

SZÍNKÉPRŐL, HANGOKRÓL KÖZÉPISKOLÁBAN – MÁSKÉNT

Kiss Miklós

Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium

Johann Jacob Balmer 1885-ben zenei analógiára támaszkodva felírta híres formuláját a hidrogénszínkép látható tartományba eső négy vonalának hullámhossza alapján. A formulát Balmer cikkében [1]

$$\lambda = h \frac{m^2}{m^2 - n^2} \frac{\text{mm}}{10^7}$$

alakban írta, ahol $n = 2$, $m > n$, $m \in \mathbb{N}$. A h értékét Balmer 3645,6-nak adta meg.

Ez alapvető lépés volt a színképek értelmezésében és fontos lépés a kvantummechanika felé. A formula általánosítható volt és működött további nem látható, ultraibolya-tartománybeli vonalakra is.

Elsőként Balmer gondolatmenetének kiindulását nézzük meg, majd ez alapján megfordítjuk a gondolatot, és zenei hangokat keresünk a színképvonalak alapján.

A négy látható tartománybeli színképvonal hullámhossza (1. ábra): $H_\alpha = 656,210$ nm, $H_\beta = 486,074$ nm, $H_\gamma = 434,020$ nm és $H_\delta = 410,120$ nm.

A zenében is fontos szerepe van az egész számoknak. Az általunk használt zenei skála tizenkét fokú. Ennek eredete valahol az ókorban (Mezopotámia [4]) keresendő. Pitagorasz már kísérletileg is (monokorddal) vizsgálta a szépen együtt szóló hangokat [5]. Ezek a tiszta hangközök az oktáv, a kvint, a kvart stb. A frekvenciaarányok ezeknél 2:1, 3:2, 4:3 stb. A vizsgálatok a húrhosszakat és a hangzást elemezték. Az egyes hangok (és húrhosszak) között számtani, harmonikus, illetve mértaniközép-arányokat vettek észre. Két egész hang arányára (F, G) a 8:9 értéket találták és ezen keresztül ők is eljutottak a tizenkét fokú skálához.



Kiss Miklós a Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium matematika-fizika és számítástechnika tanára, a gimnázium napórájának tervezője, készítője. PhD fokozatát fizikából szerezte, kutatótanár. 1995-től 2022-ig szervezte a Mikola-verseny gyöngyösi döntőjét, a feladatkitűző bizottság tagja, a döntő méréseinek készítője 2022-ig. 2015-től 2023-ig a Bugát Pál Természetismereti Vetélkedő zsűrijének tagja. Ericsson-, Mikola- és MTA Pedagógus Kutatói Pályadíjas.



1. ábra. A hidrogén látható tartományba eső színképvonalai.

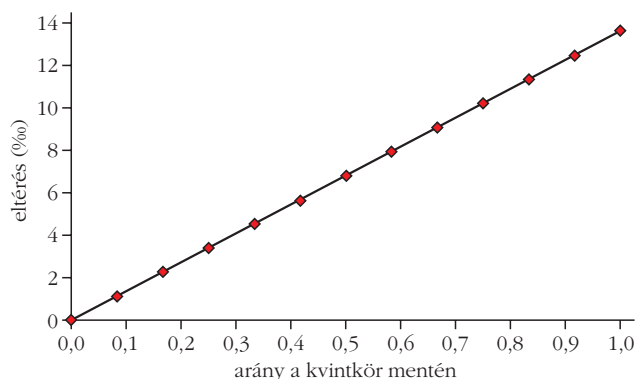
A tiszta „tökéletes” hangzásokkal egy hosszan húzódo problémát indukáltak, a hangolás problémáját: ha oktávokra hangolunk, máshová jutunk, mint amikor kvintekre hangolunk. Manapság erre egyszerű a válasz, a kettő hatványai nem találkoznak a másfél hatványaival, így hét oktáv után, ami tizenkét kvintnek felel meg a kvintkörön, már jelentősen eltér a két frekvencia $2^7 = 128$, $(3/2)^{12} = 129,75$. A 2. ábra mutatja, hogy miként növekszik a frekvenciaarány eltérése. A vízszintes tengelyen egyre normált értékek találhatók. Az 1 felel meg a hét oktáv lépésnek és a tizenkét kvint lépésnek. A kvintkör ugyanakkor zárul, de annak más a jelentése, a hangnemek változását jelenti.

A hangolást, a zenei transzponálhatóság problémáját a temperált skála segítségével oldották meg, Bach korában [6].

Balmer gondolatmenete a zenei frekvenciák arányán alapul. Megkeresi a frekvencia- és így a hullámhosszarányok alapján a megfelelő egész számokat és így jut el a formuláig. A hivatkozott irodalmakban a teljes gondolatmenet megtalálható [1–3, 7].

A következőkben a fordított utat nézzük, a színképvonalakhoz zenei hangokat rendelünk. Itt a monokord a hidrogénatom, a húr az elektron – a hullám-

2. ábra. A kvintre és az oktávra hangolás összehasonlítása.



1. táblázat													
A tizenkét fokú skála hangjaihoz tartozó értékek													
szolmizációs név	lá	li	ti	dó	di	ré	ri	mi	fá	fi	szó	szi	lá
hang	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A
arány	1	1,06	1,12	1,19	1,26	1,33	1,41	1,50	1,59	1,68	1,78	1,89	2
kitevő	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ez utóbbi egyenletből a kitevőt logaritmus segítségével kaphatjuk meg:

$$n = 12 \log_2 \left(\frac{v_n}{v_0} \right).$$

A tizenkét fokú skála hangjaihoz tartozó értékek az 1. táblázatban adtuk meg.

2. táblázat					
A kapott frekvenciák, kitevők és hangok.					
Balmer-vonal	–	I.	II.	III.	IV.
hullámhossz (nm)	689,7	656	486	434	410
zenei frekvencia/10 ¹² Hz	435	457,3	617,3	691,2	731,7
arány az alaphanghoz	1	1,05	1,42	1,59	1,68
a megfelelő kitevő	0	1	6	8	9
zenei hang	A	A#/B	D#/E♭	F	F#/G♭
szolmizációs hang	lá	li	ri	fá	fi

Végül megnézzük, hogy melyik hang van a legközelebb a kapott arányhoz. A 2. táblázat mutatja a kapott frekvenciákat, kitevőket és hangokat.

A négy Balmer-vonalhoz tartozó hang li, ri, fá és fi. (Ha fél hanggal lejjebb transzponáljuk: lá, ré, mi, fá.) A hangokat a kottán a 3. ábra mutatja.



3. ábra. A Balmer-formulához tartozó zenei hangok.

modellnek megfelelően. A módszer önkényes és kézenfekvő: a hullámhosszakhoz tartozó frekvenciákat osszuk el 10¹²-nel (10¹² ≈ 2⁴⁰). Ez azt jelenti, hogy néhány oktávval (≈ 2⁴⁰) lejjebb, a hallható frekvenciák tartományába ereszkedünk.

Legyen az A zenei hang frekvenciája 635 Hz, ekkor a megfelelő szín hullámhossza 689,7 nm.

A hullámhosszokból kiszámíthatjuk a Balmer-vonalakhoz tartozó frekvenciákat:

$$v = \frac{c}{\lambda}.$$

A mértékegységek alapján ezt zenei frekvenciákká transzformáljuk:

$$v = \frac{c}{\lambda} 10^{-12}.$$

Az alaphangból a temperált skálán megkaphatjuk a félhangok számát.

$$v_n = v_0 \left(2^{\frac{1}{12}} \right)^n.$$

Ebből kiszámolható a frekvenciaarány és a kitevő:

$$\frac{v_n}{v_0} = \left(2^{\frac{1}{12}} \right)^n.$$

Érdekeség, hogy a kapott hangnem E♭-moll. Ha valamely hangszeren lejátsszuk ezeket a hangokat, a dallam az Apostol-együttes *Nem tudok élni nélküled* című dalának refrénjére emlékeztet. És ez nagyon igaz, a hidrogén a Világegyetem leggyakoribb eleme, a víz és a szerves vegyületek egyik összetevője, nincs élet nélküle.

A leírtakhoz kapcsolódott a 40. Bugát Pál Kárpát-medencei Középiskolai Természetismereti Műveltségi Vetélkedő második fizikafeladata [8]. A döntősök több mint fele (8/15) hibátlanul megoldotta a problémát.

Irodalom

- J. J. Balmer: Notiz über die Spectrallinien des Wassertofs, Pogendorfer Anallen 1885. *Annalen der Physik* 261/5 (1885) 80–87., Wiley Online Library.
- Fáy Gyula, Tábori Gabriella: A 70 éves Balmer-formula. *Fizikai Szemle* 6/3 (1956) 89.
- Fényes Tibor: *Mikrofizika*. Gondolat kiadó, Budapest, 1959.
- Dräffkorn Kilmer, Anne: The Musical Instruments from Ur and Ancient Mesopotamian Music. *Expedition Magazine* 40/2 (1998); <http://www.penn.museum/sites/expedition/?p=5425>
- Kenneth Sylvan Guthrie: *The Pythagorean Sourcebook and Library: An Anthology of Ancient Writings Which Relate to Pythagoras and Pythagorean Philosophy*. Phanes Press; Revised ed. (1987).
- Kiss Miklós: *Égi és földi harmóniák. A hangolás 2100 éves rejtélye Pitagoraszról Bachig*. Önképzőköri előadás 2020. 03. 26.
- Kiss Miklós: *A Balmer-formula és felfedezése*. Önképzőköri előadások 2009. 03. 07. és 2019. 03. 08.
- Kiss Miklós: Bugát Pál Vetélkedő Döntő 2023 2. fizikafeladat. <http://www.tit.hu/studio/frames.html>? http://www.tit.hu/studio/Bugat_Vetelkedo.html

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacímre: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtítkár, felelős szerkesztő Iglói Ferenc főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyezményen.

Megjelenik havonta (évente egyszer duplaszámmal), egyes szám ára: 1200,- Ft (duplaszámé 2400,- Ft) + postaköltség.

BU ISSN 0015-3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588-0540 (online)