# EÖTVÖS MÁGIKUS SZÁMA

Cserti József – ELTE, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
Dávid Gyula – ELTE, Fizikai Intézet

## Bevezetés

Einstein egyszer azt írta, hogy szeretné megismerni Isten gondolatait – értve ezen a természet törvényeinek logikáját. Mi ennél szerényebb célt tűztünk ki magunk elé: szeretnénk megismerni vagy legalábbis nagy valószínűséggel rekonstruálni az egyik legnagyobb magyar fizikus, Eötvös Loránd gondolatait, amelyek egyik nevezetes kísérlete, a gravitációs állandó pontos megmérésének megtervezése során vezették.

## Eötvös Loránd és a torziós inga

Eötvös Loránd (1848. július 27. – 1919. április 8.) kísérleti fizikusi kutatómunkája mellett igen aktív közéleti ember, tudománypolitikus is volt: egyetemi tanár, új egyetemi intézetek és épületek megálmodója és megépíttetője, egy ideig a Tudományegyetem rektora, a Mathematikai és Physikai Társulat (a mai ELFT elődje) és *Mathematikai és Physikai Lapok,* a BEAC egyetemi sportklub, valamint az apjáról, Eötvös Józsefről elnevezett tehetségnevelő kollégium megalapítója, az Akadémia elnöke, oktatási miniszter, e minőségében népiskolák létrehozója, a Matematikai és Fizikai Tanulóverseny elindítója és szponzora, emellett jeles és elkötelezett tudománynépszerűsítő, valamint túrázó és sportember (a Dolomitokban ma is egy csúcs őrzi a nevét). Változatos pályafutásáról jó képet ad a halálának 100. évfordulója alkalmából, az Eötvös-emlékévben [1], 2019-ben a Kossuth Kiadó gondozásában megjelent kitűnő, igényesen szerkesztett emlékalbum [2].

Idén, 2023-ban születésének 175. évfordulóját ünnepeljük [3]. Ez ismét alkalmat ad arra, hogy egyes munkáinak részleteiben elmerülve megcsodáljuk kutatói igényességét, kreativitását, gondosan és precízen elvégzett kísérleteit, melyeket elmélyült elméleti analízis és a pontosság optimalizálására irányuló számítások előztek meg. Ezt a cikkünket az évforduló alkalmából írtuk, tisztelegve Eötvös munkássága és példája előtt.

Eötvös kísérleti fizikusi munkájának nagy része az általa hihetetlen mértékben továbbfejlesztett és számos speciális mérésre alkalmassá tett Cavendish-féle ingához kapcsolódik. Henry Cavendish (1731–1810, egyebek között a hidrogén felfedezője) az 1790-es években építette meg torziós ingáját, mellyel megmérte a Newton-féle gravitációs törvényben szereplő állandót (ezt a mennyiséget e cikkben a hagyományos és a geofizikai irodalomban máig szokásos jelölésmódot követve $f$-fel jelöljük) – ezzel közvetett módon, Kepler 3. törvényének segítségével kiszámíthatóvá vált a Föld, a Nap és a Jupiter tömege. Cavendish torziós ingája egy függőleges fémszálon függő vízszintes rúdból állt, melynek két végére szimmetrikusan elhelyezve egy-egy kis fémgolyót erősített. A golyók közelébe helyezett nagyobb fémgolyók gravitációs vonzása elforgatta az ingát. A torziós szál direkciós erejének ismeretében a golyók új egyensúlyi helyzetéből meg lehetett határozni a rájuk ható gravitációs vonzóerőt, és a testek tömegének ismeretében ebből Cavendish kiszámította a newtoni gravitációs állandót (pontosabban szólva Cavendish a Föld átlagsűrűségének értékét adta meg, ebből már következik a gravitációs állandó értéke). Az elvileg pofonegyszerű kísérlet nehézségét a rendkívül kis erőhatások pontos mérése és az eközben fellépő számos zavaró tényező kiküszöbölése, illetve számításba vétele jelentette. Nem véletlen, hogy az alapvető természeti állandók (pl. fénysebesség, Planck-állandó, elemi töltés, Avogadro-szám stb.) közül ma is a gravitációs állandót ismerjük a legkisebb pontossággal. Cavendish eredménye az utólagos rekonstrukció szerint a gravitációs állandó ma ismert értékét néhány százalékos pontossággal közelítette meg. (Ma már természetesen sok más, modernebb és pontosabb módszerrel is mérik a gravitációs állandót. Ezek áttekintésére lásd pl. a [4] vagy [5] cikket.)

---

*Cserti József* 1982-ben végezett ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az „Atomoktól a csillagokig” előadás-sorozatot középiskolásoknak.

*Dávid Gyula* több mint 42 éve oktatja az ELTE fizikus hallgatóit. Kutatómunkájában relativisztikus dinamikával foglalkozik. A NYIFFF fizikaverseny alapítója, az Ortvay Rudolf Fizikaverseny és az „Atomcsill” előadás-sorozat társszervezője, ez utóbbinak sokszoros előadója. Számos ismeretterjesztő fizikai és kozmológiai előadása terjed a neten. Hisz abban, hogy a fizikusok világnagy esze előbb-utóbb betölti a táguló teret – ahogy az a *Fizikus nótá*ban is szerepel (amelyet nem mellékesen ő írt).

Egy évtizeddel Cavendish mérései előtt hasonló torziós mérleggel végezte el az elektrosztatika alapvető kísérleteit Charles Augustin Coulomb (1736–1806), megmérve az elektromosan töltött testek között fellépő erőhatásokat. Eötvös következetesen Coulomb-mérlegnek nevezte az általa tökéletesített mérőeszközt. (Coulomb és Cavendish kísérleteiről részletesebben írtunk a *Fizikai Szemle* 2020. novemberi számában megjelent, az Eötvös munkásságához kapcsolódó középiskolai és egyetemi versenyfeladatokat ismertető cikk [6] bevezetőjében.)

A Coulomb–Cavendish-féle torziós ingával végzett mérések a gravitációs (illetve az elektromos vagy mágneses) tér inhomogenitására érzékenyek. Homogén, azaz a tér minden pontjában egyforma gravitációs térerősség esetén az ingára nem hat külső (a torziós szálban fellépőn túli) forgatónyomaték. Ilyen homogén gravitációs térrel szoktunk számolni az iskolai hajítási és szabadesési feladatokban. A valóságban azonban nem ez a helyzet: a gravitációs tér kis mértékben inhomogén, pontról pontra változó. Ez az inhomogenitás lehet természetes eredetű: a Földet alkotó kőzetek aszimmetrikus geometriai elhelyezkedéséből (pl. egy hegy jelenlétéből), illetve eltérő sűrűségéből (pl. föld alatti érc- vagy olajlelőhely) adódó. Ezt az inhomogenitást méri az Eötvös-inga geofizikában és bányakutatásban alkalmazott változata. Ebben az esetben a mérés célja a tömegeloszlás meghatározása. De az inhomogenitás lehet mesterséges eredetű is: a kísérletező ismert alakú és tömegű testeket helyez el az inga közelében, majd ezek helyzetét változtatja. Ebben az esetben a tömegeloszlás ismert, a mérés célja a képletekben szereplő paraméterek pontos meghatározása, vagy a gravitáció tulajdonságaival kapcsolatos elvontabb kérdések vizsgálata.

Az inhomogenitást mindegyik esetben az $U(\mathbf{r})$ gravitációs potenciálmező második, térbeli deriváltjaiból álló $H_{ij}(\mathbf{r}) = \partial_i \partial_j U(\mathbf{r})$ szimmetrikus tenzorral jellemezhetjük – Eötvös mérései ezekre az adatokra érzékenyek. A matematikában a második deriváltakból álló tenzort általában Hesse-mátrixnak nevezik. A geofizikai szakirodalom e mennyiséget olykor Eötvös-tenzornak nevezi. Emlékezzünk vissza, hogy egy $m$ tömegű pontszerű test $V(\mathbf{r})$ gravitációs potenciális energiája az $U(\mathbf{r})$ erőtérben $V(\mathbf{r}) = mU(\mathbf{r})$! A jól ismert $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ gravitációs térerősség az $U(\mathbf{r})$ potenciál első deriváltja: $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, így a $H_{ij}(\mathbf{r})$ tenzor a gravitációs térerősség helyi változásait méri.

Eötvös Loránd a Coulomb–Cavendish-féle torziós ingát továbbfejlesztette, pontos mérésekre alkalmas műszerré alakította, miközben alapos előzetes mérésekkel és elméleti számításokkal figyelembe vette a számos hibalehetőséget, és gondosan megtervezett kísérleteiben igyekezett ezeket kiküszöbölni. Emellett felismerte ingájának gyakorlati alkalmazhatóságát is, ezért kifejlesztett egy olyan változatot, amelyet nemcsak fizikusok, hanem a terepen dolgozó geológusok és bányamérnökök is nagy biztonsággal használhattak. Ezt az ingát először az 1900. évi párizsi világkiállításon mutatta be [7]. Gondot fordított arra is, hogy a berendezés elviselje a szállítással és a szélsőséges éghajlattal járó viszontagságokat, és ezek a nehézségek ne befolyásolják használhatóságát és pontosságát. A 20. század első felének érc- és olajkutatásait világszerte az Eötvös-inga valamelyik, Eötvös munkatársai és tanítványai által továbbfejlesztett változatával végezték.

Eötvös az inga felhasználásának alapötletét számos irányban kiterjesztette; ezzel lehetővé tette, hogy a berendezés egyes specializált változatait igen különböző fizikai kérdések tisztázására alkalmazhassa. A később Eötvös-ingaként ismertté vált alapváltozat a gravitációs térerősség helyi különbségeit, azaz a gravitációs potenciál második deriváltjait (pontosabban ezek közül a helyi tömegeloszlás egyenetlenségeire érzékeny, kisebb értékű komponenseket) mérte. Az e mérések kiértékelésére Eötvös által alkalmazott képlet levezetését bemutattuk a *Fizikai Szemlé*ben korábban megjelent cikkünkben [8].

Eötvös munkatársaival sok más jellegű gravitációs mérést is végzett. Egyik legnagyobb horderejű kísérletével számos anyagra igen nagy pontossággal igazolta a már Newton által is megsejtett tényt, a súlyos és a tehetetlen tömeg arányosságát. Ez a tapasztalat később az Einstein által kidolgozott általános relativitáselmélet alapja lett. (Meg kell jegyezni, hogy Einstein csak utólag ismerte meg Eötvös eredményeit, számára a kétféle tömeg azonossága és a rá épülő ekvivalenciaelv elméleti evidencia volt.) E mérés alapelvéről is írtunk idézett cikkünkben [8]. Az inga más jellegű felhasználásával Eötvös kimutatta a gravitációs erő árnyékolhatatlan voltát (szemben pl. az elektromos erőkkel, melyeket Faraday-kalitkával hatékonyan lehet árnyékolni). A gravitációs inga megfelelő módosításával emellett méréseket végzett az anyagok mágneses tulajdonságainak pontos meghatározására. Mindezeket a kutatásokat részletesen bemutatta az Akadémián 1896-ban elhangzott előadásában és az abból készült cikkben (melyről hamarosan még sok szó esik) [9].

Eötvös rendkívül gazdag életműve szerencsére ma már egybegyűjtve megtalálható az interneten [1, 10], és így az olvasó bővebb képet kaphat Eötvös szerteágazó tevékenységéről. Az érdeklődőknek további érdekes olvasnivalót is ajánlhatunk [11–14].

## Eötvös titkai

Eötvös több évtizeden át foglalkozott gravitációs és mágneses mérésekkel, illetve az ezekhez szükséges laboratóriumi eszközök kifejlesztésével. Eredményeit először csak rövid közleményekben ismertette, majd a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Természettudományi) Osztályának 1896. április 20-án tartott ülésén egy igen részletes, „Vizsgálatok a gravitatio és mágnesség köréből” című „Előleges jelentésben” mutatta be. Ez a beszámoló megjelent a *Mathematikai* *és Természettudományi Értesítő* című akadémiai kiadványban [9]. (A későbbiekben a jelöletlen forrású Eötvös-idézetek mind ebből a cikkből valók.)

Az előadás és a cikk címe azt ígéri, hogy ez csak „előleg”, egy későbbi, még sokkal részletesebb és alaposabb beszámoló előzetes kivonata. Sajnos ez a részletesebb cikk sohasem készült el, ezért amit Eötvös kísérleteiről, azok céljáról, az általa készített műszerek technikai részleteiről, a mérési eredmények kiértékelésére használt matematikai eszközökről tudunk, az nagyrészt az „Előleges jelentésen” alapul. Eötvös munkatársai és tanítványai (Tangl Károly, Pekár Dezső, Fekete Jenő, Rybár István), akik részt vettek a kísérletekben és a berendezések építésében (lásd pl. [15]), majd egyes esetekben befejezték, illetve továbbfejlesztve megismételték a méréseket, a tízes évek végén, majd a húszas-harmincas években további beszámolókat írtak a különböző kísérletekről (lásd pl. [16]). Ezek azonban nagyrészt az eredeti Eötvös-cikk gondolatmenetét ismétlik, kisebb kiegészítésekkel és az új eredmények bemutatásával.

Ezért száz év után is az „Előleges jelentés” a fő forrás, ha Eötvös módszereire és eredményeire, illetve az általa épített kísérleti berendezésekre kívánnak hivatkozni. A cikket többször, több nyelven újranyomták, lásd pl. angolul [11]. A beszámoló egyes fejezetei ma is kiindulópontul szolgálnak a mérések elemzése, illetve megismétlése esetén [17]. A modern cikkek általában szó szerint veszik át Eötvös szövegrészleteit és egyes képleteit. Mi is egy ilyen képletnek eredünk a nyomába.

Az „Előleges jelentés” stílusa igen érdekes és jellemző. Eötvös általában részletesen ismerteti a vizsgálandó fizikai kérdéseket, a mérés alapelvét, valamint az általa megépített és felhasznált kísérleti berendezéseket. Alapos ábrákkal mutatja be a kísérlet elrendezését (sajnos a neten elérhető, többszörösen fénymásolt és beszkennelt változatban az ábrák alig kivehetők), táblázatokban gyűjti össze a mérési eredmények átlagait, az ezekből levont következtetéseket. Emellett részletesen kitér a kísérlet során felmerült nehézségekre, hibaforrásokra, valamint a kiküszöbölésükre tett intézkedésekre. Azokban az esetekben, amikor a laboratóriumi kísérleteket terepen végzett mérések egészítették ki, Eötvös leírja a terepmunka jellegét, problémáit, a felmerült akadályokat is.

Ugyanakkor rendre mellőzi a matematikai levezetések részleteit, vagy csak néhány vázlatos lépésben mutatja be a számítások alapgondolatát. Végül pedig közli a végeredményt, a mérési adatok feldolgozására alkalmas „varázsképletet”.

Ennek a módszernek az okát csak találgathatjuk. A „fizika” tudománya Eötvös korában alapvetően kísérleti fizikát jelentett. Eötvös akadémiai kollégáit, a viszonylag kevés fizikust elsősorban a kísérletek technikai részletei érdekelték – nem utolsósorban a kísérlet esetleges megismétlésére, továbbfejlesztésére való tekintettel. Másrészt valószínűleg eléggé bíztak egymás matematikai képességeiben, elhitték a számítások helyes voltát – a kísérlet megismétlése esetén az eredmények kiértékeléséhez elég a végső képletet ismerni. Az utókor fizikusait viszont éppen a rejtve maradt összefüggések izgatják. Vajon milyen fizikai és matematikai megfontolások alapján vezette le Eötvös a képleteit, milyen optimalizációs eljárással méretezte kísérleti berendezését, honnan vette a képleteiben megjelenő, részletesebben nem indokolt állandókat?

Példaként idézünk két jellegzetes esetet a cikkből. A gravitációs potenciál második deriváltjainak méréséről szóló fejezetben (az „Előleges jelentés” 226. oldalán) néhány egyszerű megfontolás után hirtelen megjelenik az (5) formula, az ingára ható forgatónyomaték négysoros képlete: „forgásmomentumát […] a következő alakban fejezem ki”. A képlet természetesen helyes, de a származtatása nem magától értetődő. Később többen publikálták a formula levezetését az akkoriban szokásos matematikai jelölésrendszerrel. A képlet modern eszközökkel történt részletes levezetését a [8] cikkben adtuk meg.

A gravitációs állandó méréséről szóló fejezetben ([9], 252. oldal) pedig a következő szövegre bukkanunk:

„A vonzó-tömegek ugyanis a rúd alatt lévő vízszintes lapon abba a helyzetbe hozhatók, a melyben hatásuk a rúdra maximalis lesz. Így lesz az például golyók vonzásának esetében, ha a középpontjaikat a rúd golyóinak középpontjaival összekötő egyenesek a rúdra merőlegesen állván, a vízszintessel közel 55 foknyi szöget képeznek. Ebben a maximumnak megfelelő állásban elég, ha az egymásra ható tömegek viszonyos helyzetének meghatározásánál csak függélyes távolságuk lemérésére fordítunk gondot, ez pedig minden nehézség nélkül eszközölhető.”

Az olvasó csak pislog. Miért pont 55 fok? Honnan veszi ezt a szerző? Kijelentésként közli, tehát nekem ezt magamtól is tudnom kellene, és most csak rá kell bólintanom? Pedig nem ez a helyzet: az adat mögött bonyolult számolás és optimalizációs eljárás rejlik. Eötvös kiszámolta a berendezés általános méretezése esetén fellépő hatásokat, és végiggondolta, hogy a tényleges mérés során mely paraméterek pontos beállítása okoz nehézséget, és melyek azok az adatok, amelyek már az előzetes tervezés során rögzíthetők. Számolása során kiderült, hogy ha a kísérleti berendezés tervezése során a rúd helyzetét optimálisra méretezik, akkor a mérés során pontatlanabbul beállítható más adatoktól a végeredmény csak kevéssé függ. Így a kísérlet során elkövetett esetleges hiba nem befolyásolja lényegesen a mérési eredményt.

Ez természetesen csak utólagos rekonstrukció. Egyedüli kiindulási pontunk az „Előleges jelentés”-ben szereplő fenti idézet. De ha az utókor fizikusa bízik Eötvös szövegében (mint Schliemann a Homéroszban), és utánaszámol, akkor óhatatlanul eljut az optimális 55 fokhoz (amely egyébként $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ formában jelenik meg a számításban). Az „55 fok rejtélyét” kitűztük a

2019. évi Ortvay-verseny 2. feladataként [18], a megoldás megjelent a *Fizikai Szemle* 2020/12 számában [19].

Ez az apró példa is azt mutatja, hogy Eötvös minden mondata, pár soros megjegyzése, a mérési elrendezés terveinek részletei mögött is alapos elméleti előkészítő munka, pontos számolás és gondos tervezés rejlik. Eötvös kutatócsoportjában egy-egy kísérlet műszereinek elkészítése és beüzemelése általában hónapokig tartott, maguk a (sokszor és gondosan megismételt) mérések is hónapokat vettek igénybe. Joggal tételezhetjük fel, hogy a kísérlet eme szakaszait hasonlóan gondos, több hétig vagy hónapig tartó számítások előzték meg, amelynek során az általános elméletből kiindulva eljutottak a konkrét berendezés paramétereinek optimalizálásáig. Erről a fázisról, az előzetes számításokról azonban nem szól az „Előleges jelentés”, illetve csak néhány szóban tesz rá utalást. Ezért a kísérletekhez elvezető elméleti gondolatmenetet utólag kell rekonstruálnunk. Ennek a „nyomozásnak” egyik érdekes példája a gravitációs állandó méréséhez kapcsolódó, általunk *Eötvös-tényezőnek* nevezett numerikus paraméter rejtélye. (Megjegyezzük, hogy a kapillaritás elméletében már létezik egy „Eötvös-állandó” és egy „Eötvös-szám” nevű mennyiség is, ezért a mostani kissé esetlenebb elnevezés.)

## Az Eötvös-tényező rejtélye

A torziós ingával végzett mérések alapvetően kétfélék lehetnek: sztatikusak és dinamikusak. A sztatikus mérések során az inga vízszintes rúdjának egyensúlyi helyzeteit (egy rögzített vízszintes irányhoz viszonyított szögét) kell meghatározni, majd a környezeti viszonyok megváltozása (pl. az inga közelében levő tömegek áthelyezése, illetve a torziós szál felfüggesztésének elcsavarása) után újra meg kell mérni az új egyensúlyi helyzetet. (A mérés pontosságát javítja, hogy a szögelfordulást a torziós szálra erősített kis tükörről visszaverődő fénysugár által egy távoli ernyőre vetített fényfolt elmozdulásával lehet mérni.) A sztatikus mérések eredményébe bizonytalanságot visz, hogy ismerni kell (vagy külön meg kell mérni) a torziós szál direkciós nyomatékát. Ez az érték a mérések során a szál nyúlása és vékonyodása, hirtelen véletlen erőhatások, illetve a külső körülmények (pl. a hőmérséklet) változása következtében módosulhat – ez bizonytalanságot vihet az eredmények kiértékelésébe.

A dinamikus mérések során az ingát az egyensúlyi helyzet körül torziós lengésbe hozzák, és a lengésidőt mérik. Ha elég sok lengést kivárunk, a mérés pontossága nagymértékben javítható. Eötvös mérései során egy lengés ideje 600–800 másodperc volt, ami már az akkori időmérő eszközökkel is nagy pontossággal mérhető volt. Így jóval nagyobb mérési pontosság érhető el, mint az egyensúlyi kitérés meghatározása esetén.

Idézzük Eötvöst: „Világos ezekből, hogy eszközeim szerkesztésénél mindenekelőtt nagy lengési idők létesítésére kellett törekednem s ennek a megfontolásnak köszönhetem, hogy sikerült lemérnem e kicsiny erőváltozásokat, melyek kisebb lengési idejű eszközök használatánál mindeddig rejtve maradtak. Ilyen nagy 10 egész 20 percznyi s egyes esetekben még ennél is nagyobb lengési idők és eddig aligha elért érzékenység mellett mérlegrúdjaim egyensúlyi állását úgy mint mozgását bámulatosan szabályossá tudtam tenni és pedig nemcsak jól védett pinczékben, hanem a laboratóriumnak bármely helyiségében, sőt éjjel egyszerű vászonsátor alatt még a szabadban is.”

A dinamikus módszer lehetőséget ad a korábban említett nehézség, a torziós szál hatásának kiküszöbölésére is. A lengésidő az ingára ható gravitációs vagy mágneses erőkön kívül természetesen függ a torziós szál direkciós nyomatékától is. A mérési adatok feldolgozása során azonban előállítható az adatok olyan kombinációja, amelyből ez az ismeretlen érték kiesik, így a keresett fizikai mennyiség csak a jól mérhető len-

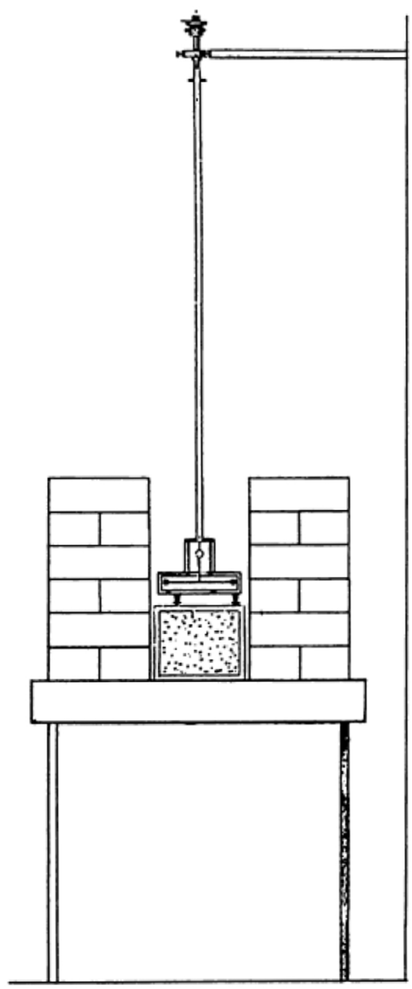
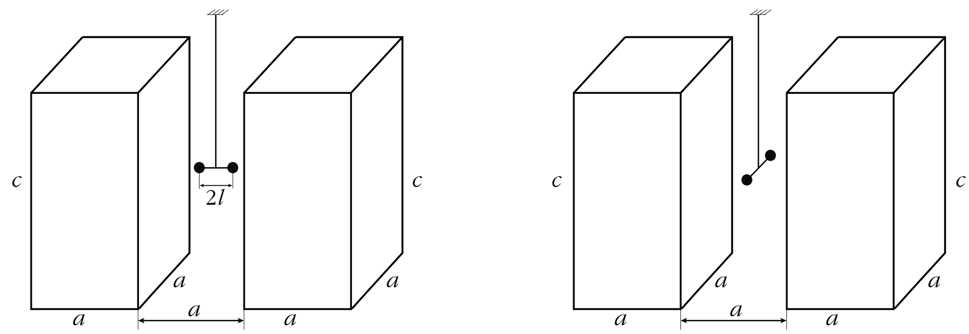


Fig. 11.

*1. ábra.* A védődobozba helyezett torziós inga két ólomhasáb között. (Eötvös eredeti ábrája [9, 11])




*2. ábra.* A torziós inga longitudinális (bal oldali ábra), illetve transzverzális (jobb oldali ábra) egyensúlyi helyzete a két ólomhasáb között

gésidőktől, illetve a berendezés ismert adataitól (pl. az alkalmazott vonzó testek tömegétől) függ. Eötvös laboratóriumi mérései során gyakran alkalmazta ezt a kevesebb hibaforrással járó eljárást.

Egyik legfontosabb méréssorozata a newtoni gravitációs állandó pontos értékének meghatározására irányult. E mérésről az „Előleges jelentés” [9] III. fejezetében, a 251–258. oldalakon számol be. A más jellegű (pl. mágneses) méréseihez hasonló kísérleti elrendezésekkel végzett kezdeti próbálkozások után egy radikálisan új mérési geometriára tért át.

A kísérleti elrendezést az *1. ábra* mutatja be, amely Eötvös eredeti cikkéből való. A neten elérhető, rosszul fényképezett verzióban [9] az ábra alig vehető ki (254. oldal, 11. ábra). A cikk modern utánnyomásában [11] viszont jó minőségben láthatók a képletek és az ábrák is.

Eötvös két egyforma, négyzet alapú, kisebb (az ábra szerint 30 × 15 × 10 cm méretű) ólomtéglákból épített derékszögű ólomhasábot úgy helyezett el, hogy a szemben lévő lapjaik párhuzamosak legyenek, távolságuk pedig megegyezzen a hasábok alapjainak $a$ = 30 cm oldalhosszával (lásd a *2. ábrát*). A hasábok magassága $c = 2a$ = 60 cm volt.

A két ólomhasáb közt így létrejött $a$ élű, négyzetes alapú szabad térbe úgy helyezte el a $2l$ rúdhosszú torziós ingát, hogy az ingarúd középpontja pontosan középen legyen a két ólomhasáb között (nyilván $0 < l < a/2$). A függőleges torziós szálra erősített, elhanyagolható vastagságú és tömegű ingarúd két végére egy-egy azonos $m$ tömegű golyót erősített. Az ingát – Eötvös más méréseihez hasonlóan – egy lapos henger alakú, többszörös falú sárgarézdoboz védte a külső légáramlástól és az elektromos zavarok hatásaitól.

Az inga pontosan az ólomoszlopok fele magasságában levő vízszintes síkban végzett torziós lengéseket. A későbbi számítások során az inga rúdjának középpontjába helyezzük a koordináta-rendszer origóját, a $z$ tengely a torziós szál mentén felfelé, az $x$ tengely a két ólomtömböt összekötő irányba mutat, az $y$ tengely párhuzamos a két hasáb belső síkjaival.

A fenti elrendezésben Eötvös az inga két (a hasábokkal párhuzamos állású, longitudinális, illetve azokra merőleges állású, transzverzális) egyensúlyi helyzete körüli torziós rezgések esetén mérte a lengésidőt (lásd a *2. ábrát*).

A [9] cikk szövege szerint Eötvös az alábbi összefüggéssel határozta meg az $f$ gravitációs állandót:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{13,427}{4\pi^2} f\varrho(1-\varepsilon), \qquad (1)$$

ahol $T_l$ és $T_t$ – Eötvös jelöléseivel megegyezően – a szemben álló téglafalakra merőleges (longitudinális), illetve párhuzamos (transzverzális) egyensúlyi helyzetek körüli kis lengések periódusideje, $\varrho$ a homogén ólomtömbök anyagának sűrűsége, míg $\varepsilon$ a rúd méreteitől függő és az oszlopok véges voltából eredő, egy százaléknál kisebb korrekciós tagot jelent (a későbbiekben ennek a mennyiségnek a jelentését pontosítjuk).

Itt jegyezzük meg, hogy a korabeli méréseknél a napjainkban szokásos periódusidőnek a felét tekintették lengési időnek. Ebből adódik, hogy a képletben szereplő 4-es osztó az eredeti cikkben nem szerepel. Később látni fogjuk, hogy a golyók $m$ tömege kiesik a képletből. Az viszont egyáltalán nem magától értetődő, hogy az (1) képletben az ingarúd $2l$ hossza sem bukkan fel.

Megmérve a két lengésidőt Eötvös a fenti képlet alapján határozta meg az $f$ gravitációs állandót, és első mérései szerint az $f = 6{,}65 \cdot 10^{-11}$ m$^3$/kg s$^2$ értéket kapta, amely alig tér el a mai legpontosabb $f = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}$ m$^3$/kg s$^2$ értéktől. (Ez a fizikai állandók értékével foglalkozó nemzetközi bizottság által 2018-ban elfogadott adat. A negyedik tizedesjegyben még a legmodernebb mérések is jelentős szórást mutatnak [5].)

A korábban említett „55 fokos problémához” hasonlóan itt is azonnal felmerül a kérdés: vajon honnan veszi Eötvös az (1) képletben megjelenő, öt értékes jegyre megadott együtthatót? Ezt az értéket a továbbiakban *Eötvös-tényező*nek nevezzük, és $\mathcal{E}$-vel jelöljük.

Az (1) képlet előtt Eötvös ad némi elméleti magyarázatot. Először felvázol egy gondolatkísérletet: képzeljük el, hogy az inga egy véges vastagságú, de végtelen hosszúságú és végtelen magasságú ólomfal *belsejében* leng. Egy ilyen végtelen lemezen kívüli gravitációs tér (az analóg elektrosztatikus problémához, a végtelen fémlemez vagy kondenzátor elektromos teréhez hasonlóan) homogén: az ide helyezett ingára nem hatna a térerősség inhomogenitásából eredő forgatónyomaték. Nem ez a helyzet a fal belsejében: ott (ugyancsak közismert módon) a gravitációs térerősség inhomogén, a fal közepétől kifelé haladva lineárisan növekszik. Eötvös pár sorban eljut az eredményhez: a *2. ábrán* látható két helyzetben fellépő lengésidőkre az (1) képlethez hasonló formula adódik, csak a számlálóban az Eötvös-tényező helyett $8\pi$ áll.

Tangl későbbi összefoglalója [16] és az Eötvös munkásságát angol nyelven népszerűsítő 1959-es cikk [20] ugyanezzel a gondolatkísérlettel kezd, de a $8\pi$ értéket elemibb, bár hosszadalmasabb érvelés és két ábra segítségével vezeti le.

Furcsállhatjuk, hogy egy Eötvöshöz hasonló vérbeli kísérleti fizikus miért folyamodik ilyen élettől elrugaszkodott gondolatkísérlethez. Hiszen ki látott már végtelen méretű falat? És az ólomfal belsejében lengő ingát? De a következő két lépés visszavezet a tényleges kísérlethez.

Az első lépés Eötvöshöz méltóan zseniális: nemcsak az elméleti érvelést teszi áttekinthetőbbé, hanem – mint később látni fogjuk – a tényleges matematikai számításokat is lényegesen leegyszerűsíti. Hagyjunk el a végtelen falból egy négyzet alapú (függőleges irányban még mindig végtelen) hasábot! A négyzet alapja megegyezik a fal vastagságával, így az ólomfal két félvégtelen részre esik szét: majdnem megkapjuk az *1.* és a *2. ábrán* látott kísérleti elrendezést. Ezzel természetesen megváltozik a most már két részből álló fal gravitációs tere, és a frissen létrejött résben elhelyezett ingára ható forgatónyomaték, így az inga lengésideje is. Az ingára ható, korábban kiszámolt gravitációs forgatónyomatékból le kell vonni az elhagyott négyzetes hasáb anyaga által kifejtett hatást.

Igen ám, de a négyzetes hasábhoz képest a longitudinális és a transzverzális elhelyezkedésű inga pontosan egyformán áll, a hasáb anyaga által kifejtett gravitációs forgatónyomaték a két esetben teljesen egyforma! És mivel bennünket a két hatás különbsége érdekel, az eltávolított négyzetes hasáb anyaga által kifejtett forgatónyomaték a különbség képzésekor kiesik. Ezért az (1) képlet változatlanul érvényes, noha a bal oldalon szereplő lengésidők megváltoztak. Ezt a mesteri gondolatmenetet Eötvös (valamint a szöveget majdnem szó szerint átvevő Tangl és Kolossváry) részletesen el is magyarázza.

Az így módosított képlet számlálójában még mindig $8\pi$ szerepel. Most kellene figyelembe venni azt a tényt, hogy az ólomfalak nem végtelen, hanem véges méretűek.

Eötvös a cikkében [9] nem írja le, hogy hogyan kapta a képletben szereplő 13,427 „mágikus” szorzótényezőt. Ehelyett a kérdést két rövid mondattal intézi el: „Azon véges méretű oszlopokra, a melyeket az előbb leírt módon felállítottam, és tényleg méréseimnél használtam, lényegükben hasonló okoskodások érvényesek. Ez esetben azonban, mint a számítás mutatja, az (1) egyenletben a $8\pi$ érték helyébe 13,427 volt teendő.”

Tangl Károly elsőéves egyetemi hallgatóként segítette Eötvös kezdeti, gravitációval kapcsolatos méréseit, és később „Vizsgálatok a gravitáczióról” című munkájában [15] emlékezik vissza a közös munkájukra, de a fenti kérdésre itt sem kapunk választ: „Ez esetben az (1) formula csak annyiban szenved változást, hogy $8\pi$ helyébe 13,427 lép, amint ezt a részletes számítás mutatja.”

Egyikük sem mond többet az elvégzett „részletes számításokról”. Áttekintve az irodalmi forrásokat sajnos máshol sem találtunk olyan cikket, amelyben bővebb magyarázat lenne az Eötvös-tényező kiszámolására: a későbbi irodalom minden kommentár és magyarázat nélkül átveszi az „Eötvös-tényező” fenti értékét. Geofizikus kollégákkal folytatott személyes konzultáció sem vezetett e számítások nyomára. Úgy látszik, ez a kérdés az utóbbi száz évben senkit sem izgatott. Kénytelenek vagyunk magunk utánaszámolni.

A gravitációs állandó mérésére irányuló kísérlet más furcsaságokkal is szolgál. Meglepő módon – Eötvös közismerten precíz mérései és gondosan megírt cikkei ellenére – arra se találtunk forrást, hogy a mérésében mekkora volt a golyók $m$ tömege és az ingarúd hosszának $2l$ értéke. Márpedig magától értetődő, hogy az ingára ható forgatónyomaték függ az ingarúd hosszától.

A másik furcsaságot az jelenti, hogy Eötvös – több hónapi gondos mérés után – elégedetlen volt a kísérlet eredményével, és nem is folytatta azt. Mint írta, két zavaró tényezőt nem tudott kiküszöbölni, így nem érte el az általa eredetileg megkívánt pontosságot. Az egyik gondot a lengő inga hengeres szelencéjében fellépő légáramlások által kifejtett súrlódás és turbulencia okozta, amely befolyásolta az inga lengésidejét. Ennek kiküszöbölésére az egész berendezést vákuumba kellett volna helyeznie – ekkora vákuumkamra azonban nem állt rendelkezésére. Másrészt nem volt elégedett a téglákból összerakott ólomoszlopok homogén voltával sem, ami kérdésessé tette az elméletileg meghatározott gravitációs tér értékét. Ezt a nehézséget Eötvös úgy kívánta kiküszöbölni, hogy az ólomoszlopokat két nagy edénybe öntött folyékony higannyal pótolja. Ennyi higanyt azonban nem tudott beszerezni (ne felejtsük el, az ólomoszlopok tömege egyenként 600 kg volt!). E két hibaforrás Eötvös szerint egy százalékosra korlátozta a mérés által elérhető pontosságot. Ráadásul az (1) képletben szerepel még egy $\varepsilon$ korrekciós tényező is, amely a cikk szerint „egy kicsiny, egy százaléknál kisebb, a rúd méreteitől függő és az oszlopok véges voltából eredő correctio tagot jelent”.

Végül tehát Eötvös abbahagyta a kísérleteket, és az addigi méréseket összegezve egy 1 százalékos pontosságú eredményt közölt a gravitációs állandó számértékére. „Jelen közleményemben azonban nem ez értékre, hanem a módszerre fektetem a súlyt” – írta, bízva a kísérlet pontosabb megismétlésének lehetőségében. (A modern mérések aztán megerősítették, hogy Eötvös eredménye valóban egyszázalékos pontossággal közelíti a gravitációs állandó ma elfogadott értékét.)

A fentiek fényében még furcsábbnak tűnik az (1) képletben megjelenő, öt értékes jegyre megadott Eötvös-féle szorzótényező. Ha az egész mérés pontossága több hibaforrás következtében csak egy százalék, akkor miért használ egy ilyen feleslegesen pontosan kiszámított numerikus állandót? Egyáltalán miért fordított időt és energiát ennek a számnak az ilyen pontos meghatározására?

Eötvös e fontos mérésével kapcsolatban tehát a következő kételyeink és kérdéseink merültek fel:

1. Hogyan, milyen számításokkal kapta Eötvös az $\mathcal{E}$ = 13,427 értéket?
2. Miért nem közölte (általános szokásával ellentétben) az ingarúd hosszának $2l$ értékét? Vajon milyen rúdhosszra vonatkozik az $\mathcal{E}$ Eötvös-tényező megadott értéke?
3. Ha a teljes mérés csak 1 százalék pontosságú, miért volt szükség az $\mathcal{E}$ Eötvös-tényező öt jegyre pontos meghatározására?

Cikkünk további részében ezeknek a kérdéseknek járunk a nyomába.

## Az ingára ható forgatónyomaték

Vizsgáljunk egy merev testet, amely a súlypontján átmenő, rögzített tengely körül foroghat! A kiinduló helyzettől való eltérés szögét jelölje $\varphi$, a tengely irányába mutató egységvektort pedig $\mathbf{n}$. A test külső gravitációs térben felvett $V$ potenciális energiája természetesen függ a $\varphi$ szögtől: $V(\varphi)$. A testre a gravitációs tér által kifejtett $\mathbf{M}_g$ forgatónyomaték-vektor $\mathbf{n}$ irányú komponense:

$$M_g(\varphi) = \mathbf{M}_g \mathbf{n} = -\frac{\mathrm{d}V(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{2}$$

A fenti képlet levezetése megtalálható a *Fizikai Szemle* 2020. év decemberi számában [19].

Az Eötvös-inga esetében a merev test az inga rúdja, a két végére erősített $m$ tömegű golyókkal, a rögzített forgástengely pedig a függőleges irányú torziós szál.

Eötvös a [9] cikkben levezetés nélkül közölt egy képletet, amely a (2) forgatónyomatékot kifejezi a merev test $\Theta$ tehetetlenségi tenzorának komponenseivel és az $U(\mathbf{r})$ gravitációs potenciál $H_{ij} = \partial_i \partial_j U$ második deriváltjaival. A deriváltak értékét a test súlypontjában kell venni. Az ingára specializálva a képlet a következő alakú lesz:

$$-M_z = \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos 2\alpha\right]\Theta(1-\epsilon), \tag{3}$$

ahol $\Theta$ az inga tehetetlenségi nyomatéka a torziós szál mint tengely körül, $\alpha$ az inga rúdjának a koordináta-rendszer rögzített $x$ tengelyével bezárt szöge, $\epsilon$ pedig az ingarúd pontos alakjától és a golyók méretétől függő kicsiny korrekciós tényező. (Ez az $\epsilon$ nem azonos az (1) képletben szereplő $\varepsilon$ korrekciós tényezővel, bár mindkettő egyaránt kicsiny.)

Az Eötvös képleteiről szóló [8] cikkünkben bemutattuk a (3) formula levezetését. Hangsúlyoztuk azt is, hogy az eredmény akkor érvényes, ha a vizsgált merev test méretei elhanyagolhatók a gravitációs tér változására jellemző karakterisztikus hosszhoz képest.

Eötvös és követői a (3) képletet használták a torziós ingával végzett geofizikai mérések kiértékelésére. Ebben az esetben a cél a gravitációs potenciál $H_{ij} = \partial_i \partial_j U$ deriváltjainak mérése. A torziós szál felfüggesztésének elforgatásával több esetben meghatározták az egyensúlyi helyzetet, és így egyenletrendszert kaptak a $H_{ij}$ mennyiségekre. Ezekből aztán következtetni lehetett a környékbeli anyageloszlásra (pl. a föld alatti érclelőhelyek elhelyezkedésére).

A most elemzett mérés során azonban Eötvös más logikát követett: elvileg pontosan ismerte az $U(\mathbf{r})$ potenciált (hiszen a gravitációs teret keltő anyageloszlást ő maga hozta létre), ezért a mérés során csak a minden képletben szorzóként szereplő Newton-féle $f$ gravitációs állandó volt az ismeretlen. Ennek meghatározására a korábban említett dinamikus módszer szolgált.

A torziós ingára az $M_g(\varphi)$ gravitációs eredetű forgatónyomatékon kívül természetesen egy másik forgatónyomaték is hat, amelyet az egyensúlyi helyzetéből kitérített torziós szál fejt ki, és kis kitérések esetén arányos az egyensúlyi helyzettől mért $\varphi$ szöggel:

$$M_0 = -D_0 \varphi, \tag{4}$$

ahol $D_0$ a torziós szál direkciós állandója.

Állítsuk be a rendszer kezdeti helyzetét úgy, hogy a rúdnak ebben az állásában a torziós szál forgatónyomatéka éppen kompenzálja a gravitációs tér által kifejtett forgatónyomatékot! Mérjük a $\varphi$ szöget ettől az egyensúlyi helyzettől, és fejtsük sorba a (2) egyenlet jobb oldalát első rendig az inga egyensúlyi helyzete körül! Ekkor az ingára ható teljes forgatónyomaték arányos lesz a kitérés $\varphi$ szögével:

$$M(\varphi) = M_0 + M_g = -(D_0 + D_g)\varphi, \tag{5}$$

ahol a gravitációs tér effektív direkciós állandóját a (2) képlet sorbafejtett alakja adja:

$$D_g = -\left.\frac{\mathrm{d}M_g(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\mathrm{d}^2 V(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=0}. \tag{6}$$

Fontos megjegyezni, hogy míg a torziós szál $D_0$ direkciós állandója a (4) képlet értelmében mindig pozitív (hiszen a szál vissza akarja forgatni az ingát az egyensúlyi helyzetbe), addig a gravitációs tér $D_g$ effektív direkciós állandója pozitív és negatív is lehet.

Legyen Θ az inga tehetetlenségi nyomatéka a $z$ tengely, azaz a torziós szál körül! Ekkor a forgásra vonatkozó mozgásegyenlet (kis kitérésekre):

$$\Theta \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} = M(\varphi) = -(D_0 + D_g)\varphi. \qquad (7)$$

Ez a harmonikus oszcillátor jól ismert mozgásegyenlete. Megoldása szinuszos rezgés, melynek körfrekvenciája

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D_0 + D_g}{\Theta}}, \qquad (8)$$

ahol $T$ a torziós rezgés periódusideje. A rezgésidő reciprokának négyzete kifejezhető a fenti képletből:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{D_0 + D_g}{\Theta}. \qquad (9)$$

Vizsgáljuk most az inga két különböző egyensúlyi helyzete (jelölje ezeket $\varphi_1$ és $\varphi_2$) körüli rezgéseket! Mindkettőhöz tartozik egy effektív gravitációs $D_{gk}$ direkciós állandó ($k$ = 1, 2) és egy $T_k$ rezgésidő. A (9) képletet mindkét esetre felírva, majd kivonva egymásból látható, hogy a torziós szál $D_0$ direkciós állandója kiesik, és csak a két helyzetre vonatkozó $D_{g1}$ és $D_{g2}$ gravitációs direkciós állandók különbsége marad meg:

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{D_{g1} - D_{g2}}{\Theta}. \qquad (10)$$

Az effektív direkciós állandók (6) definícióját viszszaírva megkapjuk első fő eredményünket:

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{4\pi^2\Theta}\left( \left.\frac{\mathrm{d}^2V(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1} - \left.\frac{\mathrm{d}^2V(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2} \right). \qquad (11)$$

Eötvös a (11) egyenlőség bal oldalát mérte. („A lengési idők lemérése meglepő biztonsággal és pontossággal eszközölhető.”) A jobb oldalon Θ az inga (a rúd és a rajta levő tömegek) ismert tehetetlenségi nyomatéka. Az elméleti számítás feladata tehát a rendszer gravitációs energiája második deriváltjai értékének a két egyensúlyi helyzetben való meghatározása. Ez az érték nyilván arányos az univerzális $f$ gravitációs állandóval. Ha tehát a jobb oldal többi tényezőjét elméletileg kiszámítjuk, a bal oldalt pedig megmérjük, a két oldal összehasonlításával megkapjuk az $f$ gravitációs állandó értékét. Ez Eötvös „dinamikus” torziós ingás mérésének alapgondolata.

Kérdés, hogy milyen geometriai elrendezésű kísérleti helyzetre alkalmazzuk a fenti képletet – nyilván olyanra, ahol egyrészt a mérés pontosan végezhető el, másrészt a (11) egyenlőség jobb oldalán szereplő deriváltak könnyen kiszámíthatók.

Az eddigiekben nem specializáltuk az ingaként lengő merev test alakját. Általános merev test esetén mind a test $V(\varphi)$ gravitációs potenciális energiája, mind a Θ tehetetlenségi nyomaték egy bonyolult térfogati integrállal állítható elő. Egyszerűbb a helyzet, ha a lengő ingát diszkrét tömegpontok együttesének tekintjük. Eötvös épp ezt a közelítést tette: az ingát két $m$ tömegű, pontszerűnek tekintett golyóként vette számításba, melyeket egy elhanyagolható tömegű és vastagságú, $2l$ hosszúságú rúd két végére erősített. Ebben az esetben a rúd középpontjára vonatkoztatott Θ tehetetlenségi nyomaték egyszerűen $\Theta = 2ml^2$. Az ettől az értéktől való eltérést, ami a rúd véges vastagságából és tömegéből, valamint a golyók véges átmérőjéből adódik, Eötvös az (1) képletben szereplő $(1 - \varepsilon)$ korrekciós tényezőbe söpörte bele.

Legyen egy pontszerű testekből álló merev rendszer $K$-adik tömegpontjának tömege $m_K$, a pontba mutató helyvektor pedig $\mathbf{r}_K$! A test egészének $\varphi$ szögű elfordulása során az egyes helyvektorok a $\varphi$ szög függvényeként megváltoznak: $\mathbf{r}_K(\varphi)$, ez a szögfüggés azonban egyszerű geometriai úton kiszámítható. Tudjuk, hogy egy tömegpont $V(\mathbf{r})$ gravitációs helyzeti energiája a test $m$ tömegének és a gravitációs tér $U(\mathbf{r})$ potenciáljának szorzata. Így a test teljes gravitációs potenciális energiája:

$$V(\varphi) = \sum_K m_K U(\mathbf{r}_K(\varphi)), \qquad (12)$$

ahol $U(\mathbf{r})$ a gravitációs tér potenciálja az $\mathbf{r}$ vektorral megadott térbeli pontban. (Ne feledjük, hogy $U(\mathbf{r})$ az $\mathbf{r}$ pontba helyezett egységnyi tömegű tömegpont gravitációs energiáját jelenti, így $U$ mértékegysége $\mathrm{m^2/s^2}$.)

Eötvös ingája esetén a $K$ index csak az 1 és 2 értéket veszi fel, hiszen az ingát két tömegpontból állónak tekintjük. A *2. ábráról* azonban jól látszik, hogy a rendszer az ingarúd mozgásának síkjában a rúd középpontjára nézve tükörszimmetrikus, így a két golyó helyén az $U(\mathbf{r})$ potenciál azonos lesz, még akkor is, ha a rúd elfordul egyensúlyi helyzetéből. Ezért a (12) képletben elegendő az ingarúd egyik végén levő golyóval számolni, a szummázás pedig csak egy kettes szorzótényezőt eredményez. Hasonlóképpen kell eljárni a gravitációs potenciális energia első és második deriváltjának kiszámításánál is.

Feladatunk tehát arra redukálódott, hogy meghatározzuk az inga két egyensúlyi helyzetét, és e helyzetekben kiszámítsuk az inga egyik végpontjában az $U(\mathbf{r}(\varphi))$ gravitációs potenciál $\varphi$ szerinti második deriváltját. Ehhez persze ismerni kell magát az $U(\mathbf{r})$ gravitációs potenciált.

## A derékszögű hasábok gravitációs tere

Az $U(\mathbf{r})$ potenciál a newtoni gravitációs elméletben kielégíti a

$$\Delta U(\mathbf{r}) = 4\pi f \varrho(\mathbf{r}) \qquad (13)$$

Poisson-egyenletet, ahol $f$ a newtoni gravitációs állandó, $\varrho(\mathbf{r})$ a gravitációs teret keltő anyag helyfüggő sűrűsége, Δ pedig a Laplace-operátort jelöli. Az egyenlet megoldása:

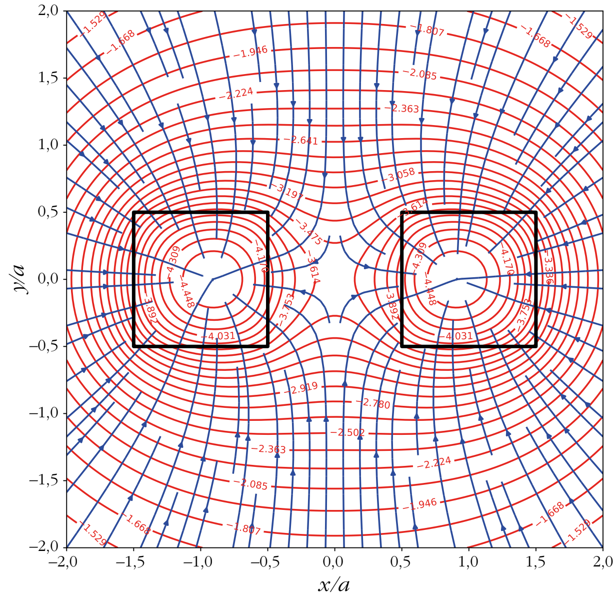
$$U(\mathbf{r}) = -f \int \mathrm{d}^3\mathbf{R}\, \frac{\varrho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}. \tag{14}$$

Az **R** vektorváltozó szerinti integrálást a gravitációs teret keltő test(ek) teljes térfogatára kell elvégezni. A képlet jelentése világos: az **R** helyen levő $\varrho(\mathbf{R})\,\mathrm{d}^3\mathbf{R}$ tömegelemek $-f/|\mathbf{r}-\mathbf{R}|$-rel arányos gravitációs potenciálját kell összegeznünk az **r** pontban. Homogén sűrűségű test esetén az állandó $\varrho$ érték kiemelhető az integrál alól.

A (14) képletben szereplő integrálás a legtöbb esetben nem végezhető el zárt alakban, így általában nem kapunk analitikus (képlettel megadható) alakot az $U(\mathbf{r})$ gravitációs potenciálra. Már Newton ismerte az egyik kivételt: ha a gravitációs teret keltő test sűrűségeloszlása gömbszimmetrikus, akkor a potenciál is az: a testen kívül a potenciál értéke $U(\mathbf{r}) = -fM/r$, ahol $M$ a test teljes tömege, $r$ pedig az **r** vektor abszolút értéke (itt a koordináta-rendszer origóját a teret keltő gömbölyű test középpontjába helyeztük). E képlet gradienseként adódik Newton közismert $-1/r^2$-es gravitációs törvénye.

Egy másik érdekes, fontos, bár kevésbé ismert analitikusan kiszámolható eset a homogén tömegeloszlású, derékszögű tégla alakú test gravitációs tere. A képlet trigonometrikus és hiperbolikus függvények inverzeinek (arctg és arth) hat különböző variánsából áll, e függvények pedig az $(\mathbf{r}-\mathbf{R}_{cs})$ vektorok derékszögű komponenseinek különböző kombinációit tartalmazzák. Itt **r** azt a helyet jelöli, ahol az $U(\mathbf{r})$ potenciált keressük, az $\mathbf{R}_{cs}$ vektor pedig végigfut a gravitációs teret keltő téglatest mind a nyolc csúcsán. E tagokat kell összegezni a téglatest nyolc csúcsa adatainak behelyettesítésével, így kapjuk végül a teljes formula összesen 48 tagját. A formulát elsőként Friedrich Bessel vezette le 1813-ban [21] a csillagászati távcsövek zenitre tájolási problémáinak vizsgálata során. Később a potenciál gradiense, azaz a gravitációs térerősség komponenseit Sir George Everest angol földrajztudós és geodéta is kiszámította, aki a Nagy Indiai Délkörmérést vezette az 1820-as években (és akiről később a Föld legmagasabb csúcsát elnevezték). A földmérési adatok kiértékelésekor figyelembe kellett venni az indiai fennsík nagy tömegeinek gravitációs hatását, ehhez vezette le Everest a szögletes hasábok gravitációs terét, amelyet először az 1830-ban megjelent könyvében [22] publikált – az eredmény betölti a könyv teljes 97. oldalát. A potenciál képletének részletes felírásától megkíméljük az olvasót – az érdeklődők megtalálják (első és második deriváltjaival együtt) az „Élet a Laposföldön” című cikkünk függelékében [23]. Ugyanitt további irodalmi hivatkozások is találhatók. (Megjegyezzük, hogy abban a cikkben az **r** és az **R** vektorok jelölése az itt használthoz képest fordított.) A formula igen érdekes és szellemes levezetése Haaz István geofizikus cikkében olvasható [24].

Jelen esetben nem egyetlen, hanem két derékszögű hasáb terét kell vizsgálnunk, így az egzakt képlet nem 48, hanem 96 tagból áll. Szerencsére a *Mathematica*




*3. ábra.* A két hasáb ($f\varrho a^2$) egységekben mért $U(\mathbf{r})$ gravitációs potenciáljának ekvipotenciális vonalai és az erővonalak a $z = 0$ síkban

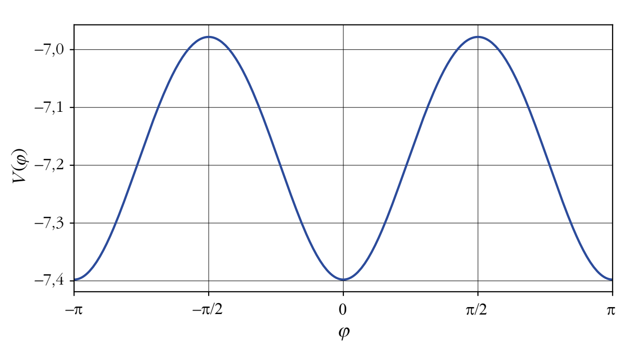
szimbolikus program könnyen megbirkózik mind a potenciál kiszámításának, mind ábrázolásának feladatával (Eötvös minden bizonnyal örült volna, ha e programot használhatja). A *3. ábrán* a két hasáb potenciálja és erőtere látható az ingarúd mozgásának $z = 0$ síkjában. A folytonos (színes ábrán piros) vonalak az $U(\mathbf{r})$ gravitációs potenciál ekvipotenciális vonalai, míg a nyíllal ellátott (színes ábrán kék) vonalak a potenciál negatív gradiense, azaz a gravitációs gyorsulás erővonalai (a potenciált $f\varrho a^2$ egységekben mértük).

A *3. ábrán* jól látható, hogy a két hasáb közötti üres tér középpontja az erőtér speciális pontja: az ide helyezett pontszerű testre nulla gravitációs erő hat – hiszen a két téglatest vonzása itt éppen kiegyenlíti egymást. Ha azonban a pontszerű próbatestet kimozdítjuk az egyensúlyi helyzetből, érdekes dolog történik: $x$ irányba, azaz a két téglatest valamelyike felé elmozdítva a testet a közelebbi tégla vonzása erősebb lesz a távolabbiénál, ezért a próbatest tovább távolodik a fixponttól, és nekicsapódik a közelebbi téglának. Ha viszont $y$ irányban, azaz a két téglát összekötő vonalra merőlegesen mozdítjuk el a próbatestet, akkor a két tégla együttes vonzóereje visszaviszi azt a fixpontba. Az egyensúlyi helyzet körül a gravitációs tér erővonalai hiperbolához hasonlítanak, ezért nevezik az ilyen egyensúlyi helyzetet nyeregpontnak vagy hiperbolikus fixpontnak. A hiperbolikus fixponttal jellemezhető egyensúlyi helyzet instabil: van olyan irány, amely felé a próbatestet elmozdítva a fellépő erők azt eltávolítják a fixponttól. Ez nem véletlen: a (13) Poisson-egyenletből levezethető, hogy tiszta gravitációs (és a vele matematikailag analóg elektrosztatikus) erőtérben egy pontszerű részecskének nem létezik stabil egyensúlyi helyzete.

Mi azonban nem pontszerű testet, hanem két véges távolságú pontból álló ingát helyezünk a két hasáb közti üres tér középpontjába. A *3. ábra* alapján látható, hogy ha az ingarudat általános „ferde” állásba helyezzük, akkor mindkét golyóra olyan gravitációs erő hat, amely a rudat az $x$ tengellyel párhuzamos irányba igyekszik elforgatni. (A két golyóra ható erők vektori összege a szimmetria miatt nulla, de általában forgatónyomaték lép fel.) Az ingának két olyan egyensúlyi helyzete van, amikor a két golyóra ható erők rúdirányúak, azaz nincs forgatónyomatékuk. Az egyik esetben a rúd $x$ irányú, azaz párhuzamos a két hasábot összekötő egyenessel (ezt a helyzetet nevezi Eötvös longitudinálisnak). Ez az egyensúlyi helyzet stabil: kis kitérések esetén visszatérítő forgatónyomaték lép fel. Más szóval elmondva: ebben a helyzetben a (6) képletben értelmezett $D_g$ effektív direkciós állandó pozitív. A másik egyensúlyi helyzet az előzőre merőleges, $y$ irányú (Eötvös transzverzális esete). Ha az inga rúdja párhuzamosan áll a két hasáb közeli lapjaival, akkor a szimmetria miatt a két golyóra ható erő most is rúdirányú, tehát nincs forgatónyomaték. Ez az egyensúlyi helyzet azonban instabil: kis kitérítésre mindkét golyót a hozzá közelebbi hasáb felé vonzza a gravitáció, azaz a kitérés tovább növekszik. Ebben az esetben a $D_g$ effektív direkciós állandó negatív.

A fentieket szemléltetendő a *4. ábrán* bemutatjuk a két pontszerű golyóval modellezett inga gravitációs potenciális energiájának függését az elfordulás $\varphi$ szögétől (a szöget az $x$ tengelytől mérjük, az energia egysége $f\varrho a^2 m$). Látható, hogy a $\varphi = 0$ (és a vele ekvivalens $\varphi = \pi$) helyzetben a potenciális energiának minimuma van, az e helyzetekből kitérített rendszer visszatér – ezek az egyensúlyi helyzetek stabilak. Ezzel szemben a $\varphi = \pi/2$ (és a vele ekvivalens $\varphi = 3\pi/2$) helyzetekben a potenciális energiának maximuma van, az egyensúlyi helyzet instabil.

Ne feledkezzünk meg azonban arról, hogy az ingára nemcsak a gravitációs tér által kifejtett forgatónyomaték hat, hanem a torziós szál $M_0 = -D_0\varphi$ forgatónyomatéka is. Így az egyensúlyi helyzetek esetén a teljes visszatérítő direkciós erő az (5) képlet szerint a két érték összege. Ha a torziós szál $D_0$ direkciós ereje elég nagy, az eredő érték mindkét egyensúlyi helyzetben pozitív lesz. Rögtön látjuk azt is, hogy a longitudinális egyensúlyi helyzet körüli rezgés esetén az eredő direkciós erő – és így a (8) képlet szerint a rezgés körfrekvenciája is – nagyobb lesz, mint a transzverzális helyzet körüli rezgés esetén. A rezgésidő fordítva arányos a frekvenciával, ezért a longitudinális helyzet körüli rezgés periódusideje kisebb, mint a transzverzális esete. Láthatjuk tehát, hogy Eötvös (1) képletében a bal oldalon valóban pozitív mennyiséget kapunk. (Eötvös méréseiben $T_l$ és $T_t$ értéke 640, illetve 860 másodperc körül volt.)




*4. ábra.* Az inga $f\varrho a^2 m$ egységekben mért $V(\varphi)$ gravitációs energiájának szögfüggése a két hasáb gravitációs terében. Az egyensúlyi helyzetek (szélsőértékek) körül a gravitációs energia sorbafejtett alakja $V(\varphi) = V_0 + D_g\varphi^2/2$, ahol a két állásban $D_{gl} = 0{,}91$, illetve $D_{gt} = -0{,}77$

Ez az elemzés tehát valóban elvezetett az előzetesen a *2. ábrán* felvázolt két egyensúlyi helyzethez. Számításunkat tehát azzal kell folytatnunk, hogy e két helyzetben kiszámítsuk az $U(\mathbf{r}(\varphi))$ függvény (6) szerinti második deriváltját. Illetve…

Korábban említettük, hogy egy homogén téglatest gravitációs terének kiszámításához a test nyolc csúcsához tartozó járulékokat kell összegeznünk – esetünkben a két ólomtömb miatt 16 csúccsal kell számolnunk. Ezek mindegyikére valóban szükségünk is volt, amikor a *3. ábra* adatait számoltuk ki. Eötvöst azonban nem a potenciál részletes menete érdekelte, hanem a kétféle egyensúlyi helyzetből kiszámítható effektív direkciós állandók különbsége (lásd a (10) képletet). Emlékezzünk vissza ezért Eötvös korábbi trükkjére, amelyet a hipotetikus végtelen fal esetével kapcsolatban mutattunk be: ha a végtelen falból kivágunk az origó körül egy négyzet alapú hasábot, a hasáb anyagának járulékát ki kell vonnunk a kiszámított gravitációs térből. Ez azonban a longitudinális és a transzverzális állású inga esetén ugyanannyi, ezért a (11) képletben megjelenő különbségből kiesik.

Fordítsuk meg most ezt a gondolatmenetet! Töltsük ki a két ólomhasáb közti négyzetes hasáb alakú teret ólommal (és közben persze hallgatólagosan fogadjuk el, hogy az inga az ólomtömb belsejében is mozoghat)! Jelöljük az inga potenciális energiáját e módosított konfigurációban $\overline{V}(\varphi)$-vel! Ekkor a (11) képletben a $V(\varphi)$ potenciális energiák deriváltjainak különbségét a fiktív $\overline{V}(\varphi)$ potenciálok deriváltjainak különbségével pótolhatjuk, hiszen a központi négyzetes hasáb beillesztése az inga mindkét állása esetén ugyanakkora értékkel változtatja meg a potenciált.

A $\overline{V}(\varphi)$ mennyiség az inga potenciálja a „befoltozott”, $x$ irányban immár $3a$ hosszúságú, $y$ és $z$ irányban változatlanul $a$ szélességű, illetve $2a$ magasságú ólomhasáb terében. De ez az objektum is egy homogén sűrűségű derékszögű téglatest, tehát terének kiszámítására alkalmazhatjuk a hasábok gravitációs terének soktagú formuláját! Ez viszont már csak 48 tagból áll a korábbi 96 helyett. A számolásnál csak az ólomtömbök 8 külső sarkának járulékait kell kiszámítanunk, a belső, az ingához közelebbi sarkok járuléka a különbségképzéskor kiesne. Eötvös trükkjével tehát a számolási munka felét megtakaríthatjuk! És most utólag már jól láthatjuk, miért választotta Eötvös a kísérleti elrendezésben egyforma nagyságúnak az ólomoszlopok szélességét és egymástól való távolságát, azaz négyzetes alapúnak az ingát környező lyukat: ezzel az első ránézésre véletlenszerűnek tűnő választással megspórolta a kísérletet megelőző számolások felét. (*Megjegyzés:* a százharminc évvel későbbi drukkerek felvethetnek egy hasonlóképpen szimmetrikus kísérleti elrendezést: egy hosszúkás, hasáb alakú fémtömb közepébe henger alakú lyukat fúrunk. Esetleg Eötvös egyik ötletét megvalósítva egy hosszúkás, hasáb alakú edényt az ólomtömbökkel ellentétben valóban homogén higannyal töltünk meg, és ennek közepére behelyezünk egy henger alakú üres edényt. A levegővel – esetleg vákuummal – teli hengernek a tengelye mentén lógatjuk be a torziós ingát. A szükséges számítások azonosak az Eötvös kísérlete során alkalmazottakkal.)

Az eddigi megfontolásokat összesítve Eötvös mérésének leírására a következő formulát kapjuk:

$$\frac{1}{T_l^2}-\frac{1}{T_t^2}= \\ =\frac{1}{4\pi^2}\frac{1-\varepsilon}{2ml^2}2m\left(\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\bigg|_{\varphi=0}-\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\bigg|_{\varphi=\pi/2}\right), \tag{15}$$

ahol $T_l$ és $T_t$ az inga longitudinális, illetve transzverzális egyensúlyi helyzete körüli lengésideje, $\Theta = 2ml^2$ a korábban elmondottak alapján az inga torziós szál körüli tehetetlenségi nyomatéka, $\varepsilon$ az ehhez tartozó kicsiny korrekciós tag, $\bar{U}(\varphi)$ pedig a $3a$ hosszúságú „kiegészített” hasáb által létrehozott gravitációs potenciál az ingarúd *egyik* végén levő golyó helyén. Az $\bar{U}(\varphi)$ gravitációs potenciál és a $\bar{V}(\varphi)$ potenciális energia közti különbséget a (12) képlet szerint kiemelt $m$ tényező, a másik golyót pedig a kettes szorzótényező veszi figyelembe. Látjuk, hogy a képletben az $m$ tömeggel egyszerűsíteni lehet (így nem okoz gondot, hogy beszámolójában Eötvös nem közölte a golyó tömegét), az ingarúd $2l$ hosszúsága azonban még szerepel az eredményben.

## A pontszerű inga esete

A továbbiakban célunk a (15) formulában a zárójelben szereplő mennyiség elméleti kiszámítása. Ez az érték a (14) képlet szerint arányos az $f$ gravitációs állandóval, illetve az integrálból kiemelhető állandó $\varrho$ sűrűséggel – ha minden jól megy, akkor végül meg kell kapnunk az (1) képletet, benne az Eötvös-szorzótényezővel.

Kézenfekvőnek tűnik az Eötvös által közölt (3) képlet felhasználása. Ha abban az $\alpha$ szög helyére behelyettesítjük az $\alpha = 0$, illetve az $\alpha = \pi/2$ értéket, az ingarúd $2l$ hosszúsága kiesik, és a következő eredményt kapjuk:

$$\mathcal{E}=\frac{2}{f\varrho}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right), \tag{16}$$

ahol a deriváltakat az ingarúd középpontjában kell vennünk. A ((3) képletből az következik, hogy $D_{gt} = -D_{gl}$, a különbségképzéskor ezért lép fel a kettes szorzótényező.)

Ezután a sokat emlegetett 48 tagú képlet (pontosabban annak második deriváltja) felhasználásával kiszámíthatjuk a képletben szereplő mennyiségeket. Néhány trigonometriai trükk (arctg értékek összevonása) után ezt kapjuk:

$$\mathcal{E}=16\,\mathrm{arctg}\left(\frac{8\sqrt{14}}{27}\right)=13{,}390. \tag{17}$$

Meglepő módon ez a szám *nem* egyezik az Eötvös cikkében, illetve az (1) képletben szereplő numerikus értékkel. Igaz, az eltérés nagyon kicsi. Valószínűleg a mérési hiba ennél nagyobb volt.

Hát most lehet töprengeni… Ha Eötvös egyszerűen a 13,4 értéket adta volna meg az (1) képletben (összhangban az egész mérés egy százalékos pontosságával), akkor most elégedetten hátradőlhetnénk: Eötvös saját, korábban általunk már levezetett (3) formulája alapján megkaptuk az Eötvös-tényezőt. De az (1) képletben határozottan *nem* ez az érték szerepel, hanem egy öt jegyre megadott, ettől az eredménytől láthatóan eltérő szám…

Vajon mi lehet az eltérés oka? Emlékezzünk vissza a (3) formula levezetésével kapcsolatban tett megjegyzésre: az eredmény akkor érvényes, ha a vizsgált merev test mérete kicsi a gravitációs tér változásának karakterisztikus hosszához képest. Ez a feltétel bizonyosan teljesül a geofizikai mérések esetén. Ott a tanulmányozott kőzettömegek kilométeres nagyságrendjével áll szemben az Eötvös-inga néhányszor tíz cm hosszúságú rúdja. A most elemzett mérés esetében viszont a feltétel nem áll fenn: az inga hossza, a gravitációs teret keltő ólomtömbök mérete és egymástól való távolsága egyaránt a deciméteres nagyságrendbe esik. Nem fogadhatjuk el tehát a kísérlet elemzésére a sorfejtésen alapuló (3) képlet használatát!

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a (3) formula a pontszerű ingára ható forgatónyomatékot adja meg – de a mi esetünkben az inga határozottan *nem* pontszerű.

Újra kell tehát gondolnunk a kitérített ingarúd végén táncoló golyóra ható forgatónyomaték kiszámításának módszerét.

## A véges hosszúságú inga esete

A gondot az okozta, hogy a (3) formula levezetésekor a gravitációs potenciált és deriváltjait az origóban felvett értékekkel helyettesítettük. Ha az ingarúd mérete, azaz a golyók középponttól mért távolsága összemérhető a gravitációs tér változásának karakterisztikus hosszával, pontosabb számításhoz kell folyamodnunk.

Vegyük fel a $z = 0$ síkban az $x$ tengelyhez képest $\varphi$ szöggel elfordult $\mathbf{e}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ egységvektort, valamint az $\mathbf{e}(\varphi)$-re merőleges $\mathbf{f}(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ egységvektort! Könnyen belátható, hogy $\mathrm{d}\mathbf{e}(\varphi)/\mathrm{d}\varphi =$

$\mathbf{f}(\varphi)$, valamint $\mathrm{d}\mathbf{f}(\varphi)/\mathrm{d}\varphi = -\mathbf{e}(\varphi)$. E jelölést használva az origó középpontú, $2l$ hosszúságú ingarúd egyik végén levő golyó helyvektora $\mathbf{r}(\varphi) = l\mathbf{e}(\varphi)$, és a golyó helyén a gravitációs tér potenciálja $U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r} = l\mathbf{e}(\varphi))$ lesz. Ezt a kifejezést a közvetett függvények deriválási szabálya segítségével kétszer deriváljuk (az indexes alakot és a néma index konvenciót használjuk):

$$\frac{\mathrm{d}U(\mathbf{r}(\varphi))}{\mathrm{d}\varphi} = \partial_i U l \frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}\varphi} = l\,\partial_i U\, f_i(\varphi), \tag{18a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2U(\mathbf{r}(\varphi))}{\mathrm{d}\varphi^2} &= l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\partial_i U(\mathbf{r}) f_i(\varphi)) \\ &= l\left[ f_i(\varphi)\partial_j\partial_i U l \frac{\mathrm{d}e_j(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} + \partial_i U \frac{\mathrm{d}f_i(\varphi))}{\mathrm{d}\varphi}\right] \\ &= l^2 f_i f_j \partial_j \partial_i U - l e_i \partial_i U. \end{aligned} \tag{18b}$$

A képletben az indexes parciális deriváltak az $\mathbf{r}$ vektor derékszögű $x$, $y$, $z$ koordinátái szerinti deriváltakat jelölik, a kétszer előforduló indexekre összegezni kell. Fontos megjegyezni, hogy a deriváltak értékét nem az origóban, hanem a golyó aktuális helyzetében kell behelyettesíteni.

A fenti eredményt a korábban elmondottak alapján a négyzetes lyuk „betömésével” kapott derékszögű hasáb $\bar{U}(\mathrm{r})$ gravitációs potenciáljára kell alkalmaznunk. A (15) képlet szerint a potenciál második deriváltját a $\varphi = 0$, illetve a $\varphi = \pi/2$ helyen kell kiértékelni. Mivel $\mathbf{e}(0) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{e}(\pi/2) = (0, 1, 0)$, $\mathbf{f}(\pi/2) = (-1, 0, 0)$, ezért

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = \left.\left(l^2\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2} - l\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}\right)\right|_{\mathbf{r}=(l,0,0)}, \tag{19a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi/2} = \left.\left(l^2\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial x^2} - l\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right)\right|_{\mathbf{r}=(0,l,0)}. \tag{19b}$$

Visszahelyettesítve a (15) képletbe a következő végeredményt kapjuk:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{1-\varepsilon}{4\pi^2}\left[\left.\left(\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2} - \frac{1}{l}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}\right)\right|_{\mathbf{r}=(l,0,0)} - \left.\left(\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial x^2} - \frac{1}{l}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right)\right|_{\mathbf{r}=(0,l,0)}\right]. \tag{20}$$

Ez a képlet két fontos jellemzőben különbözik a pontszerűnek tekinthető ingára kapott (16) alaktól. Először is nemcsak az $\bar{U}(\mathrm{r})$ potenciál második deriváltjai szerepelnek benne, hanem az első deriváltak is. Az utóbbiak, azaz a gravitációs térerősség komponensei az ingarúd két végén levő golyókra összegezve kiejtik egymást, de a forgatónyomatékhoz hozzájárulnak. A másik különbség az, hogy a potenciál deriváltjainak értékét nem az origóban, hanem a golyók egyensúlyi helyzetében, az origótól véges távolságra kell kiszámítani. Érdemes megjegyezni, hogy a szögletes zárójelben levő kifejezésnek a nevezőben szereplő $l$ hosszúság ellenére létezik az $l \to 0$ határértéke. Ha figyelembe vesszük, hogy az első deriváltak értéke az origóban, az egyensúlyi helyzetben nulla, akkor könnyen belátható, hogy a hosszúsággal osztott első deriváltak határértéke épp a megfelelő második derivált. Ezért a szögletes zárójelben álló kifejezés $l \to 0$ határértéke megegyezik a (16) képlet jobb oldalával, beleértve a kettes szorzótényezőt.

## Az Eötvös-tényező függése az inga hosszától

Most már tényleg nincs más hátra, mint a ($3a$, $a$, $2a$) élhosszúságú, homogén $\varrho$ sűrűségű derékszögű hasáb 48 tagból álló $\bar{U}(\mathrm{r})$ gravitációs potenciáljának deriváltjait behelyettesíteni a (20) képletbe. Mivel Eötvös nem adta meg az ingarúd $2l$ hosszúságát, ezt a paramétert függőben hagyjuk, és az Eötvös-tényező értékét az $l$ hosszúság függvényében adjuk meg. Pontosabban: normáljuk az ingarúd $2l$ hosszúságát a két ólomtömb közti $a$ távolsággal. Ehhez vezessük be a $t = 2l/a$ változót (melynek értéke 0 és 1 között futhat: $t = 0$ a korábban tárgyalt pontszerű inga határesetét jelenti, a $t = 1$ határesetben pedig az inga végén levő golyók éppen hozzáérnének az ólomtömbökhöz). Eljutottunk tehát számolásunk végeredményéhez, megadhatjuk az Eötvös-tényező $\mathcal{E}$ értékét a $t$ paraméter függvényében:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\mathcal{E}(t) = {} & \operatorname{arctg}\frac{3+t}{u} - \frac{3+t}{t}\operatorname{arctg}\frac{1}{(3+t)u} \\ & - \operatorname{arctg}\frac{1+t}{3v} + \frac{1+t}{t}\operatorname{arctg}\frac{3}{(1+t)v} \\ & + \frac{1}{t}\operatorname{arth}\frac{1}{u} + \frac{2}{t}\operatorname{arth}\frac{1}{2u} - \frac{3}{t}\operatorname{arth}\frac{1}{v} \\ & - \frac{2}{t}\operatorname{arth}\frac{3}{2v} + \{t \to (-t)\}, \end{aligned} \tag{21}$$

ahol

$$u(t) = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{3t}{2} + \frac{t^2}{4}} \quad \text{és} \quad v(t) = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}}.$$

A végső képletben szereplő 16 tagnak csak a felét írtuk ki, a többit úgy kaphatjuk meg, hogy a $t$ paraméter helyébe mindenütt (beleértve az $u(t)$ és $v(t)$ mennyiségeket definiáló gyököket is) $(-t)$-t írunk.

A (21) képlet az Eötvös-tényező egzakt, közelítésmentes értékét adja meg az ingarúd hosszának függvényében.

Ezt az ijesztőnek tűnő függvényt az *5. ábrán* mutatjuk be. A vízszintes tengelyen az ingarúd hosszára jellemző $t$ paraméter változik 0 és 1 között, a függőleges tengely pedig az $\mathcal{E}$ Eötvös-tényező értékét mutatja. Az ábrán szereplő szaggatott vízszintes vonal jelentésére még visszatérünk.

A korábbról, a pontszerű ingára vonatkozó (17) képletben szereplő 13,390 számértéket felismerhetjük a görbe kezdőpontjában, a $t \to 0$ határértéknél – valóban, ez felel meg a pontszerű ingának. De a függvény legjellemzőbb vonása az, hogy alig függ a $t$ paraméter értékétől: változása az egész tartományban kevesebb, mint egy százalék. Ez a kis ingadozás pedig beolvasztható az (1) képletben szereplő $\varepsilon$ korrekciós tényezőbe. Idézzük fel Tangl Károly egy megjegyzését: „E módszer nagy előnye abban áll, hogy a rúd méretei csak a korrekciótagban szerepelnek s így nincs is szükség azok pontos ismeretére.” [16].

Hasonlítsuk össze ezt a gyenge függést egy másik kísérleti szituációval! Helyezzük el a vízszintes síkban lengő ingát a két derékszögű hasáb helyett két egyforma gömb alakú test között! Legyen a gömbök közti távolság ugyanakkora, mint a gömbök átmérője! A korábban elvégzett számítást könnyen megismételhetjük erre az esetre is, hiszen a gömbök gravitációs tere jól ismert. Ezt az $U(\mathbf{r})$ függvényt a (20) képletbe helyettesítve az Eötvös-tényezőnek a négyzetes hasáb esetével analóg $t = l/R$ paramétertől való függésére a következőt kapjuk:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{16\pi}{3}\left[\frac{6}{\left(4+t^2\right)^{5/2}} + \frac{12+t^2}{\left(4-t^2\right)^3}\right], \qquad (22)$$

ahol $t = l/R \leq 1$.

Könnyen látható, hogy $\mathcal{E}(t = 0) = 2\pi \approx 6{,}28$ és

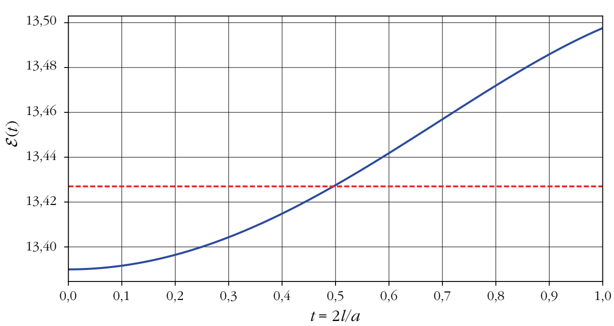
$$\mathcal{E}(t=1) = \pi\left(\frac{208}{81} + \frac{32}{25\sqrt{2}}\right) \approx 9{,}87.$$

A gömbök közt lengő inga esetén az Eötvös-tényezőnek a $t$ paramétertől való függését a *6. ábra* mutatja be. Jól látható, hogy ebben az esetben a $t$-függés igen határozott: a vizsgált intervallumban a függvény értéke több mint negyven százalékot változik.

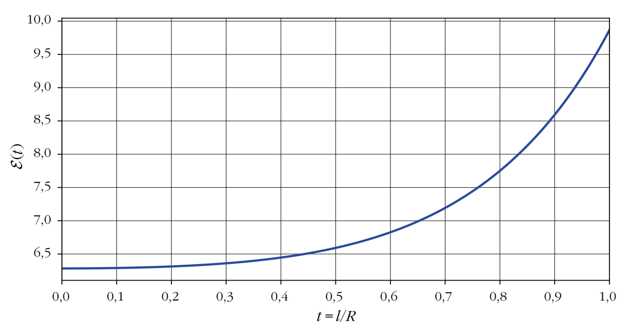
Megtaláltuk tehát annak a magyarázatát, miért tért át Eötvös a gömbökkel végzett kezdeti kísérletek után a szögletes alakú ólomtömbökre. Az itt bemutatotthoz hasonló számításokkal valószínűleg előzetesen megvizsgálta, hogy a kísérlet eredményét mennyire befolyásolják az általa nehezen kontrollálható paraméterek. Az ingarúd hossza nincs pontosan definiálva, hiszen a végére erősített golyók sem pontszerűek. Ha nem sikerül a torziós szálat hajszálpontosan a vonzó testek közti légrés közepére helyezni, az is hasonló hatással jár, mintha a rúd hossza módosulna. Két vonzó gömb közt lengő inga esetén ez a kísérleti bizonytalanság igen nagy, akár tíz százalékos hibát is eredményezett volna a gravitációs állandó értékére vonatkozó végeredményben. Ha viszont derékszögű hasábokat használ a gravitációs tér forrásául, akkor az ingahossz bizonytalansága csak egy százaléknál kisebb hibát okoz. Ezért úgy gondolhatta, hogy érdemes a kísérletet derékszögű geometriával elvégezni (vállalva persze a hasábok gravitációs terének elméleti kiszámításával járó bonyodalmakat).

Mivel úgy éreztük, jó nyomon járunk Eötvös gondolatainak rekonstruálásában, megvizsgáltuk az Eötvös-tényező függését a kísérlet többi paraméterétől is. Korábban már láttuk a trükköt: a számítások egyszerűsítése érdekében lényeges, hogy a két ólomtömb közti hiányzó légrés négyzet alapú legyen (nevezzük a négyzet élét $a$-nak, ez lesz tehát a hasábok közti távolság és a hasábok $y$ irányú szélessége). Szabadon változtatható paraméter viszont a hasábok $x$ irányú $b$ hosszúsága és $z$ irányú $c$ magassága, valamint az inga lengési síkjának függőleges $h$ távolsága a hasábok szimmetriasíkjától. Ha mindezeket az adatokat szabad változónak tekintjük, és megismételjük a cikkben leírt számításokat, megkaphatjuk az $\mathcal{E}(l, h, a, b, c)$ függvényt. A vonatkozó ábrákat és bonyolult képleteket nem mutatjuk be, csak kvalitatív beszámolót adunk.

Ha az inga síkját $h$ magasságra eltávolítjuk a hasábok $z = 0$ középsíkjától, az Eötvös-tényező rohamosan csökkenni kezd, az effektus egyre nehezebben lesz mérhető. Optimális tehát a $h = 0$ érték, amit Eötvös választott. Ha a hasábok $b$ hosszával és $c$ magasságával egyaránt a végtelenbe tartunk, akkor az Eötvös-tényező (az arctg függvényeknek köszönhetően) $8\pi$-hez közeledik. Ez éppen az az elméleti érték, amelyet Eötvös és követői a mérést bemutató gondolatkísérlet elemzésével kaptak. Ha a $b/a$ és $c/a$ paramétereket egynél kisebbnek választjuk, azaz a hasábok keskenyek és laposak lesznek, akkor az Eötvös-tényező csökken, az $l$




*5. ábra.* Az Eötvös-tényező függése a torziós inga rúdjának normált hosszától a hasábok közt lengő inga esetében




*6. ábra.* Az Eötvös-tényező függése az ingarúd hosszától a két $R$ sugarú gömb gravitációs terében lengő inga esetében paraméterre mutatott érzékenység viszont növekszik. Nem szabad tehát túl keskeny vagy túl lapos hasábokat használni. Az Eötvös-tényező *b*- és *c*-függésének vizsgálata azonban arra is rámutat, hogy nem érdemes túl nagy értékeket sem választani: az Eötvös-tényező *b* és *c* függvényében eleinte gyorsan nő, később viszont csak egyre lassabban közeledik a végtelenbeli $8\pi$ értékhez. Egy kísérleti szakember ilyenkor kompromisszumot köt az elméleti követelmények és a kísérleti lehetőségek (pl. a rendelkezésére álló ólomtéglák mennyisége vagy a laborasztal teherbíró képessége) között. Eötvös ezt tette: akkora *b* és *c* értékeket választott, amelyeknél az Eötvös-tényező már elég nagy, de csak aránytalanul sok további ólomtégla beépítésével lenne jelentősen növelhető. Így jutott el a $b/a = 1$ és $c/a = 2$ értékekhez, amelyek a [9] cikkben és a *2. ábrán* láthatók: $a = b = 30$ cm, $c = 60$ cm.

Láthatjuk tehát, hogy Eötvös a kísérlet minden (az utólagos olvasó számára véletlenszerűnek tűnő) paraméterét részletes előzetes számítások és gondos optimalizálás után állapította meg.

## Az Eötvös-tényező értéke

Már csak egy kérdés maradt: honnan kapta Eötvös az (1) képletben szereplő számértéket?

Nézzük meg ismét az *5. ábrát*! A $t = 2l/a$ paraméter 0 és 1 között változhat. Szemeljük ki az intervallum közepét, a $t = 1/2$ értéket! Ekkor az inga rúdja éppen félig tölti ki a két ólomhasáb közti üres teret. Számítsuk ki a (21) képlet alapján az Eötvös-tényezőt a *t* paraméter $t = 1/2$ értékénél! Az alábbi csodálatos kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = 4\Bigg[ & \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{15\sqrt{5}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3\sqrt{53}}\right) \\ & - \operatorname{arctg}\left(\frac{24}{\sqrt{53}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{61}}\right) + 3\operatorname{arctg}\left(\frac{8}{\sqrt{61}}\right) \\ & - 7\operatorname{arctg}\left(\frac{8}{7\sqrt{69}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{14}{\sqrt{69}}\right) - 4\operatorname{arth}\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \\ & - 2\operatorname{arth}\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) + 6\operatorname{arth}\left(\frac{4}{\sqrt{53}}\right) + 4\operatorname{arth}\left(\frac{6}{\sqrt{53}}\right) \\ & - 6\operatorname{arth}\left(\frac{4}{\sqrt{61}}\right) - 4\operatorname{arth}\left(\frac{6}{\sqrt{61}}\right) + 4\operatorname{arth}\left(\frac{2}{\sqrt{69}}\right) \\ & + 2\operatorname{arth}\left(\frac{4}{\sqrt{69}}\right)\Bigg] = 13{,}427546. \end{aligned} \tag{23}$$

Az *5. ábrán* a vízszintes szaggatott (színes ábrán piros) vonal mutatja a $t = 1/2$-hez tartozó függvényértéket. A kifejezés most kapott egzakt értéke három tizedesjegyre megegyezik az Eötvös által közölt számmal!

## Összefoglalás

Megkaptuk tehát az Eötvös-tényező numerikus értékét. És most már válaszolhatunk a cikk elején feltett kérdéseinkre is:

1. Eötvös igen nagy valószínűséggel a most ismertetett számolást követve, egy átlagos ingahosszt feltételezve, a (23) formula értékét kiszámítva jutott az általa közölt számhoz. Meg kell jegyeznünk, hogy bár az ábrák előállításához számítógépet és a *Mathematica* szimbolikus programot használtuk, a cikkben szereplő valamennyi számítást hagyományos módon, „kézzel”, azaz az Eötvös idejében rendelkezésre álló eszközökkel is elvégeztük. Ezzel egyebek között azt akartuk bizonyítani, hogy kellő türelemmel maga Eötvös (vagy valamelyik munkatársa, tanítványa) is megbírkózhatott a 48 tagú kifejezések és származékaik kiértékelésének sziszifuszi feladatával. A cikk írása közben felbukkant apró érdekességeket megismerve egyre inkább az a meggyőződésünk, hogy ez valóban így is történt.
2. Mivel az *5. ábrán* látható függvénygörbe szerint az Eötvös-tényező értéke csak igen kevéssé függ az ingarúd $2l$ hosszától, Eötvös az „Előleges jelentés”-ben nem akarta pontosítani a kísérletileg használt rúdhossz értékét, ez az elért mérési pontosság mellett nem is volt szükséges. Ha elkészült volna a későbbre ígért részletes kísérleti beszámoló, abban valószínűleg további adatok (pl. a rúdhossz mellett a golyók tömege, a használt ólomtéglák pontos sűrűsége stb.) is szerepeltek volna.
3. Eötvös az általunk feltételezett számításokat valószínűleg még a kísérlet tervezésének fázisában végezte el. Ekkor még úgy gondolta, hogy a kísérlet (többi méréséhez hasonlóan) egy-két nagyságrenddel pontosabb lesz a később ténylegesen megvalósultnál. Ezért közölt a kísérlet kiértékeléséhez használandó képletben szereplő együtthatóra egy öt értékes jegyű számot. Csak később, a mérés tényleges megvalósítása során derült ki, hogy nem várt körülmények (az inga körüli légáramlás és az ólomtéglák inhomogén volta) megakadályozzák a kívánt pontosság elérését. Ez aztán valószínűleg el is vette a kedvét a kísérlet folytatásától és a leírás pontosításától.

Összefoglalásként ismét szeretnénk tisztelegni a 175 éve született Eötvös Loránd, az egyik legnagyobb magyar fizikus emléke előtt, akinek még egy apró megjegyzése és a cikkében indokolatlanul hagyott számérték mögött is ilyen sok, hosszas és aprólékos munkával kibányászható fizikai és matematikai gondolat és érdekesség rejlik.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetünket szeretnénk kifejezni Gnädig Péternek, Groma Istvánnak, Patkós Andrásnak, Sólyom Jenőnek,

Szabó Zoltánnak, Szarka Lászlónak, Tóth Gyulának, Ván Péternek és Völgyesi Lajosnak a kézirat olvasása után javasolt hasznos tanácsaikért.

## Ajánlott irodalom


1. Báró Eötvös Loránd-emlékév 2019. www.eotvos100.hu
2. *Eötvös Loránd emlékalbum*, szerk.: Dobszay Tamás, Estók János, Gyáni Gábor és Patkós András, Kossuth Kiadó (2019) ISBN 978-963-09-9929-4. http://real-eod.mtak.hu/8253/1/001-176_tordelt1_magyar.pdf
3. Báró Eötvös Loránd születésének 175. évfordulója, a rendezvény honlapja: Eötvös175
4. C. Rothleitner and S. Schlamminger: Invited Review Article: Measurements of the Newtonian constant of gravitation, G. *Review of Scientific Instruments 88* (2017) 111101; https://doi.org/10.1063/1.4994619
5. Chao Xue, Jian-Ping Liu, Qing Li, Jun-Fei Wu, Shan-Qing Yang, Qi Liu, Cheng-Gang Shao, Liang-Cheng Tu1, Zhong-Kun Hu and Jun Luo: Precision measurement of the Newtonian gravitational constant. *National Science Review 7* (2020) 1803–1817. https://doi.org/10.1093/nsr/nwaa165
6. Radnai Gyula, Cserti József: Versenyfeladatok az Eötvös-inga bűvöletében – 1. rész. *Fizikai Szemle 70/11* (2020) 375–412. https://tudosnaptar.kfki.hu/VfEotvos-inga1.pdf
7. Eötvös Loránd: A nehézség és a mágneses erő nivófelületeinek és változásainak meghatározásáról. Az 1900-dik évi párisi physikai congressus elé terjesztett jelentés. *Math. és Phys. Lapok IX* (1900) 361–385. http://real-j.mtak.hu/7286/1/MTA_MatematikaiEsPhysikaiLapok_09.pdf#page=369
8. Cserti József, Dávid Gyula: Az Eötvös-inga képletei. *Fizikai Szemle 69/7–8*(2019) 219–227. http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/08/fizszem-20190708-cserti-david_09_56_51_1567151811.4595.pdf
9. B. Eötvös Loránd: Vizsgálatok a gravitatio és a mágnesség köréből (Előleges jelentés). *Matematikai Természettudományi Értesítő, a M. Tud. Akadémia III. Osztályának folyóirata XIV* (1896) 221–266. http://real.mtak.hu/103839/1/MatEsTtudErtesito_14__pages225-270.pdf
10. Eötvös Loránd munkái és méltatása, dolgozatok és dokumentumok gyűjteménye (szerk.: Király Péter). http://tudtor.kfki.hu/eotvos1/eotvos.html
11. Three Fundamental papers of Eötvös Loránd. Zoltán Szabó (szerk.). Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, Budapest, 1998. ISBN: 9637135022. (ford.: Zoltán Szabó) https://mek.oszk.hu/21700/21757/21757.pdf
12. Bodoky Tamás, Szabó Zoltán, Baráth István: History of the Roland Eötvös Memorial Collection. *Fizikai Szemle 69/12* (2019) 403–407. http://fizikaiszemle.hu/uploads/2020/01/fizszem-201912-bodoky-szabo-barath_09_43_37_1579164217.7359.pdf
13. História – Tudósnaptár, Természettudósokhoz kapcsolódó évfordulók. https://tudosnaptar.kfki.hu/historia/index.php
14. Kovács László: Eötvös Loránd a tudós-tanár. Berzsenyi Dániel Főiskola Fizikai Tanszék, Szombathely, (2001). https://mek.oszk.hu/18300/18342/18342.pdf
15. Eötvös R., Pekár D., Fekete E.: Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik (Leipzig) 68* (1922) 11–66. angol fordítás: R. v. Eötvös, D. Pekár and E. Fekete: Contribution to the law of proportionality of inertia and gravitation. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio geologica* 7 (1963) 111–165. https://matarka.hu/cikk_list.php?fusz=137841
16. Tangl Károly: Vizsgálatok a gravitáczióról. *Mathematikai és Physikai Lapok 27* (1918) 130. https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/MTA_Konyvek_227795/?pg=114&layout=s&query=gravit%C3%A1ci%C3%B3r%C3%B3l (Fizikai oldalszám 115)
17. Péter Gábor, Deák László, Gróf Gyula, Kiss Bálint, Szondy György, Tóth Gyula, Ván Péter, Völgyesi Lajos: Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciaelv-mérések megismétlése. *Fizikai Szemle 69/4* (2019) 111–116.http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/04/fizszem-201904-peter-es-tarsai_13_48_05_1556624885.0311.pdf
18. Ortvay Rudolf nemzetközi fizikai problémamegoldó verseny, 2019. 27. feladat. Kitűzők: Radnai Gyula és Cserti József. https://ortvay.elte.hu/2019/H19.pdf
19. Radnai Gyula, Cserti József: Versenyfeladatok az Eötvös-inga bűvöletében – 2. rész. *Fizikai Szemle, 70/12* (2020) 403–412. https://epa.oszk.hu/00300/00342/00356/pdf/EPA00342_fizikai-szemle-2020-12_403-412.pdf
20. Bela G. Kolossvary: Eötvös Balance. *Am. J. Phys. 27* (1959) 336–343. https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1934847
21. F. W. Bessel: Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Bessel. *Zach's Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde XXVII* (1813) 80–85. https://zs.thulb.uni-jena.de/receive/jportal_jpvolume_00202765
22. G. Everest: An Account of the Measurement of an Arc of the Meridian between the Parallels of 18° 30' and 24° 70', Being a Continuation of the Grand Meridional Arc of India. Parnury, Allen & Co., London (1830) 93–116. https://books.google.hr/books?id=C7c5AQAAMAAJ&pg=PA93&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false
23. Cserti József, Dávid Gyula: Élet a Laposföldön. *Fizikai Szemle 72/8* (2022) 235–243. http://fizikaiszemle.hu/uploads/2022/09/fizszem-202208-cserti-david_11_41_39_1662630099.5239.pdf
24. Dr. Haáz István Béla: Kapcsolat a derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai között. *Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, Geofizikai Közlemények II/7* (1953) 55–67. http://epa.oszk.hu/02900/02941/00002/pdf/EPA02941_geofizikai_kozlemenyek_1953_02_057-066.pdf