelék (6) képlete alapján az $\mathbf{R} = (X, Y, h/2)$ pontban a $V(X, Y, h/2)$ gravitációs potenciált számoltuk ki a $Z = h/2$ síkban az X, Y függvényében, az eredmény a 2. ábrán látható. A 3. ábra külön mutatja Laposföld felszínén a $V(\mathbf{R})$ gravitációs potenciál állandó értékű (ekvipotenciális) vonalait. Mindkettőn jól látható, hogy Laposföld középpontjára

6. ábra. A gravitációs erőter erővonalai és ekvipotenciális vonalai Laposföld felszínén és azon túl. A vastag zöld négyzet itt is Laposföld határát jelzi.



5. ábra. A gravitációs erőter erővonalai és az ekvipotenciális vonalak Laposföld felszínén. Az ábrára írt számok (a 3. ábrához hasonlóan) a gravitációs potenciál értékét adják meg ($fp a^2$) egységekben.

nak közelében az ekvipotenciális vonalak körszimmetrikusak, a gravitációs potenciál a középponthez képest minden irányban azonos módon változik. A körszimmetrikus potenciáltól való eltérés a középponttól távolodva válik észrevehetővé. A következő részben megvizsgáljuk e körszimmetria fizikai következményeit. (Összehasonlításként nem árt felidéz-

nünk, hogy egy ideális, gömb alakú bolygó egész felszíne a gravitációs potenciál ekvipotenciális felülete, ezért az ábrán szereplő vonalakhoz hasonlók nem is rajzolhatnánk a bolygóra.)

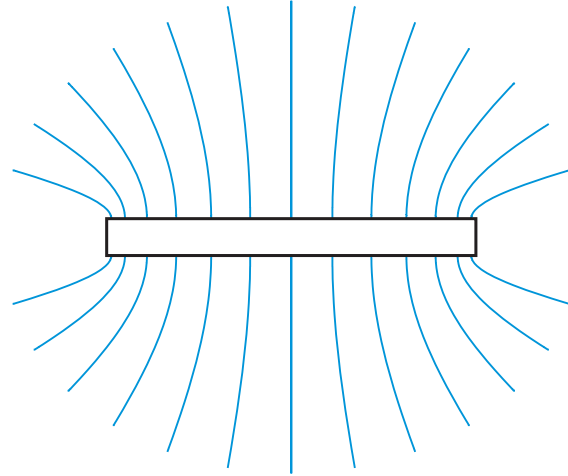
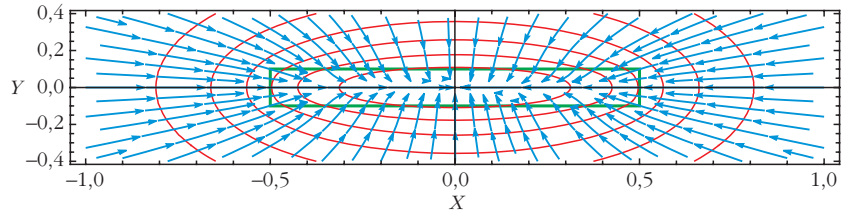
Definíció szerint a gravitációs gyorsulás a potenciál gradiensének mínusz egyszerese:

$$\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z) = \left(-\frac{\partial V(\mathbf{R})}{\partial X}, -\frac{\partial V(\mathbf{R})}{\partial Y}, -\frac{\partial V(\mathbf{R})}{\partial Z} \right). \quad (2)$$

Kiszámoltuk a gravitációs térerősség g_x, g_y komponenseit a Laposföld felszínén a Függelék (7) képlete alapján, a kapott erővonalak 4. ábrán láthatók. Az ábrából jól látható, hogy az erővonalak mindegyike a Laposföld középpontja felé mutat. Az 5. ábra a 3. és 4. ábrák egyesítése. Vegyük észre, hogy – a várakozásnak megfelelően – az erővonalak merőlegesek az ekvipotenciális felületekre.

Az erővonalakat és az ekvipotenciális vonalakat a Laposföldön túl is kiszámoltuk, ahogy ez a 6. ábrán látható. Első látásra meglepő, hogy Laposföld határán az erővonalak és az ekvipotenciálisok

nem törnek meg, hanem folytonosan haladnak át a határon. A gravitációs térrel sok tekintetben analóg módon tárgyalható elektrosztatikus esetben az erővonalak törése a határon megjelenő töltések következménye. Ugyanakkor a gravitációs tér esetében nem létezik gravitációs dipólus, így nincsenek felületi „töltések” sem. Ezért a térerősség határral párhuzamos (tangenciális) és merőleges komponensei is folytonosan mennek át a felületen: az előbbi a $\text{rot } \mathbf{g} = 0$ és a Stokes-tétel miatt, az utóbbi a Gauss-törvény és a Gauss-tétel miatt. A gravitációs és az elektrosztatikus erőter között az analógia csak korlátozott! Az erőter folytonos átmenevét az X - Z síkban, a Laposföld határán 7. ábra is jól mutatja.



7. ábra. A gravitációs erőter erővonalai és az ekvipotenciális vonalak az X - Z síkban Laposföldön kívül és belül, és egy töltött fémlap elektrosztatikus tere. Az utóbbi esetben az erővonalak merőlegesek a töltött felületre.

Furcsaságok Laposföldön

Az eddigiekből látható, hogy Laposföldön a gravitációs erőter alapvetően eltér a Földünket jól modellező homogén gömb alakú bolygó terétől. Ebben a részben részletesen megvizsgáljuk a főbb különbségeket.

A 3. ábrán láttuk, hogy Laposföld felszíne középpontjának a környékén a gravitációs potenciál minden irányban egyformán változik. A felszínen a $V(X, Y, h/2)$ potenciál csak az (X, Y) pont origótól mért

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

távolságától függ. Ennek igazolásához másodrendig fejtsük sorba a $V(X, Y, h/2)$ gravitációs potenciált, mint kétváltozós függvényt az X és Y változók szerint. A potenciál első deriváltja zérus, mert szimmetriaokok miatt a Laposföld felszínének közepén a gravitációs gyorsulás vízszintes komponense eltűnik. A potenciál második deriváltjait a Függelékben található (8) képlet alapján számolhatjuk ki. Számolásunk szerint a $V(X, Y, h/2)$ potenciál X és Y szerinti második deriváltja egyenlő a Laposföld közepén, míg a vegyes deriváltak zérust adnak ebben a pontban. Ezért a potenciál Taylor-sora alapján a következő analitikus eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} V(X, Y, h/2) &\approx V(0, 0, h/2) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \Big|_{X=Y=0} X^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \Big|_{X=Y=0} Y^2 = \\ &= V_0 + \frac{1}{2} D(X^2 + Y^2), \end{aligned} \quad (3)$$

ahol D az effektív rugóállandó:

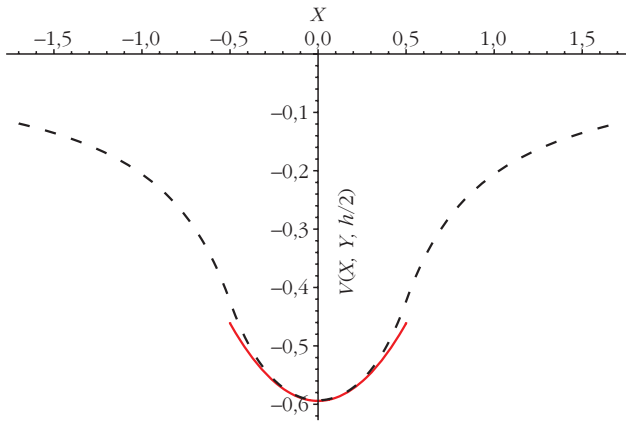
$$\frac{D}{f\rho} = 4 \arctg \left(\frac{\sqrt{2} h}{\sqrt{a^2 + 2 h^2}} \right),$$

valamint

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{f\rho} &= a^2 \arctg \left(\frac{\sqrt{2} h}{\sqrt{a^2 + 2 h^2}} \right) + \\ &+ 2 h^2 \arctg \left(\frac{a^2}{2 \sqrt{2} h \sqrt{a^2 + 2 h^2}} \right) - \\ &- a^2 \text{arth} \left(\frac{\sqrt{2} h}{\sqrt{a^2 + 2 h^2}} \right) - \\ &- 4 h a \text{arth} \left(\frac{a}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + 2 h^2}} \right). \end{aligned}$$

A potenciál kvadratikus alakjából következik, hogy $g_X = -DX$ és $g_Y = -DY$. A potenciál fenti közelítése természetesen csak a felszín közepéhez közel érvényes. A 8. ábrán jól látszik, hogy a $V(X, 0, h/2)$ potenciál és annak (3) közelítő alakja eléggé jól egyezik $X < 0,4a$ esetén. Ugyanezt az eredményt kapjuk a felszín közepén átmenő tetszőleges irányú egyenes mentén.

Vizsgáljuk meg egy pontszerű test mozgását ebben az erőterben! Az m tömegű próbatest gravitációs po-



8. ábra. A potenciál pontos (szaggatott vonal) és a (3) képlettel adott, közelítő alakja (folytonos piros vonal) az X (a egységekben) függvényében Laposföld felszínén. A potenciált ($f\rho a^2$) egységekben számoltuk.

tenciális energiája $mV(x, y, z)$, és így a mozgásegyenlete a felszínen a (3) közelítő potenciált használva:

$$m\ddot{X} = -m \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X} = -mDX \quad \text{és} \quad (4)$$

$$m\ddot{Y} = -m \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} = -mDY.$$

E két egyenlet megoldása ellipszispálya az (X, Y) síkon, a keringési idő pedig a pálya méretétől függetlenül állandó

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{D}},$$

összhangban a kvadratikus centrális erőterben a mechanika hasonlósági törvényével [12].

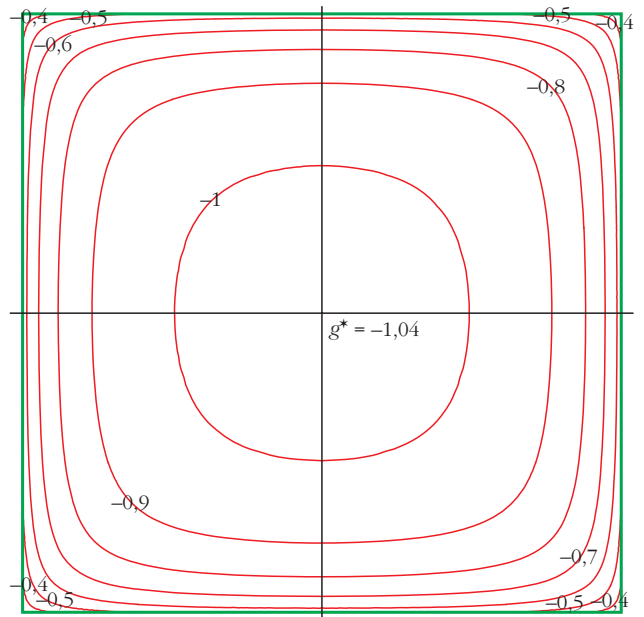
A továbbiakban vizsgáljuk meg a térerősség Laposföld felszínére merőleges komponensét! A Z tengely mentén ($X = Y = 0$) a középpont közelében a gravitációs potenciált Z szerint első rendig sorba fejtsük a $Z = h/2$ körül, felhasználva a Függelék (7) képletét kapjuk:

$$V(0, 0, Z) \approx V_0 + \left. \frac{\partial V(0, 0, Z)}{\partial Z} \right|_{z=0} = V_0 + g^* \left(Z - \frac{h}{2} \right), \quad (5)$$

ahol V_0 megegyezik a (3) képletben megadott értékkel, és

$$\frac{g^*}{f\rho} = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{a^2}{2\sqrt{2} h \sqrt{a^2 + 2h^2}} \right) - 4a \operatorname{arth} \left(\frac{a}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + 2h^2}} \right) + 4a \operatorname{arth} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Az (5) képlet szerint a gravitációs potenciál a függőleges irányú Z koordinátával lineárisan nő, a fellépő g^* együttható tehát a függőleges irányú földi g



9. ábra. A g_z függőleges gravitációs gyorsulás kontúrdiagramja ($f\rho a$ egységekben) Laposföld felszínén az (X, Y) pont függvényében (a görbék mentén g_z értéke állandó).

gravitációs gyorsulás megfelelője. Hasonló sorfejtés nemcsak a felszín középpontjában, hanem annak tetszőleges pontjában elvégezhető, ekkor azonban a g_z függőleges irányú gravitációs gyorsulás függeni fog az X és Y felszíni koordinátáktól (emellett fellép a gravitációs gyorsulásvektor felszínnel párhuzamos komponense is, amit a 4. és 5. ábrán mutatunk be). Ezért érdemes megvizsgálni, hogy a felszín egyes pontjaiban hogyan változik a gravitációs gyorsulás.

A 9. ábrán a $g_z(X, Y)$ függőleges irányú gravitációs gyorsulás kontúrdiagramját ábrázoltuk az (X, Y) pont függvényében: a görbék mentén g_z értéke állandó, a középponttól távolodva lassan csökken. Látható, hogy a Laposföld belső részén (közelítőleg a $-0,3a < x, y < 0,3a$ tartományon) jó közelítéssel állandó a függőleges irányú gravitációs gyorsulás.

Fordítsuk le a képleteket fizikára, sőt inkább köznapitapasztalatokra! A laposföldhívők úgy képzelik, hogy hipotetikus bolygójuk asztalsima felszíne olyan, mint a Nagyalföld: az egész bolygón állandó gravitációs gyorsulást érzékelünk, és a felszínre merőleges testtartással tudunk járni. A fizika azonban mást mond. A gravitációs térerősség függőleges komponense függ a földrajzi helyzettől, a középponttól távolodva lassan csökken. Ami viszont sokkal fontosabb: a \mathbf{g} gravitációs térerősségvektornak (a $V(X, Y, Z)$ potenciál negatív gradiensének) vízszintes komponense is van, méghozzá a középponttól távolodva egyre nagyobb! Aki tehát Laposföld felszínén sétál, és nem akar elesni, annak a felszíni merőlegeshez képest meg kell döntenie testét, méghozzá a középponttól kifelé, a perem felé dőlve, hogy a \mathbf{g} vektor a fejétől a talpa irányába mutasson. A „függőleges” irány tehát nem merőleges Laposföld síkjára, hanem ferde: minél inkább közeledünk a bolygó pereméhez, annál nagyobb szögben dől. Hol tapasztalunk a Földön ehhez

hasonló jelenséget? Hegymászáskor – amikor egy ferde hegyoldalon kapaszkodunk felfelé, akkor testünket a felszínre merőleges egyeneshez képest meg kell döntenünk, erre kényszerít a gravitáció! Laposföld lakói bolygójuk egész felszínén (geometriai szempontból hiába sík) ilyen hegyoldalon mászkáló turistáknak vagy kőszáli kecskéknak érezhetik magukat (kivéve a középpont közvetlen környezetét, ahol a \mathbf{g} térerősségvektor vízszintes komponense elhanyagolható). A négyzetes felszín sarkai hatalmas hegységekként tornyosulnak a négyzetlap középpontját kitöltő medence fölé, és a hegyoldal meredeksége a perem felé közeledve egyre nagyobb lesz.

Lássunk néhány számadatot! Tételezzük fel, hogy Laposföld mérete nagyságrendileg megegyezik a mi kerek Földünkével, legyen tehát a négyzet oldala $a = 10\,000$ km, a lapos hasáb vastagsága $h = 2000$ km, a hasábot alkotó homogén közet sűrűsége pedig egyezzen meg a Föld átlagos $\rho = 5,5$ g/cm³ sűrűségével! Ekkor az (5) egyenlet, illetve a *Függelékben* közölt képletek alapján kiszámíthatjuk Laposföld felszíni gravitációs terének jellemző adatait. (Érdeemes ezeket összehasonlítani a Föld felszínén függőleges irányban mérhető 9,81 m/s² gravitációs gyorsulással.)

Laposföld közepén a gravitációs gyorsulás – a szimmetria miatt – függőleges irányú, értéke $g^* = 3,81$ m/s², azaz földi egységben kifejezve 0,39 g. Ne csodálkozzunk az érték kicsiny voltán: bár Laposföld átmérőjét a Föld 12 800 km-es átmérőjéhez hasonlóan képzeljük el, a négyzetlap vastagsága sokkal kisebb a Föld gömbjének ugyanakkora „vastagságánál”. Ezért Laposföld tömege, így eredő gravitációs hatása is sokkal gyengébb a Földénél.

A függőleges irányú gravitációs gyorsulás értéke a középponttól távolodva csökken, és a négyzet peremének középső pontjában már csak $g_z = 1,99$ m/s² lesz, viszont megjelenik egy $g_x = 3,15$ m/s² nagyságú „vízszintes”, Laposföld síkjával párhuzamos, a négyzet közepe felé mutató komponens is – a vízszintes irányú gravitációs erő tehát sokkal nagyobb, mint a függőleges! Aki itt, a négyzet peremén megpróbál megállni a lábán, annak teste a talajjal 32°-os szöget zár be. Úgy érzi tehát magát, mint egy 58°-os meredekségű hegy oldalában.

Ugyanezek az adatok a Laposföldet alkotó négyzet csúcsán még durvábbak: a gravitációs gyorsulás függőleges, a talajra merőleges komponense már csak $g_z = 1,05$ m/s², míg a vízszintes, a talajjal párhuzamos komponens 2,52 m/s² lesz, a gravitációs gyorsulásvektor talajjal bezárt szöge 23°, ami egy 67° meredekségű hegyoldalnak felel meg.

Ha Laposföldet nagyobbak, mondjuk 20 000 km élű négyzetnek képzeljük el, de a h/a arányt változtatlanul hagyjuk, akkor a gravitációs gyorsulás fenti értékei kétszeresükre nőnek, de az általános kép nem változik, és a peremen mérhető dőlésszögek is ugyanazok maradnak.

Vajon mit tapasztalnak a bolygó peremét meglátogató laposföldi turisták? Semmit, hiszen extra felszerelés nélkül nem is juthatnak el a peremhez vagy a csú-

csokhoz! A gravitáció ugyanis nemcsak az emberekre hat, hanem a levegőre is: a bolygó légköre a síklap középpontja környékén koncentrálódik. A felszínen sétálva (avagy „hegyet mászva”) és a perem felé közeledve lassan kiemelkedünk az egyre ritkuló légkörből. Ezért a négyzetlap pereme és csúcsai levegőtlen sziklákként a világűrbe merednek. Ha a Laposföld méretei és a középpont körüli gravitáció a földihez hasonló, akkor a négyzetlap sarkai több ezer kilométer magaságú hegyeknek felelnek meg – a csúcsok magasságában már messze a világűrben járnánk. Ezt a hegy-mászást szkafander (és sok heti élelem) nélkül senkinek sem ajánljuk.

Mi a helyzet a négyzetlap kényelmesen lakható középpontja környékén? Itt az emberek nagyjából függőleges testtartással járnak, azonban érzik a gravitációs térerősség középpont felé húzó vízszintes komponensét. A (4) egyenlet szerint ez az erő arányos a középponttól való távolsággal. Tegyük fel, hogy télen jég borítja a talajt, akkor az emberek el is kezdenek csúszni a középpont felé. Ha pedig oldalirányú sebességgel is rendelkeznek, akkor korcsolyájukon keríteni kezdenek a középpont körül, a (4) egyenlet megoldásánál említett keringési idővel. A bolygó fenti paraméterei esetén a keringési idő 167 perc lesz – ezt a földi úrhajók és műholdak 90 perces keringési idejével kell összehasonlítani.

Itt említjük meg, hogy 2020-ban az Ortvay Rudolf nemzetközi fizikai problémamegoldó versenyen szerepelt egy feladat a laposföldi korcsolyázással kapcsolatban [13]. A feladat a fentiek alapján könnyen megoldható.

Laposföld óceánja

Ha már hegyet másztunk és korcsolyáztunk, akkor ne hagyjuk ki a laposföldhívők másik kedvenc, sokat emlegetett sportját, a tengeri hajókázást sem. Ők úgy képzelik, hogy Laposföld tengerének felszíne (a kismértékű hullámzástól eltekintve) tükörsíma, és belesimul az egész bolygó síkjába. Különös gondolatfutatokkal próbálják megmagyarázni, miért nem látjuk Bretagne partjairól az amerikai kontinens partjait – ezt a légkör fénytörésére vagy fényelnyelésére fogják. Lássuk tehát, mi határozza meg a tenger felszínének alakját egy valóban lapos bolygón, azaz Laposföldön!

Mint tudjuk, a nyugalomban levő víz felszíne vízszintes. Mit jelent ez? Azt, hogy nem folyik el egyik irányba sem. Miért folya el? Mert ha lenne a gravitációs erőnek a felszínnel párhuzamos komponense (ahogy patakok és folyók esetében van is!), akkor a víz azonnal megindulna a lejtés irányába. Mikor nem folyik hát a víz, mikor maradhat nyugalomban? Csakis akkor, ha felszíne a gravitációs erőter ekvipotenciális felülete.

A Föld esetében ez a felület a bolygó gömbszimmetrikus alakja miatt szintén gömb. (Tekintsünk most el a Hold aszimmetrikus irányú gravitációs hatása miatt fellépő árapály-effektusoktól.) Laposföld esetében azonban láttuk, hogy a gravitációs térerősség \mathbf{g} vektor-

ra nem merőleges a sík felszínre, ezért ez a felszín nem ekvipotenciális felület. A valódi ekvipotenciális felületeket meghatározhatjuk a gravitációs potenciál (6) képlete alapján. E felületek bolygó síkjával vett metszésvonalait mutatja be 6. *ábra*, az erre a síkra merőleges metszetek a 7. *ábrán* láthatók. Jól látszik, hogy az ekvipotenciális felületek Laposföld síkja fölött „kidudorodnak”, ezek egyike lesz az óceán felszíne.

Azt, hogy ezen ekvipotenciális felületek közül ténylegesen melyik lesz a vízfelszín, az óceán teljes vízmennyisége határozza meg, és csak numerikusan lehet kiszámítani. A 2022-es Ortway Rudolf nemzetközi fizikai problémamegoldó versenyen is szerepelt egy feladat, amelyben éppen a laposföldi óceán alakját kellett kiszámolni [14].

E feladatban azt tételeztük fel, hogy Laposföld négyzetes hasábjának vastagsága negyede a négyzet oldalának, az óceán partvonala pedig éppen félúton húzódik a négyzet középpontja és éle között. Ezen adatok alapján már ki lehetett számítani a part megjelölt pontján áthaladó ekvipotenciális felület adatait. Egyebek közt azt is, amire a feladat kérdezett: milyen magasan áll az óceán vize a négyzet középpontja fölött? Ez az adat az óceán maximális mélysége, feladatunk numerikus adatai esetén a négyzet a oldalélének 0,0356-szorosa. Ha Laposföldet a Földhöz akarjuk hasonlítani, válasszuk a négyzet oldalát 10 000 km hosszúságúnak (ekkor a kőzetlap vastagsága 2500 km), az óceán legnagyobb mélysége pedig 356 km. Hasonlítsuk ezt össze a földi óceánok átlagosan 4 km-es, maximálisan 11 km-es mélységével – láthatjuk, hogy a laposföldi óceán valóban jelentősen különbözik földi megfelelőjétől!

A földi óceán a szilárd kéreg homorulataiban helyezkedik el (vagy inkább fordítva: mivel a felszín nagyobb részét tenger borítja, azt mondhatjuk, hogy a szárazföldek a kéreg magasabban elhelyezkedő részei). Ezzel szemben a laposföldi óceán egy hatalmas vízlencse a bolygó síklapjára helyezve: úgy dudorodik ki a felszín fölé, mint a zsíros papírra csöppentett vízcsepp. Míg azonban az utóbbit a felületi feszültség stabilizálja, addig a laposföldi óceánt a ferdén ható gravitációs erő koncentrálna a bolygófelszín középpontja közelébe. Az óceán alakját a 10. *ábra* mutatja be. Megemlítjük, hogy *Chapell* és társai cikkében [3] sok egyéb érdekes effektus mellett egy kocka alakú bolygó egyik lapján elhelyezkedő óceán háromdimenziós ábrája is látható.

Mivel a fény Laposföldön is egyenes irányban terjed (a gravitáció fényt elhajlító hatása ugyanúgy elhanyagolható, mint a Föld esetében), a laposföldi óceán

10. *ábra*. Laposföld óceánja. Az óceán felszíne a $V(X, Y, Z)$ gravitációs potenciál ekvipotenciális felülete.



egyik partján lakók éppen úgy nem láthatják a túlsó partot, mint a franciák Amerikát. Ráadásul a strandolásról is le kell mondaniuk: Laposföldön nincsenek lapos, lassan mélyülő sekély vízzel lepett homokos tengerpartok: a laposföldi szárazföld síkja mindenütt éles szögben emelkedik ki a vízből. A Földön például a dalmát tengerparton láthatunk hasonló helyzetet.

Képzeljük el az életet a laposföldi óceánban! A víz több száz km-es mélysége miatt semmiféle földi élőlény nem élhetne meg a tenger mélyebb zónáiban, ahol óriási a nyomás. Az általunk ismert élet csak az óceán felszíne közelére és a tengerpart melletti keskeny, viszonylag sekély gyűrűre terjedne ki. Akárcsak a szárazföldi élet: nem messze az óceán partjától a négyzet könyörtelenül emelkedő (nek tűnő) lapja már eléri a világűr, így a laposföldiek élettere csak az óceán körüli keskeny, gyűrű alakú sávra korlátozódik.

Ha a laposföldiek tudománya is létrehozza a földihez hasonló szintű fizikát, ők is levelezhetik e cikkben leírt eredményeket. A gravitációs téreösségre vonatkozó méréseikhez illesztett képletek alapján meghatározhatják bolygójuk átlagos sűrűségét és a négyzetlap vastagságát is. És ha elég fantáziával áldotta meg őket a sors, akkor akár arról is ábrázolhatnánk, hogy a lapos négyzet túlsó oldalán hozzájuk hasonló lények élhetnek, másik lencse alakú óceánnal, tőlük teljesen független evolúcióval a hátuk mögött. E feltételezett testvéreiket azonban az űrhajózás kifejlesztése előtt nem látogathatják meg, legfeljebb, ha civilizációjuk legnagyobb technikai vállalkozásával átfúrják a bolygó lapos lapját. (Természetesen Laposföld és más furcsa alakú bolygók átfúrásáról is készült egy feladat egy korábbi Ortway-versenyre [15].)

Összegzés

Kiszámoltuk Laposföld gravitációs terét, és ez alapján megállapíthatjuk, hogy Laposföldön valóban furcsa az élet. A gravitációs erővonalak a felszín közepe felé mutatnak. Ezért a folyók is a középpont felé áramlanak, táplálva a lencse alakúan kidomborodó, rettenetesen mély óceánt. Az itt élő emberekre hat egyrészt a megszokott, felszínre merőleges irányú gravitációs erő, de emellett fellép egy középpont felé mutató erő is. A sík felületen a középponttól távolodva olyan, mintha egy emelkedőn kellene felkapaszkodni. Ha nincs óceán, de jég borítja a négyzet közepét, akkor korcsolyázni is lehet: az emberek a középpont körül a ellipszispályán haladnak úgy, hogy a keringési idejük a középponttól mért távolságtól függetlenül azonos (ha ez a távolság nem túl nagy). Ugyanakkor a gravitációs gyorsulás csak lassan változik a középponttól távolodva. A bolygó légköre is Laposföld síkjának közepére koncentrálódik, a négyzet élei és sarkai pedig elérhetetlen hegygerincekként és hegycsúcsokként nyúlnak ki a világűrbe.

Ebben a cikkben nem vizsgáltuk a korong alakú bolygó gravitációs terét, az érdeklődő olvasónak Nagy munkáját javasoljuk [16]. Mindenesetre a bolygó felszí-

nén kvalitatíven ugyanazt az erőteret várjuk, az erővonalak a korong felszínén annak közepe felé fognak mutatni a téglatest alakú bolygóhoz hasonlóan (ám az 5. és 6. ábrákkal ellentétben az erővonalak nem görbülnek, hanem sugárirányban mutatnak befelé, az ekvipotenciális vonalak pedig körök lesznek). A cikkben leírt geológiai, meteorológiai, biológiai és turisztikai következtetések sem nagyon térnek el a négyzet és a korong alakú bolygó esetén – az egyetlen lényeges különbség, hogy utóbbi esetben a négyzet sarkai képviselte, úrbe meredő büszke hegycsúcsok hiányoznak.

Végül az Olvasóra bízunk, hogy eldöntse hol jobb élni: Laposföldön, vagy a mi, jól megszokott Földünkön. Remélhetőleg a cikk olvasása után lesz, aki jövőre az Ortway Rudolf nemzetközi fizikai problémamegoldó versenyen a témával kapcsolatban egy újabb feladatot javasol a szervezőknek (akik megegyeznek e cikk szerzőivel).

Függelék

Téglatest gravitációs potenciálja

és első két deriváltja

Ahogy a bevezetőben említettük, az irodalomban jól ismert, hogy téglatestre a gravitációs potenciál (1) egyenletben felírt hármas integrálja analitikusan kiszámolható. Az alábbi képletek a téglatesten kívül és belül egyaránt érvényesek, és például *Haáz* cikkében megtalálhatók [7]. A teljesség kedvéért az alábbiakban felsoroljuk ezeket a formulákat. Ebben a cikkben ezeket a képleteket programoztuk be és használtuk az analitikus és a numerikus számításokhoz.

• A gravitációs potenciál:

$$V(\mathbf{R}) = \rho f \left[\left[\left[\varphi(x, y, z) \right]_{z=Z-C}^{z=Z+C} \right]_{y=Y-B}^{y=Y+B} \right]_{x=X-A}^{x=X+A}, \quad (6)$$

ahol

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \frac{1}{2} \left[x^2 \arctg\left(\frac{yz}{xr}\right) + y^2 \arctg\left(\frac{xz}{yr}\right) + \right. \\ & \left. + z^2 \arctg\left(\frac{xy}{zr}\right) \right] - \\ & - [yz \ln(x+r) + xz \ln(y+r) + \\ & + xy \ln(z+r)], \end{aligned}$$

valamint

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

és

$$[f(u)]_{u=u_1}^{u=u_2} = f(u_2) - f(u_1).$$

Az utolsó képlet a Newton–Leibniz-formula. Az $\arctg(x)$ értelmezése: $-\pi/2 < \arctg(x) < \pi/2$. Ha a ha-

tározott integrálok kiszámításához alkalmazzuk a Newton–Leibniz-formulát a három változóra, akkor a $V(\mathbf{R})$ potenciál 48 tagból fog állni.

• A téglatest gravitációs erőtere, a potenciál első deriváltjai:

A \mathbf{g} gravitációs térerősséget a (2) egyenletben adtuk meg. A levezetést mellőzve itt csak felsoroljuk téglatestre a térerősség komponenseit:

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{\partial V(\mathbf{R})}{\partial R_i} = \\ &= \rho f \left[\left[\left[\varphi_i(x, y, z) \right]_{z=Z-C}^{z=Z+C} \right]_{y=Y-B}^{y=Y+B} \right]_{x=X-A}^{x=X+A} \end{aligned} \quad (7)$$

és

$$\varphi_1(x, y, z) = x \arctg\left(\frac{yz}{xr}\right) - y \ln(z+r) - z \ln(y+r),$$

$$\varphi_2(x, y, z) = y \arctg\left(\frac{xz}{yr}\right) - x \ln(z+r) - z \ln(x+r),$$

$$\varphi_3(x, y, z) = z \arctg\left(\frac{xy}{zr}\right) - x \ln(y+r) - y \ln(x+r),$$

ahol $i = 1, 2, 3$ és $R_1 = X, R_2 = Y, R_3 = Z$.

• A téglatest potenciáljának második deriváltjai:

Gyakran van szükség a gravitációs potenciál második deriváltjaira. Téglatestre ezeket a formulákat megtalálhatjuk például *Haáz* cikkében [7]. A levezetést ismét mellőzve itt csak felsoroljuk a képleteket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(\mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} &= \\ &= \rho f \left[\left[\left[\varphi_{ij}(x, y, z) \right]_{z=Z-C}^{z=Z+C} \right]_{y=Y-B}^{y=Y+B} \right]_{x=X-A}^{x=X+A} \end{aligned} \quad (8)$$

és

$$\varphi_{11}(x, y, z) = \arctg\left(\frac{yz}{xr}\right), \quad \varphi_{22}(x, y, z) = \arctg\left(\frac{xz}{yr}\right),$$

$$\varphi_{33}(x, y, z) = \arctg\left(\frac{xy}{zr}\right), \quad \varphi_{12}(x, y, z) = -\ln(z+r),$$

$$\varphi_{13}(x, y, z) = -\ln(y+r), \quad \varphi_{23}(x, y, z) = -\ln(x+r),$$

ahol $i, j = 1, 2, 3$.

Itt szeretnénk megemlíteni, hogy ezeket a képleteket valószínűleg *Eötvös Loránd* is használta, amikor a gravitációs állandó meghatározásához két ólomtéglaközé helyezett inga lengésidejét mérte (lásd *Eötvös* cikkében a 251–258. oldalakat a [17] hivatkozásban). Azt, hogy *Eötvös* méréseiben miért a gravitációs potenciál második deriváltjai jelennek meg, részletesen leírtuk a [11] cikkben.

Megjegyzések, kiegészítések

Könnyen belátható, hogy ha az R pont a téglatest valamely sarkán vagy az egyik élén vagy egyik lapján helyezkedik el, akkor a fenti $\varphi(x, y, z)$ primitív függvény bizonyos tagjai szingulárisak, ami az analitikus és a numerikus számolásoknál gondot okozhat. Ugyanakkor, megmutatható, hogy ezen pontokban a szinguláris függvények határértéke zérus. Például a (6) képlet szerint a téglatest mind a nyolc sarokpontjában egy $x \cdot y \ln(z+r)$ alakú kifejezést kellene kiszámítani a vizsgált pont és a sarokpont távolságát mérő (x, y, z) változók $(0, 0, 0)$ értékénél, de ezen a helyen a képlet nincs értelmezve. Megmutatható azonban, hogy a kifejezés határértéke létezik:

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} x \cdot y \ln(z+r) = 0. \quad (9)$$

Hasonlóan kezelhetők a primitív függvény más szinguláris pontjai is [6]. Ezért a gravitációs potenciál a teljes háromdimenziós térben értelmezhető.

Végül megjegyezzük, hogy számos cikkben a fenti képletekben az $\ln(r+z)$ helyett az $\operatorname{arth}(z/r)$ függvény szerepel (lásd például [2]). A továbbiakban megmutatjuk, hogy mindkét primitív függvénnyel ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a Newton–Leibniz-formula szerint kiértékeljük a megfelelő határozott integrálokat. Valóban az

$$\begin{aligned} \operatorname{arth}\left(\frac{z}{r}\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r+z}{r-z}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(r+z)^2}{r^2-z^2}\right) = \\ &= \ln(z+r) - \frac{1}{2} \ln(r^2-z^2) = \\ &= \ln(r+z) - \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \end{aligned}$$

végeredményben a második tag csak az x és az y változótól függ, és ezért a z változó szerint alkalmazva a Newton–Leibniz-formulát a járulékos zérus lesz. Így annak ellenére, hogy az $\ln(r+z)$ és az $\operatorname{arth}(z/r)$ primitív függvények különbözők, határozott integráljuk z szerint azonos eredményt adnak. Hasonlóan a fenti képletekben az $\ln(r+x)$ és az $\ln(r+y)$ függvények helyett használhatjuk az $\operatorname{arth}(x/r)$ és az $\operatorname{arth}(y/r)$ primitív függvényeket is. Tapasztalataink szerint *Mathematica* programot használva analitikus eredményeket gyorsabban kaphatunk az arth függvénnyel.

Irodalom

1. Balavány György: És mégis lapos a Föld? *24.hu internetes újság*, <https://24.hu/belfold/2017/08/06/es-megis-lapos-a-fold/>

2. Jörg Waldvogel: The Newtonian potential of a homogeneous cube. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 27 (1976) 5–9; <https://ur.booksc.eu/book/6642564/547a4d>
3. James Michael Chappell, Mark John Chappell, Azhar Iqbal, Derek Abbott: The Gravity Field of a Cube. *Physics International* 3 (2012) 50–57; <https://doi.org/10.3844/pisp.2012.50.57>
4. Zakir F. Seidov, P. I. Skvirsky: *Gravitational potential and energy of homogeneous rectangular parallelepiped*. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0002496>
5. Dezső Nagy: The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics* 31 (1966) 362–371; <https://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1439779> és Dezső Nagy: A chart for the computation of the gravitational attraction of a right rectangular prism. *Pure and Applied Geophysics*, 102 (1973) 5–14; <https://doi.org/10.1007/BF00876587>
6. D. Nagy, G. Papp, J. Benedek: The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, 74 (2000) 552–560; <https://doi.org/10.1007/s001900000116>
7. Haáz István Béla: Kapcsolat a derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai között. *Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, Geofizikai Közlemények II/7* (1953) 55–67; http://epa.oszk.hu/02900/02941/00002/pdf/EPA02941_geofizikai_kozlemenyek_1953_02_057-066.pdf
8. Jörg Waldvogel: The Newtonian potential of homogeneous polyhedra. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 30 (1979) 388–398; <https://ur.booksc.eu/book/6644149/cce215>
9. Bijendra Singh, D. Guptasarma: New method for fast computation of gravity and magnetic anomalies from arbitrary polyhedra. *Geophysics* 66 (2001) 521–526; <https://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1444942?journalCode=gpysa7> és <http://repository.ias.ac.in/28174/1/310.pdf>
10. John T. Conway: Analytical solution from vector potentials for the gravitational field of a general polyhedron. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 121 (2015) 17–38; <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10569-014-9588-x.pdf>
11. Cserti József, Dávid Gyula: Az Eötvös-inga képletei. *Fizikai Szemle* 69/7–8 (2019) 219–227; http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/08/fizszem-20190708-cserti-david_09_56_51_1567151811.4595.pdf
12. L. D. Landau, E. M. Lifsic: *Elméleti Fizika I. (Mechanika)* Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
13. Ortvy Rudolf nemzetközi fizikai problémamegoldó verseny, 2020. 27. feladat, kitűzők: Cserti József és Dávid Gyula; <https://ortvy.elte.hu/2020/H20.pdf>
Az ellenőrző számolás során kiderült, hogy ha a feladatnak megfelelően a többi feltétel mellett feltesszük, hogy (idézve a feladathól) „... a korcsolyázó Bátrak pedig pontosan ugyanannyi idő alatt kerültk meg a várost, mint amennyi idő alatt a »gömbölyű Föld« lakóinak állítása szerint az általuk alkotott szerkezet, az »egyenlítői műhold« körbejárta bolygójukat.”, akkor nincs megoldás a h/a arányra. De ha a laposföldi keringésidő például kétszer akkora, mint a műhold keringési ideje, akkor már van megoldás.
14. Ortvy Rudolf verseny, 2022. 11. feladat, kitűző: Cserti József; <https://ortvy.elte.hu/2022/H22.pdf>
15. Ortvy Rudolf verseny, 2018. 33. feladat, kitűző: Cserti József; <https://ortvy.elte.hu/2018/H18.pdf>
16. Dezső Nagy: The Evaluation of Heuman's Lambda Function and its Application to Calculate the Gravitational Effect of a Right Circular Cylinder. *Pure and Appl. Geophys* 62 (1965) 5–12; <https://doi.org/10.1007/BF00875282>
17. B. Eötvös Loránd: Vizsgálatok a gravitatio és a mágnesség köréből (Elsődleges jelentés). *Matematikai Természettudományi Értesítő, a M. Tud. Akadémia III. Osztályának folyóirata, XIV* (1896) 221–266; https://adt.arcanum.com/hu/view/MatEsTtudErtesito_14/?pg=255&layout=s



Az Eötvös Társulat főnt van a **facebook**-on!

