KIS PARAMÉTEREK ÉS A NAGY EGYESÍTÉS

Polónyi János
Strasbourg Egyetem, Strasbourg, Franciaország

Gondolatmenet

A renormcsoport kialakulását két szempont alapján fogjuk követni a legáltalánosabb alkalmazási területén, a kvantumtérelméletben. A módszer különböző felbukkanása egy-egy kis paraméterre vezethető vissza. A kis paraméterek a Természet rendkívül összetettségét leíró, nehezen kezelhető és átlátható egyenletek egyszerűsítéséhez, illetve jelentésük megértéséhez segítenek. Az eredmény – mint látni fogjuk – egy, a fizikán átívelő egység ígérete, amely egy paradoxonnak tűnő állításon alapul, miszerint a fizikai megfigyelések eredménye függ a megfigyelést jellemző skálaparaméterektől, azaz nincsenek fizikai állandók és fix törvények. Itt a skálaparaméter dimenzionális mennyiséget jelöl, amelynek nincs abszolút numerikus értéke és nagysága csupán más, azonos dimenziójú mennyiségekhez képest értelmezhető. A renormcsoport alkalmazása hűen követte a kvantumtérelmélet fejlődését, és az uralkodó szemléletmód alakulását az *1. táblázat* foglalja össze.

1. táblázat

A kvantumtérelmélet és a renormcsoport főbb módszerei

kvantumtérelmélet	renormcsoport	időszak
renormalizált elméletek	multipikatív rcs.	1954–1970.
csupasz elméletek	blokkolás	1971–1984.
	funkcionális rcs.	1984–2006.
nyitott elméletek	kvantum rcs.	2006–

Multiplikatív renormcsoport

A renormcsoport először a kvantumtérelméletekben merült fel. A perturbációszámítás magasabb rendjeiben a közbenső állapotok teljes rendszerére összegzünk, ahol a tetszőlegesen nagy impulzusú állapotok járuléka ultraibolya, UV-divergenciákhoz vezet, amelyek kiküszöbölése azon a megfontoláson alapul, hogy a kölcsönható elméletet definiáló Lagrange-függvény α_{cs} csupasz paraméterei, úgymint tömeg és csatolási állandók, csupán numerikus paraméterek és nem fizikai mennyiségek. Ez abból az triviális megfigyelésből következik, hogy a fizikai mennyiségek perturbációszámítással felírt alakjai valóban α_{cs} rendkívül komplikált függvényei.

Regularizálás

Megváltoztatjuk a dinamikát oly módon, hogy a részecskék járulékait csak egy általunk bevezetett, és Λ-val jelölt, UV energialevágási skála alatt vesszük figyelembe. A levágást hosszúságegységekben kifejezve felfoghatjuk, mint egy $\ell = \hbar c/\Lambda$ minimális távolságot, amely elméletünk térbeli felbontóképességét jellemzi. Ennek eredményeképpen az elméletből származtatott $F(\alpha_{cs}, \Lambda)$ fizikai mennyiségek nem csak az elmélet csupasz paraméterei, hanem a levágás függvényeivé is válnak. A levágás szerepének megértéséhez gondoljunk a matematika és a fizika közötti alapvető különbségre, hogy a matematika bármely ellentmondásmentes axiómarendszerrel foglalkozik, míg a fizika számára ezek közül csak a Természetben megtalálhatók a fontosak. Továbbá a fizika alapegyenleteit csak egy véges, jól behatárolható skálaintervallumban ismerjük, jelenleg nagyjából a proton átmérőjének egy százalékától az Univerzum átmérőjének 96%-ig bezárólag. Ha az így megismert egyenletek extrapolációja zérus távolságig matematikailag jól definiált, akkor esély van arra, hogy az egyenletek kisebb távolságokon is érvényben maradnak. Az persze másik kérdés, hogy – szerintem – a fizika utolsó évszázadának láttán naivitás hinni, hogy a jelenleg ismert fizikai törvények közül tetszőleges nagy energián bármelyik is alkalmazható marad. Amennyiben az extrapoláció matematikailag elfogadhatatlan végtelenhez vezet, akkor biztosak lehetünk, hogy elméletünket nem használhatjuk tetszőlegesen rövid távolságon. A levágás a mi bizonytalanságunkat jellemzi, ezen az energiaskálán túl elméletünket nem akarjuk érvényben tartani. A semleges pion bomlása két fotonra azt jelzi, hogy a kvantum-elektrodinamikában és persze a részecskefizika standard modelljében is nagy, de véges UV-levágás szerepel.

Renormalizálás

Mihez kezdjünk az ismereteink határát jellemző Λ-paraméterrel? Mivel sem numerikus értéke, sem pedig a levágás környékén bevezetett elnyomás részletei nem

Polónyi János 1978-ban fizikus diplomát, majd 1979-ben PhD fokozatot kapott az ELTE-n. Ezután a KFKI-ban kezdett dolgozni, majd a darmstadti GSI-ben és a University of Illinois-n volt post. doc. Ezt követően az MIT-n, később az ELTE-n és végül Strasbourgban egyetemi tanár. Érdeklődési területe a kvantummechanika, a kvantumtérelmélet és a renormalizációs csoport.

egyértelműek, nem engedhetjük meg, hogy ezek a tényezők befolyásolják az elmélet fizikai tartalmát. Ezt pedig úgy próbáljuk elérni, hogy az elméletet definiáló csupasz paramétereknek olyan Λ-függést vezetünk be, ami pont kiejti a perturbációszámításban megjelenő Λ-függést. Mivel csak meghatározott számú $\alpha_{cs,n}$ ($n = 1, \dots, N$) csupasz paraméterünk van, amelyek Λ-függését mi szabhatjuk meg végtelenül sok fizikai mennyiséggel szemben, ez az eljárás általában nem lehet sikeres. Legfeljebb azt remélhetjük, hogy azok a fizikai mennyiségek váljanak Λ-függetlenné, amelyek jellemző $\bar{E}$ energiaskálája kellően messze van a levágástól. Ezt pedig úgy érjük el, hogy megköveteljük a

$$P_n = F_n(\alpha_{cs}, \Lambda), \qquad n = 1, \dots, N \tag{1}$$

renormalizációs feltételt, amelyben a bal és a jobb oldalon különböző, alkalmasan megválasztott fizikai mennyiségek mért értéke, illetve annak a perturbációszámítás adott közelítésében kiszámított kifejezése áll. Ezen a ponton jelenik meg az első kis $\bar{E}/\Lambda$ paraméterünk, amely ezen egyszerűsödés feltétele.

Renormalizált elmélet

Tegyük fel, hogy az (1) egyenletrendszer megoldható a csupasz paraméterekre. Azt az elméletet, amelyben ez tetszőlegesen nagy Λ-ra is megtehető és az így megalkotott $\alpha_{cs}(\Lambda)$ csupasz paraméterekkel definiált elmélet a $\Lambda \to \infty$ határesetben már nem tartalmaz UV-divergenciát, renormalizálhatónak hívjuk. A perturbációszámítás keretein belül belátható, hogy a renormalizálható elméletek minden véges skálához tartozó fizikai kifejezése konvergál a $\Lambda \to \infty$ határesetben és ez a definíció független a renormalizációs feltételek megválasztásától. A 3+1 dimenziós világunkban eddig csupán a nemabeli mértékelméletek, azaz a kvantumszíndinamika és a elektrogyenge elmélet SU(2) mértékbozonjai valósítanak meg perturbatívan renormalizálható kölcsönhatást, a kvantumgravitáció esete még nyitott, mert a renormalizálás nem perturbatív.

Az ismert kvantumrendszerek perturbatív sorának konvergenciasugara zérus, ezek a sorok csak aszimptotikusan konvergálnak, maximális pontosságukat $1/g_{cs}$ körüli rendben érik el, ahol a g_{cs} csatolási állandó a perturbatív kifejtés kis paramétere. A csupasz paraméterek viszont a $\Lambda \to \infty$ határesetben divergálnak, így a levágást nem választhatjuk tetszőlegesen nagynak. Ezzel a problémával egy messze vezető út indul további kis paraméterek keresésére.

Renormalizált perturbációs sor

Alkossunk meg egy-egy mérési eljárást az elmélet paraméterei számára, amelynek eredményei a paraméterek α_n fizikailag jól értelmezett, renormalizált értékét definiálja. Például egy részecske tömegét definiálhatjuk energiája segítségével a nyugalmi rendszerében és a csatolási állandókat pedig alkalmasan megválasztott részecskeütközés szórásamplitúdója alapján. Az eljárás nem egyértelmű, és csupán ésszerű, intuitív definíciót várunk el ezen a ponton. Ezután használjuk az ily módon definiált fizikai paraméterértékeket, mint renormalizációs feltételt a $P_n = \alpha_n$ megválasztásával (1)-ben. Belátható, hogy a csupasz paraméterekben felírt perturbációs sor átrendezhető oly módon, hogy az eredeti sorban megjelenő Λ-függő divergenciákat a csupasz paraméterek Λ-függése kiejti és az így már a $\Lambda \to \infty$ határesetben konvergáló kifejezés felfogható úgy, mint egy, a renormalizált csatolási állandókban felírt hatványsor. Az elmélet paraméterei újradefiniálásának lehetőségét *E. C. Stueckelberg* és *A. Petermann* vették észre [1], és e lehetőség módszeres felhasználása a divergenciák eltávolítására *N. N. Bogoljubov* és *D. V. Shirkov* úttörő munkájának eredménye [2].

A perturbációs sor ilyen átrendezése és a renormalizált csatolási állandó, mint kis paraméter használata problematikus annak ismeretében, hogy a konvergenciasugár zérus, és egy további zavaró tényező, hogy nincsen olyan véges elmélet, amelynek perturbatív sora ez lenne. Más szóval a renormalizált perturbációszámítással kezelt elméleteket lehetetlen nem perturbatív szintre kiterjeszteni. A perturbációszámításon csak a csupasz elméletek szintjén lehet túllépni.

Multiplikatív renormcsoport

A renormalizáció segítségével megalkothatjuk a renormalizált trajektóriát a csupasz paraméterek terében. Ez egy adott renormalizációs feltétellel meghatározott, különböző levágáshoz tartozó csupasz paraméterek görbéje, amelynek pontjai Λ segítségével parametrizálhatók. A görbe $\mathrm{d}\alpha_{cs}/\mathrm{d}\Lambda$ érintővektora kielégíti az $F_n(\mathrm{d}\alpha_{cs}/\mathrm{d}\Lambda, \Lambda) = 0$ ($n = 1, \dots, N$) egyenletrendszert. A részletes analízis alapján a levágásfüggetlenség a kvantumtér-operátor

$$\phi(x) \to \sqrt{Z(s)}\, \phi(x)$$

multiplikatív transzformációját is igényli, innen származik e renormcsoportmódszer neve.

Ez az eljárás megismételhető a renormalizált paraméterek terében is. Tegyük fel, hogy a renormalizált paraméterek definiálására alkalmazott mérési eljárás egy közös $\bar{E}$ energiaskálára alapul és írjuk a renormalizációs feltétel megoldását a $\alpha_{cs} = a(\alpha, \bar{E}, \Lambda)$ alakban. A renormalizált trajektória a rögzített α_{cs} mellett az $\bar{E}$ változtatásával kirajzolódó görbe, az

$$0 = \frac{\partial a_n(\alpha, \bar{E}, \Lambda)}{\partial \bar{E}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\alpha_k}{\mathrm{d}\bar{E}} \frac{\partial a_n(\alpha, \bar{E}, \Lambda)}{\partial \alpha_k} \tag{2}$$

egyenlettel definiált $\mathrm{d}\alpha_k/\mathrm{d}\bar{E}$ érintővektorok integrálgörbéje. Az elmélet paraméterterében megalkotott trajektóriák mentén a $\Lambda \to s\Lambda$, illetve az $\bar{E} \to s\bar{E}$ skálatranszformációk egy transzformációs csoportot, a renormcsoportot valósítanak meg. A renormalizált paraméterek trajektóriáját *M. Gell-Mann* és *F. Low* vezette be a kvantum-elektrodinamikában [3].

Fizikai állandók

Hogyan interpretálandók a renormalizált trajektória által bevezetett futó csatolási állandók? A csupasz paraméterek terében olyan egydimenziós regularizált elméletsereget határoz meg, amelynek renormalizációs feltétele egy adott P_n integrációs állandókhoz tartozik, és csupán a térbeli felbontóképesség különböző. A renormalizált paraméterek terében megvalósított trajektória a fizikai paraméterek skálafüggését fejezi ki. A csupasz és a renormalizált paraméterek trajektóriája pedig megegyezik a perturbációszámítás vezető rendjében. Rögtön látszik egy eléggé meglepő állítás: a renormalizált elméletet a paramétertérben a renormalizált trajektória rögzíti, ily módon az N paramétert tartalmazó renormalizálható elméletnek valójában csak $N-1$ szabadon választható paramétere van.

A renormalizált paraméterek trajektóriája a fizikai mennyiségek és törvények alapvető tulajdonságára hívja fel a figyelmet, nevezetesen arra, hogy a mérések eredményei függenek a megfigyelés skálaparamétereitől. Ezek után természetesnek adódik az is, hogy a mérési eredményeknek megfelelő fizikai törvények is skálafüggők.

Blokkolás

A szabadságfokok fokozatos kiküszöbölése vagy a dinamikába iktatása a renormcsoport alapötlete. Ez a statisztikus fizikában is felbukkant a kritikus rendszerek vizsgálata folyamán. Ezt az elképzelést és a kvantumtérelmélettel való egybeolvadását tekintjük át ebben a fejezetben.

Kritikus jelenségek

A fázisátmenetek, a makroszkopikus átlagok szinguláris függése a mikroszkopikus paraméterektől több szempontból is kivételesen érdekes és meglepő jelenségek. Már létezésük is meglepő, hiszen a fizika alapvető egyenletei nem mutatnak szingularitást – mondjuk a mozgási energiában, ami kritikus hőmérséklethez vezethetne az ekvipartíciós tétel alapján. További kihívást jelentenek a kritikus jelenségek, olyan, általában másodrendű fázisátalakulások, ahol a korrelációs hossz divergál, mint például a kritikus opalescencia, a ferromágnesesség. A probléma itt többszintűvé válik: egyrészt addig példa nélkülien egyszerű összefüggések jelentek meg a kritikus pont körül, mint a termodinamikai változók divergenciáinak hatványfüggvényjellege, a kitevők univerzalitása, azaz a kémiai összetételtől való nagymértékű függetlensége, és a különböző univerzalitási osztályokban fennálló egyszerű kapcsolataik. Másrészt ezek megértéséhez az addigi elméleti módszerek nem elegendők, mert a nagy korrelációs hossz miatt egy szabadságfok túl sok másikkal hat kölcsön, és ezt a perturbációszámítással nem lehet követni.

B. Widom észrevette, hogy a kritikus exponensek megjelenése és egyes, közöttük fennálló összefüggések érthetővé válnak, amennyiben feltételezzük, hogy az állapotegyenlet szinguláris része a termodinamikai változók homogén függvénye [4]. De miért jelenik meg ez az egyszerű függvényalak éppen a lehető legkomplikáltabb fizikai körülmények között?

Blokkolás

A legmeggyőzőbb választ *L. Kadanoff* adta az Ising-modell keretén belül [5], ahol *L. Onsager* egzakt megoldása alapján [6] már ismeretes volt, hogy mi történik, csak éppen érteni nem lehetett. Írjuk az Ising-modell állapotösszegét a

$$Z = \sum_{\{s_j = \pm 1\}} \mathrm{e}^{-H[s_j]} \tag{3}$$

alakba, ahol j a spinrács indexét jelöli, az összegzés a spinkonfigurációkra terjed ki és az $1/k_\mathrm{B}T$ faktort beolvasztottuk $H[s_j]$-ba. Csoportosítsuk az eredeti változókat blokkokba, amelyeket a j' indexszel azonosítunk, és vezessük be valamely ésszerű módon a blokkot jellemző $s'_{j'} = F_{j'}[s]$ spint, például a többségi szabály alapján

$$s'_{j'} = F_{j'}[s] = \operatorname{sign}\left(\sum_{j \in j'}{}' s_j\right).$$

A triviális

$$1 = \sum_{\{s'_{j'} = \pm 1\}} \prod_{j'} \delta_{s'_{j'},\, F_{j'}[s]} \tag{4}$$

azonosságot a (3) egyenletbe beillesztve és a két összegzés sorrendjét megcserélve az állapotösszeg átírható a blokkspinekre történő összegzés formájában, ahol a blokk Hamilton-függvényt az

$$\mathrm{e}^{-H'[s'_{j'}]} = \sum_{\{s_j = \pm 1\}} \prod_{j'} \delta_{s'_{j'},\, F_{j'}[s]}\, \mathrm{e}^{-H[s_j]} \tag{5}$$

egyenlettel definiáljuk. Ez az egyenlet írja le a Hamilton-függvény transzformációját a blokkolás során. A Hamilton-függvényt egy teljes operátorrendszer tagjainak összegeként elképzelve ebből az egyenletből kinyerhetők a Hamilton-függvény g_n dimenziótlan paramétereinek transzformálódási szabálya, amit a $g'_n = B_n(s, g)$ alakban írunk fel. A rácsállandó, a modell minimális távolságskálája, az UV-levágás szerepét játssza és a g csupasz paraméterek a rácsállandó skáláján fellépő dinamikát jellemzik. Tehát a blokkolással az (a, sa) skálatartományban fellépő dinamikai folyamatok járulékával változtatjuk meg a csupasz paraméterek értékét.

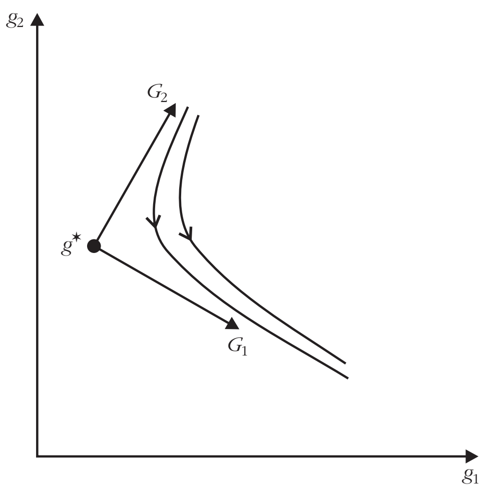
A kritikus pont közelében

Az $a \to a' = sa$ blokkolás a rácskoordinátákat az $x \to x' = x/s$ szabály alapján transzformálja, tehát korrelációs hossz $\lambda = a\xi$ és a szabadenergia $F = a^d f$ rácsállandóegységekben kifejezve a $\xi' = \xi/s$, illetve a $f' = s^d f$ módon transzformálódik d dimenzióban. A kritikus pontban $\xi = \xi' = \infty$, a rendszer skálainvariáns, és a dimenziótlan paraméterek függetlenek a rácsállandótól, ami a blokkolás $g^\star = B(s, g^\star)$ fixpontját jelenti,. Egy blokkolási lépés csak a véges (a, sa) intervallumba tartozó fluktuációk hatását gyűjti össze, tehát a $B(s, g)$ függvény analitikus marad a paraméterekben. A blokktranszformációt a fixpont körül $\Delta g = g - g^\star$-ban kifejtve és feltételezve, hogy a

$$\Delta g'_n = \sum_m M_{nm}(s)\, \Delta g_m$$

lineáris blokkolási relációban fellépő mátrix diagonalizálható, a Hamilton-függvényben megalkothatók a G_n sajátvektorhoz tartozó H_n tagok. Az utóbbit skálaoperátornak hívják, amely a blokkolás során a $H_n \to \lambda_n(s) H_n$ módon transzformálódik, ahol $\lambda_n(s)$ a linearizált blokkolás M mátrixa sajátértéke. A $\lambda > 1$, illetve $\lambda < 1$ skálaoperátorokat releváns, illetve irreleváns operátoroknak hívják, a $\lambda = 1$ eset pedig marginális operátorhoz tartozik. Az *1. ábra* alapján a releváns operátorok a hosszú, az irrelevánsak pedig a rövid távú kölcsönhatásokért felelősek, míg a marginálisak skálainvaránsak. Ezért az összes releváns és marginális operátort szerepeltetni kell a kritikus pont körül alkalmazott Hamilton-függvényben.

1. ábra. Renormalizált trajektória egy kétdimenziós paramétertérsíkban. A $g^\star$ fixpont körüli linearizálás a releváns G_1 és az irreleváns G_2 skálaoperátor-együtthatót eredményezi. A nyilak a rácsállandó növelésének irányát jelzik.



A renormcsoportot a $B(s_2, B(s_1, g)) = B(s_1 s_2, g)$ egyenlet fogalmazza meg, amelynek linearizált alakja $\lambda_n(s_2)\,\lambda_n(s_1) = \lambda_n(s_1 s_2)$. E függvényegyenletnek egyetlen folytonos megoldása, $\lambda_n(s) = s^{\nu_n}$, a H_n skálaoperátor kritikus exponensét definiálja, $G_n \to s^{\nu_n} G_n$.

A renormcsoport-megközelítés fontos tanulsága, hogy a termodinamikai potenciálokban a fázisátmenetnél megjelenő szingularitás nem mikroszkopikus eredetű, hanem a modellt definiáló mikroszkopikus a és a fizikai mennyiségek makroszkopikus L skáláinak nagy távolságából, $L/a \to \infty$, ered, más szóval a reguláris blokkolás

$$\frac{\ln(L/a)}{\ln s} \to \infty$$

ismétléséből. Feltételezve, hogy az összes releváns operátor szerepel a Hamilton-függvényben a szabadenergia-blokkolás során megtartja funkcionális alakját csupán a paraméterek numerikus értéke fut, $f' = s^d f(G')$, azonnal következik, hogy a szabadenergia és vele együtt a termodinamikai potenciálok és az állapotegyenlet homogén függvénye a paramétereknek:

$$f(s^{\nu_n} G_n) = s^d f(G_n).$$

A kritikus pont közelében fellépő vezető hatványszingularitások kitevőjét a releváns és marginális kritikus exponensek adják, az univerzalitási osztályok megjelenése pedig a vezető hatványszingularitások irreleváns paraméterektől való függetlenségéből következik. A kritikus jelenségek itt vázolt leírása az $a/L = 1/\xi$ kis paraméter használatára alapul.

Statisztikus fizika és kvantumtérelméletek szintézise

Kvantumtérelméletben a blokkolást először *K. G. Wilson* vezette be [7]. A perturbációs sor konvergenciájának megjavításához keresett egy kis paramétert és észrevett egy egyszerűsödést a Feynman-gráfok nagyenergiájú határesetében, amit véges energián akart kihasználni. Sikerült konvergenciát elérnie egy új kis paraméter használatával, azzal a feltételezéssel, hogy a részecskemódusok energiahéjakba tömörülnek és az energiahéjak egymástól való távolsága nagy, $E/\Delta E \to 0$. Észrevéve a Kadanoff-blokkolással való hasonlóságot, megfogalmazta a térelméletet téridőrácson, és felhívta a figyelmet a statisztikus fizika és a kvantumtérelméletek hasonlóságára, ami a fizika e két irányának fejlődését évtizedekre meghatározta.

Kiindulási pontja az volt, hogy egy részecskét a λ_C Compton-hullámhosszánál jobban lokalizálva részecske-antirészecske párokat keltünk, tehát λ_C felfogható korrelációs hosszként is. A nagyenergiájú fizika renormalizálása a fizikai (Compton) és a minimális (ℓ) hossz egymástól való eltávolítása, a $\lambda_C/\ell \to \infty$ határeset, amelyben a minimális hossz zérushoz tart rögzített Compton-hullámhossz mellett. A kritikus jelenségek is ugyanúgy valósulnak meg, csupán a rácsállandó, az UV-levágás, $a = \ell$, marad állandó és a korrelációs hossz divergál, $\lambda/a \to \infty$.

A renormalizált elméletek és a kritikus pontok megegyezése

A kvantumtérelmélet euklideszi téridőrácson regularizált, pályaintegrál-formalizmusban megfogalmazott formájában a vákuum-vákuum átmenet amplitúdóját a

$$Z = \int D[\phi]\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar} S_E[\phi]} \tag{6}$$

kifejezés adja, ahol a rács-térkonfigurációkra integrálunk és az exponensben az elmélet euklideszi hatásfunkcionálja áll. A (3) állapotösszeggel való hasonlóság nyilvánvaló a kritikus jelenségekre való bármely utalás nélkül is. Azonban a kritikus statisztikus modellekkel való összehasonlítás további, eredetileg rendkívül komplikált módon elért eredményekre is elvezet. Például az elmélet operátorait kétféleképpen is osztályozhatjuk. Egyrészt renormalizálható és nem-renormalizálható osztályokba sorolhatjuk őket, másrészt pedig egy kritikus pont körül megalkothatjuk a releváns vagy marginális, valamint az irreleváns operátorosztályokat. A két osztályozás megegyezik! Az *1. ábra* világosan mutatja, hogy az irreleváns operátorok együtthatója nő az UV-irányban haladva, tehát egy irreleváns operátor jelenléte eltéríti a renormalizált trajektóriát a fixponttól. Mivel a fixpont jelenti a renormalizált elméletet, az irreleváns operátorok nem renormalizálhatók. Ugyanakkor egy releváns operátor együtthatója csökken az UV-irányban, és az elmélet, amely nem tartalmaz irreleváns operátort megközelíti a fixpontot amint $\Lambda \to \infty$. Ezzel nem csak a perturbatív BPHZ-renormalizálás rendkívül komplikált, rekurzív erdő-formuláját lehet elkerülni a renormalizálás ilyen egyszerű nemperturbatív megfogalmazásával, hanem arra is fény derül, hogy a kvantumtérelméletek divergenciái, amelyeket csak a perturbációszámítás használata segítségével mutattak ki, ettől a közelítéstől függetlenek.

Funkcionális formalizmus

Wilson impulzus térben végrehajtott blokkolásának döntő fontosságú általánosítása abban rejlik, hogy míg a skálatranszformáció s paramétere téridőben a rács geometriájától függő diszkrét szám, az impulzustérben tetszőleges értéket vehet fel. Ily módon a $\Lambda \to \Lambda - \Delta\Lambda$ infinitezimális blokkolást át lehet írni differenciálegyenlet formájában, és az így megjelenő $\Delta\Lambda/\Lambda$ kis paraméter lényegesen eltér elődeitől. Ugyanis az eddigi kis paramétereink, $g_{\mathrm{cs}}g$ és $\bar{E}/\Lambda \sim 1/\xi$ fizikai mennyiségekből épültek fel, így kicsik ugyan lehettek, de minden fizikai problémában véges értéket vettek fel. Ezzel szemben $\Delta\Lambda/\Lambda$ egy általunk végrehajtott határesetet jellemez, tetszőlegesen kicsi lehet és haszna a generátorfüggvények használata során derül ki.

Generátorfüggvény

A generátorfüggvényeket először a valószínűségszámításban vezették be, például a $\{p_n\}$ valószínűségeloszlás információtartalmát a

$$z(j) = \sum_n p_n \mathrm{e}^{jn}$$

generátorfüggvény tartalmazza, hiszen a formális paraméter $j = 0$-ban számolt k-ik deriváltja n^k várhatóértékét eredményezi. A kvantumtérelméletben két generátorfunkcionál fordul elő, egyik a hatás, amely a benne szereplő paramétereket reprezentálja, és a másik a terekhez lineárisan csatolt formális paraméter, egy j forrás jelenlétében számolt vákuum-vákuum átmeneti amplitúdó, mely a Green-függvényeket generálja. E két egymásba ágyazott generátorfüggvényből származnak a kvantumtérelmélet egzakt egyenletei, amelyeket a formális változók szerinti véges differenciaegyenletek differenciálegyenlet-határesetében írunk fel. Ily módon egzakttá lehet tenni a renormcsoport evolúciós egyenletét is. Az új kis paraméter felváltja az $\bar{E}/\Lambda \sim 1/\xi$-t és függetleníti a renormcsoportot a kvantumtérelmélet UV-divergenciáitól, illetve a kritikus ponttól távoli rendszerekre általánosítja.

Blokkolt csupasz hatás evolúciója

F. Wegner és *A. Houghton* általánosította Wilson egyenleteit a csupasz hatásra vonatkozó funkcionális differenciaegyenlet formájában [8],

$$\frac{S_\Lambda[\phi] - S_{\Lambda-\Delta\Lambda}[\phi]}{\Delta\Lambda} = \mathcal{F}_{\mathrm{WH}}[S_\Lambda] + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar\Delta\Lambda}{\Lambda}\right)z. \tag{7}$$

A Planck-állandó megjelenése a kis paraméterben azt jelzi, hogy az egyenlet levezetése a kvantumfluktuációkban kifejtve és a vezető rendre korlátozódva egy hurokszinten történt. Azonban a $\Delta\Lambda/\Lambda$ szorzófaktor arra is utal, hogy a differenciálegyenlet határesetben, ahol infinitezimális blokkolást hajtunk végre $\Delta\Lambda \to 0$, a hurokkifejtés teljes felösszegzését érjük el. A Wegner–Houghton-egyenlet megoldása kettős eredménynyel jár. Egyrészt a renormalizált trajektóriáról leolvashatjuk a fizikai paraméterek skálafüggését, hiszen a csupasz hatás paraméterei a levágás skálájánál fellépő fizikai folyamatokat jellemzik. Másrészt pedig megoldja a térelméletet, mert kellően hosszú evolúció után, alacsony Λ esetén, a modell olyan kevés módust tartalmaz, hogy annak perturbatív megoldása megbízható.

Azonban a funkcionális differenciálegyenletet nem lehet a maga általánosságában megoldani, ezért ezen a ponton közelítést kell alkalmaznunk, az egyenletet levetítjük a hatásfunkcionálok egy jól megválasztott alterére. Euklideszi téridőben természetesen adódik a Landau–Ginzburg dupla kifejtés, amely két kis paraméterre alapul, a tér amplitúdójára és a dinamikát jellemző impulzus nagyságára. Minkowski-téridőben ez az eljárás nem használható *M. Ostrogradsky* instabilitása miatt [9], és a multi-lokális klaszterkifejtésre kell hagyatkoznunk a gradienskifejtés helyett. A perturbációszámításban kevés számú csatolási állandóval kellően magas rendben nagy számú Feynman-gráf figyelembe vételével érhetünk el pontosabb eredményeket. A funkcionális renormcsoportban egyszerű, egy-hurok evolúciósegyenletet, és a pontosabb eredmények érdekében sok paramétert tartalmazó, kellően gazdag analitikus struktúrájú és sok csatolási állandót tartalmazó hatást használunk. Az utóbbi közelítés hajlékonyabb és javíthatóbb, továbbá a csatolási állandók kiválasztását oly módon tehetjük meg, hogy egy közeli fixpontnál megjelenő skálaoperátorok közül azokat vesszük be a hatásba, amelyek kritikus exponense egy adott alsó határ felett van, azaz

$$\lambda(s) = e^{\nu_{\min}}$$

az új és egyben az egyetlen véges kis paraméterünk. Nagyobb pontosságú leírásokban persze nem-renormalizálható kölcsönhatásokra is szükség van.

Effektív hatás evolúciója

Ugyan a (7) differenciálegyenlet megoldása felösszegzi a hurok-kifejtést, a kifejtés szükségessége feltételként megmarad. Ezt a feltételt kiküszöbölhetjük oly módon, hogy nem a pályaintegrál integrandusára, hanem magára a pályaintegrálra vezetjük le az evolúciós egyenletet. Ez az eljárás az effektív hatásra alapul, az összefüggő Green-függvények generátorfunkcionáljának Legendre-transzformáltjára, mert ez a lehetőségekhez képest leginkább lokális generátorfunkcionál. E módszer kifejlesztése *C. Wetterich* és *M. Reuter* nevéhez fűződik [10]. Az eredmény egy, a (7)-től kissé eltérő, funkcionális differenciaegyenlet, amelyben a magasabb rendű korrekció már nem tartalmazza a Planck-állandót.

A pályaintegrál használatának ára az, hogy nem ismerjük az effektív hatásra vonatkozó evolúciós egyenlet kezdeti feltételét. A probléma elkerülhető lenne, ha a kezdeti levágás értékénél a kvantumfluktuációk elhanyagolhatók lennének, ekkor ugyanis az effektív és a csupasz hatás megegyezik, és az utóbbit ismerjük. De a térelmélet UV-divergenciái éppen azt jelzik, hogy a kvantumfluktuációk domináns része jelen van a nagy Λ-hoz tartozó kezdeti feltételben. A kvantumfluktuációk elnyomását ebben a módszerben úgy érték el, hogy Λ-t IR-levágássá alakították át. Ekkor viszont szükségessé válik egy ettől független UV-levágás bevezetése, hiszen enélkül egy lépést sem tehetünk, és az effektív hatást a $\Lambda_{IR} < |\boldsymbol{p}| < \Lambda_{UV}$ tartományba eső részecskemódusok figyelembe vételével definiálják, majd az IR-levágás csökkentésével vezetik el a rendszert a $\Lambda_{IR} = 0$ pontig.

Vegyük észre, hogy ez nem a renormcsoport elvének megvalósítása, hiszen az effektív hatás, amelyben pont a lényeges IR-módusok hiányoznak, nem fizikai rendszerhez tartozik. Azonban az evolúciós egyenlet Λ_{IR}-ben történő integrálásával kirajzolt trajektória egy interpoláló elméletsereget ad egy gyengén fluktuáló megoldható elmélet és a $\Lambda_{IR} = 0$ IR-végpontnál talált fizikai elmélet között, és az elmélet megoldását szolgáltatja.

Kvantumrenormcsoport

Nyitott kvantumtérelméletek

A Wilson által bevezetett blokkolás követi a pályaintegrálban megjelenő csupasz hatás változását az UV-levágás csökkentése során. Ez matematikailag jól definiált evolúciót ír le az eredeti elméletre, azonban a blokkolt hatást tartalmazó funkcionálintegrál nem tartozik egy csökkentett levágású kvantumtérelmélethez. Ugyanis egy dinamikai szabadságfok eliminálásával tiszta állapotból kevert állapothoz jutunk, amelynek jellemzésére a sűrűségmátrixot kell használnunk, azonban a blokkolt pályaintegrál csak tiszta állapotok közti átmeneteket ír le. Feltételezve, hogy a kezdeti elmélet zárt, a levágás csökkentésének első lépésénél máris nyitott elmélethez jutunk, amelynek környezetét az UV-részecskemódusok alkotják. A kvantumtérelméletekben fellépő UV-divergenciák következtében szükség van levágásra, és az attól való függetlenség megfogalmazása csak nyitott formalizmusban tehető meg. Választhatunk, vagy csak rögzített levágású elméleteket használunk, amelyekben a levágás fizikai jelenségnek felel meg és pontosan értelmezhető, megfigyelhető, vagy pedig nyitott elméletekkel folytatjuk!

Nyitott kvantumrendszerek

A kevert állapotok jellemzője az, hogy bennük a „bra”, $\langle\psi|$ és a „ket”, $|\psi\rangle$ kvantumfluktuációi korreláltak. Ezt leghatékonyabban a szabadságfokok formális megduplázásával tudjuk nyomon követni a Schwinger–Keldysh-formalizmus alapján úgy, hogy a kvantumtereket két változatban vezetjük be, egyiket a „bra” és a másikat pedig a „ket” komponens dinamikája számára. A két szektor közti csatolás a környezettel fellépő nyitott kölcsönhatási csatornákat írja le.

A zárt és nyitott kvantumrendszerek viselkedése lényegesen eltér egymástól mind az UV-, mind pedig az IR-tartományban. A szabadságfokok megduplázódása által több renormalizálható paraméterünk van, a

„bra” és a „ket” terek közti csatolási állandók segítségével a renormalizálható elméletek szélesebb csoportja alkotható meg, mint zárt elméletben. A nyitott elmélet alacsony energiás viselkedése nyilvánvalóan különbözik a zárttól, hiszen a makroszkopikus környezet dekoherenciához és klasszikus fizikához vezet. Ezen jelenségek feltérképezése csupán az utóbbi években kezdődött el, *S. Nagy, J. Polónyi* [11]. Vegyük észre, hogy a klasszikus határeset szükségképpen makroszkopikus rendszerekre vonatkozik, amelyek kimerítően részletes kezelése csak kvantum-térelméleti módszerekkel lehetséges.

Globális renormcsoport

A kvantum-klasszikus átmenet leírásának lehetőségével a renormcsoport túllép a sokrészecskerendszerek hatékony leírására szánt módszer határain, és a fizika egészének feltérképezéséhez, illetve megértéséhez vezető fontos módszerré nő fel. A multiplikatív renormcsoport formális keretet szolgáltat annak, a valójában már régen megismert és elfogadott elv megértéséhez, hogy a megfigyelések eredménye mindig függ az alkalmazott skáláktól, nincsenek univerzális fizikai állandók, törvények, csak numerikus paraméterek. A renormcsoport segítségével a szabadságfokok áttehetők a megfigyelt rendszerből annak környezetébe, és ezáltal megnyílt az út a Mindenség elméletének módszeres feltérképezésére, egy „meta-elmélet” felvázolására.

Az általunk jól-rosszul ellenőrzött fizikai elméletek véges skálatartományhoz tartoznak. A hosszúság skálaintervallumok láncolata fedi le a Planck-hossz és az Univerzum átmérője közti megközelítően 62 nagyságrendet, amelyre fizikai világképünk alapul. Mindegyik elmélet az UV levágásától, azaz felbontásától, megközelítően független dinamikát ír le, a hatékonyabb elméleteknél ez a megközelítő skálafüggetlenség szélesebb skálatartományra vonatkozik. Tehát az elméletek egy-egy közelítő renormcsoport fixpont-fizikáját fedik le. Képzeljük el az összes „állandót”, amelyeket a fizikában vagy a mérnöki tudományokban használunk. Az általuk kifeszített paramétertérben definiálandó a Mindenség elméletének renormalizált trajektóriája. Ugyan az UV kezdeti feltételt nem ismerhetjük meg, azonban empirikus elméletek láncolata felépíthető ebben a skálaintervallumban. Véges lehetőségeink tudatában célunk csupán az egyes, részleges elméletek kidolgozásából, a szomszédosak összeillesztéséből, és az így kapott lánc hosszának növeléséből állhat. Erre pedig a renormcsoport optimális lehetőséget nyújt, hiszen trajektóriájának követése módszeresen kirajzolja a fizika számunkra fontos, „releváns” paramétereit és azok dinamikáját.

Irodalom

1. E. C. Stueckelberg, A. Petermann, *Helv. Phys. Acta. 26* (1953) 499.
2. N. N. Bogoljubov, D. V. Shirkov, *Nouvo Cim. 3* (1956) 845.
3. M. Gell-Mann, F. Low, *Phys. Rev. 95* (1954) 1300.
4. B. J. Widom, *J. Chem. Phys.* 43 (1965) 3898.
5. L. Kadanoff, *Physics 2* (1966) 263.
6. L. Onsager, *Phys. Rev. 65* (1944) 117.
7. K. G. Wilson, *Phys. Rev. D3* (1971) 1818.
8. F. J. Wegner, A. Houghton, *Phys. Rev. A8* (1973) 401.
9. M. Ostrogradsky, *Mem. Ac. St. Petersbourg VI.4.* (1850) 385.
10. C. Wetterich, *Phys. Lett. B301* (1993) 90; M. Reuter, C. Wetterich, *Nucl. Phys. B417* (1994) 181.
11. S. Nagy, J. Polonyi, *Universe 8* (2022) 127.