A FIZIKA TANÍTÁSA

RELATIVISZTIKUSAN MOZGÓ ÁLLÓHULLÁM

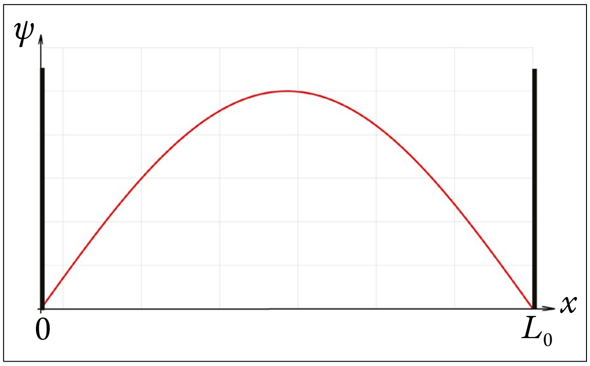
Sükösd Csaba[1], Bokor Nándor[2]
[1]BME Nukleáris Technikai Intézet
[2]BME Fizikai Intézet

Bevezető keretjáték

Miután Pistikééék az előző fizikaórán a relativitáselmélet néhány alapösszefüggéséről tanultak, Pistike jelentkezik, hogy ő végiggondolt egy egyszerű esetet, és levezette, hogy milyen szépen minden összevág. A tanár úr engedélyével Pistike a következő egyszerű példát mutatja be:

Tekintsünk egy dobozba zárt részecskét! Ahogy tanultuk, a részecske hullámfüggvénye alapállapotban olyan, hogy a dobozba (minden irányban) egy fél hullám fér csak be. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk most csak az egydimenziós esetet *(1. ábra)*. A részecske hullámhossza tehát: $\lambda = 2L_0$, ahol L_0 az egydimenziós doboz mérete. A részecske lendületének abszolút értéke a de-Broglie-összefüggés alapján pedig

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}\left(= \frac{h}{2L_0}\right).$$



1. ábra.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a részecske nyugalmi tömege nulla, azaz a részecske energiája

$$E_0 = h \cdot f_0 = p_0 \cdot c = \frac{h}{\lambda_0} c.$$

Vizsgáljuk ezt az egyszerű rendszert most egy olyan koordináta-rendszerből, amelyben a doboz v sebességgel mozog a doboz hossztengelyével párhuzamosan. Számoljuk ki, hogy mekkora lesz ebben a rendszerben a dobozba zárt részecske energiája!

A múlt órán tanultak értelmében a mozgó rendszerből nézve a doboz Lorentz-kontrakciót szenved, ezért a hossza $L' = L_0\sqrt{1-\beta^2}$ lesz (ahol $\beta = v/c$). Emiatt az állóhullám hullámhossza is meg kell rövidüljön, hiszen az állóhullámnak továbbra is csomópontjai kell legyenek a doboz oldalainál: $\lambda' = 2L' = \lambda_0\sqrt{1-\beta^2}$.

Ebből következően ebből a rendszerből a megfigyelő úgy látja, hogy a részecske lendületének abszolút értéke:

$$p' = \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{\lambda_0\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{p_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

A részecske nyugalmi tömege invariáns, ezért az ebben a rendszerben is nulla, vagyis a részecske energiája:

$$E' = p' \cdot c = \frac{h}{\lambda_0} c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = h \cdot f'.,$$

azaz $E' = \dfrac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Vagyis, visszakaptuk az energia transzformációs képletét, amit ugyancsak a múlt órán tanultunk – mondja Pistike büszkén.

A tanár úr már éppen megdicsérné Pistikét, amikor az első padból Steinmann (lásd Karinthynál) jelentkezik. Hibás az érvelésed Pistike – mondja Steinmann. Az állóhullám egy oda- és egy visszafelé haladó hullám összege. Márpedig a mozgó koordináta-rendszerből nézve az egyik hullámmal szembe megyünk, a másikkal pedig egy irányba! Ezért az egyiket kékeltolódottnak, a másikat pedig vöröseltolódottnak kell látni (Doppler-hatás)! Emiatt a mozgó rendszerből nézve az állóhullámnak nem lehet egyetlen – megrövidült – hullámhosszt, következésképpen egyetlen lendületet, sőt energiát sem tulajdonítani! A levezetésed hibás – még ha látszólag helyes eredmény jött is ki! Steinmann szövege után csönd lett az osztályban, a tanulók tanácstalanul néztek egymásra...

Nézzük meg kissé részletesebben, hogy is van ez! A vizsgálatot három lépésben tesszük meg:

a) A nyugalmi koordináta-rendszerben vizsgáljuk az állóhullám függvényének alakját, és ezeket felbontjuk két haladó hullám összegére.
b) Ezeket a komponenseket vetjük alá Lorentz-transzformációnak, majd összegezzük őket.
c) Dobozba zárt részecske-állóhullám komponenseinek téridődiagramjait vizsgáljuk.

a) Nyugalmi koordináta-rendszer, állóhullám függvényalakban

A doboz saját (nyugalmi) koordináta-rendszerében könynyen fel tudjuk írni az állóhullám kitérésének függvényét[1]:

$$\psi(x,t) = A \cdot \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \cdot \exp(i\omega t).$$

Bevezetve a $k = 2\pi/\lambda$ hullámszámot, kapjuk:

$$\psi(x,t) = A \cdot \sin(kx) \cdot \exp(i\omega t).$$

Tudva, hogy $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i)$, a fenti állóhullám átírható:

[1] Itt most a kvantummechanikai komplex formalizmust használjuk, de a levezetéseket ugyanúgy meg lehet tenni akkor is, ha a középiskolában szokásos, komplex számokat „elkerülő" $\psi(x,t) = A \cdot \sin(2\pi x/\lambda) \cdot \cos(\omega t)$ képletből indulunk ki.

Sükösd Csaba (1947) a BME címzetes egyetemi tanára, az ELFT elnökségi tagja. Kísérleti magfizikus, aki kísérleti munkáját nagyrészt külföldi kutatóintézetekben végezte. Kutatási területe a magreakciók, óriásrezonanciák és némely asztrofizikailag releváns magreakció vizsgálata radioaktív ionnyalábokkal. Marx György tanítványaként részt vett az MTA oktatási kísérletében a 70-es években. Azóta is szoros kapcsolata van a fizikatanárok közösségével, több tanár- és oktatással kapcsolatos program vezetője.

Bokor Nándor egyetemi docens a BME-n szerzett villamosmérnök-diplomát 1993-ban, majd ugyanott fizikából PhD-fokozatot 1999-ben. Munkájában – az optika számos területén végzett kutatásai mellett – legszívesebben a fizika, azon belül kiemelten a relativitáselmélet oktatásának pedagógiai kérdéseivel foglalkozik. Ez utóbbi témában számos publikációja jelent meg a *Fizikai Szemlé*ben, valamint a *Physics Education* és a *European Journal of Physics* folyóiratokban.

$$\psi(x,t) = A\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \cdot e^{i\omega t}$$
$$= \frac{A}{2i}\{\exp[i(kx+\omega t)] - \exp[-i(kx-\omega t)]\}.$$

Ez még persze egy végtelen kiterjedésű állóhullám; ahhoz hogy a feladatnak megfelelő legyen, ki kell kötnünk, hogy az állóhullám csak a doboz tartományán belül marad: $0 \le x \le L_0$. Ennek figyelembe vételével kell normálni az állapotfüggvényt, azaz meghatározni az A értékét úgy, hogy

$$\int_0^{L_0} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 1$$

legyen.

Kihasználva azt, hogy a részecske teljesen relativisztikus, azaz

$$E = p \cdot c \Rightarrow \frac{h}{2\pi}\omega = \frac{h}{\lambda} \cdot c \Rightarrow \omega = k \cdot c,$$

és behelyettesítve a $k = \omega/c$ összefüggést a fenti egyenletbe kapjuk

$$\psi(x,t) = \frac{A}{2i}\left\{\exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}x + \omega t\right)\right] - \exp\left[-i\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t\right)\right]\right\}$$
$$= \frac{A}{2i}\left\{\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c} + t\right)\right] - \exp\left[-i\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]\right\}.$$

Ebből a felírásból azonnal látszik, hogy az állóhullám két, egymással szemben, c sebességgel haladó, ω körfrekvenciájú hullámból tehető össze. Jelölje $\vec{\psi}(x,t)$ a jobbra haladó (normált) hullámot, $\overleftarrow{\psi}(x,t)$ pedig a balra haladót, ekkor az állóhullámot a következőképpen kapjuk:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\psi}(x,t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\overleftarrow{\psi}(x,t).$$

Az állóhullám „komponensei” mindketten ω frekvenciájúak, ezért az állóhullám energiája:

$$E = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \cdot \vec{E} + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \cdot \overleftarrow{E} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega.$$

b) Állóhullám Lorentz-transzformáltja, mozgó koordináta-rendszer

Ha áttérünk a mozgó koordináta-rendszerre, akkor az x térbeli és a t időbeli koordinátára is végre kell hajtani egy Lorentz-transzformációt! Kifejezve az eredeti x, illetve t koordinátát az új koordinátákkal kapjuk:

$$x = \frac{x' - \beta c \cdot t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{illetve} \quad t = \frac{t' - \beta \cdot (x'/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Először hajtsuk végre a legegyszerűbb összefüggésen a transzformációt, a doboz tartományán! Ez csak a helykoordinátától függ, így a $0 \le x \le L_0$ összefüggésből kapjuk:

$$0 \le \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \le L_0.$$

Az egyenlőtlenséget kicsit átrendezve adódik:

$$vt' \le x' \le vt' + L_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Ez nyilvánvalóan kifejezi, hogy az állóhullám térrésze Lorentz-kontrakciót $\left(L' = L_0\sqrt{1-\beta^2}\right)$ szenved, valamint azt is, hogy az új koordináta-rendszerben ez a térrész v sebességgel halad. Ez teljesen megfelel a fizikai várakozásunknak.

Térjünk most át a hullámfüggvény Lorentz-transzformáltjára:

$$\psi(x',t') = \frac{A'}{2i}\left\{\exp\left[i\omega\left(\frac{x'/c - \beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{t' - (\beta/c)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \exp\left[-i\omega\left(\frac{x'/c - \beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \frac{t' - (\beta/c)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\right\}.$$

Mind a két exponenst rendezzük át úgy, hogy külön gyűjtjük az új koordinátákat tartalmazó tagokat:

$$\psi(x',t') = \frac{A'}{2i}\left\{\exp\left[i\omega\left(\frac{x'}{c}\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + t'\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \exp\left[-i\omega\left(\frac{x'}{c}\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - t'\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\right\}.$$

Ezt tovább lehet egy kicsit alakítani:

$$\psi(x',t') = \frac{A'}{2i}\left\{\exp\left[i\omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(\frac{x'}{c} + t'\right)\right]\right.$$
$$\left. - \exp\left[-i\omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\left(\frac{x'}{c} - t'\right)\right]\right\}$$
$$= \frac{A'}{2i}\left\{\exp\left[i\omega_1\left(\frac{x'}{c} + t'\right)\right] - \exp\left[-i\omega_2\left(\frac{x'}{c} - t'\right)\right]\right\}.$$

(Az A' amplitúdót most is a normálási feltételből kell meghatározni.)

Azt az érdekes eredményt kaptuk, hogy ez két, egymással szemben fénysebességgel haladó hullám a mozgó koordináta-rendszerben is, de az egyiknek a frekvenciája vörösen eltolódott, a másiké viszont kékeltolódást szenved: $\omega_2 = \omega\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$.

Nagy a kísértés arra, hogy az álló rendszerhez hasonlóan a mozgó rendszerből mért energiát a következővel azonosítsuk:

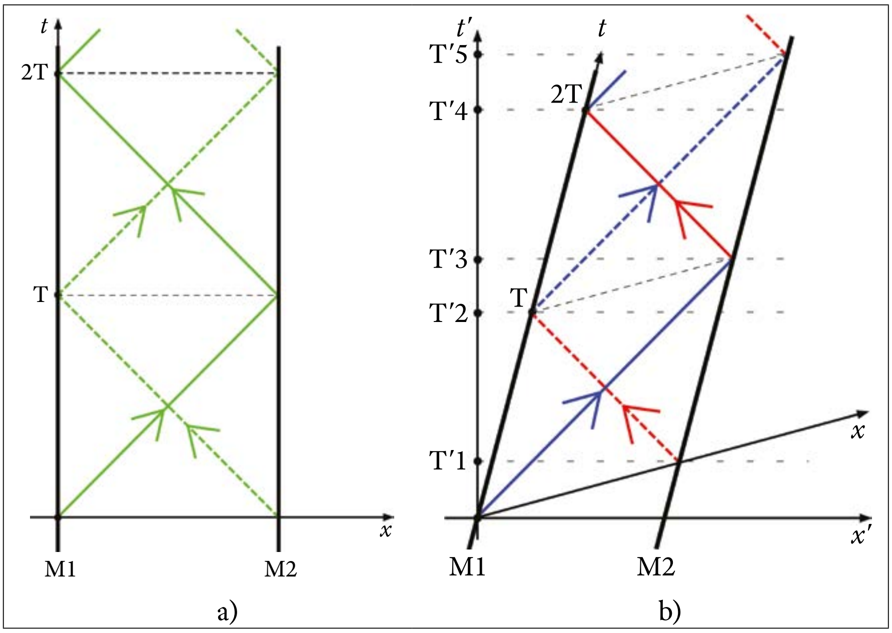
$$E' = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \hbar\omega_1 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \hbar\omega_2$$
$$= \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right).$$

A zárójelben lévő kifejezést közös nevezőre hozva kapjuk:

$$E' = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{1-\beta+1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$
$$= \hbar\omega\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ahogy annak lennie is kell a speciális relativitáselmélet szerint.

Az ember azt gondolná, hogy hátradőlhet, hiszen minden milyen szépen „kijött”. Problémába ütközünk azonban, ha megpróbáljuk a részecskék világvonalát a téridősíkon ábrázolni.



2. ábra. a) Világvonalak és egyidejűségek a doboz saját koordináta-rendszerében (K rendszer). b) Világvonalak és egyidejűségek egy mozgó koordináta-rendszerből (K′ rendszer)

c) Vizsgáljuk a dobozba zárt állóhullám-komponensek téridődiagramjait

A téridődiagramok rajzolásához a kvantummechanikai részecskék részecskeképét hívjuk segítségül. Ahogy eddig is tettük, az állóhullámot két, egymással szemben haladó, teljesen relativisztikus részecskekomponensből alkotottnak tekintjük, amelyek energiájára és lendületének abszolút értékére fennáll az $E = p{\cdot}c$ összefüggés. Ám a két komponens lendületvektorának csak az abszolút értéke egyenlő, az irányuk éppen ellentétes: $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$. Legalábbis a doboz nyugvó koordináta-rendszerében.

Azaz az ide-oda pattogó részecske-komponensek világvonalait a nyugvó és a mozgó koordináta-rendszerben a következőképpen rajzolhatjuk fel *(2. ábra)*. Mivel a részecskék mindig fénysebességgel mozognak, a világvonalaik mindkét rendszerben 45 fokos egyenesek.

A *2a. ábrán* (a K rendszerben, amelyben a doboz nyugszik) a két részecskét folytonos, illetve szaggatott vonalakkal különböztettük meg, a doboz falainak a világvonala a két függőleges vastag fekete vonal. Az egyidejűségi vonalak vízszintes szaggatott vonalak. A két részecskekomponens *egyidejűleg* indul el a doboz két falától, és egyidejűleg pattan vissza a másik oldalról. Így a merev doboznak átadott lendület (és energia) nulla. Azaz ebben a koordináta-rendszerben a megfigyelő bármely időpontban egy jobbra és egy balra haladó részecske-komponenst lát, és ezért a részecske-komponensekből alkotott rendszer energiáját a fentiek alapján mindig $E_0 = \hbar\omega$ -nak méri.

Nézzük most ezt a folyamatot egy másik – az előzőhöz képest mozgó – inerciarendszerből (*2b. ábra,* K′ rendszer)! Ebben a doboz falai jobbra mozognak (azaz maga a koordináta-rendszer az előzőhöz képest balra). A korábbi K rendszer egyidejű pontjai a K rendszer x tengelyével párhuzamos ferde vonalak lesznek, azaz ezek szerint indulnak el egyidejűleg a részecskekomponensek. Az ábrán a vörösen, illetve kéken eltolódott komponenseket a megfelelő színekkel jelöltük. A K′ rendszerben az egyidejű pontok az x' tengelylyel párhuzamos vonalak mentén helyezkednek el (ezúttal ezek lesznek vízszintesek). Az ábráról nyilvánvalóan látszik, hogy azok az események, amelyek a K rendszerben egyidejűek, nem lesznek egyidejű események a K′ rendszerben!

Ebből következően, a K′ rendszerből a megfigyelő nem mindig lát egy vörösen és egy kéken eltolódott komponenst. Például az ábrán lévő T′2 és T′3 időpontok között két jobbra haladó, kéken eltolódott komponenst lát.[2] Ha a megfigyelő ekkor mérné meg az energiát, $\hbar\omega_2$ -nek mérné, nem pedig $(1/2)\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ -nek! A részecskerendszer lendülete sem lenne nulla minden pillanatban (mint a K rendszerben), hanem „ingadozna”.

Hogyan lehet ezt fizikailag értelmezni?

A dobozban lévő állóhullám nem *zárt* rendszer, hiszen kölcsönhat a doboz falával. Az állóhullámot alkotó részecske-komponensek, amikor a doboz falának ütköznek, és a $\mathbf{p}$ lendületből $-\mathbf{p}$ lendületűre váltanak, $2\mathbf{p}$ lendületet átadnak a doboz falának (a K rendszerben). Ha a visszaverő falak nem alkotnának dobozt, hanem szabadon lebegnének, akkor az ütközések következtében a K rendszerben is elkezdenének távolodni egymástól; a kezdetben lokalizált állóhullám szétfolyna, és az állóhullám-komponensek frekvenciái egyre jobban a vörös felé tolódnának el. Egy tökéletesen merev doboznál[3] azonban, ha a másik részecske-komponens a doboz

[2] Ez azt jelenti, hogy hibás az a feltételezés, miszerint a K′ rendszerben az állapotfüggvény a következőképpen állítható elő:

$$\psi(x',t') = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{\text{vörös}}(x',t') + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{\text{kék}}(x',t') \;!$$

A helyes felírás a következő lenne:

$$\psi(x',t') = a^{\text{vörös}}(t')\cdot\psi^{\text{vörös}}(x',t') + a^{\text{kék}}(t')\psi^{\text{kék}}(x',t')\,,$$

ahol a normálás miatt természetesen $|a^{\text{vörös}}(t')|^2 + |a^{\text{kék}}(t')|^2 = 1$ kell legyen, de a vörös és a kék komponensek aránya időfüggő.

[3] Szigorúan véve tökéletesen merev doboz nem létezik. Bármely valóságos dobozfal kicsit deformálódik, amikor egy részecske nekiütközik, és lendületet ad át. Ez a deformáció a fal anyaga által megszabott hangsebességgel tovaterjed, majd valamennyi idő múlva, valahol találkozik a doboz szemközti falából terjedő deformációval – amit az állóhullámot alkotó másik komponens ütközése hozott létre. Ezek a kis deformációs hullámok erősíthetik vagy kiolthatják egymást – az adott körülmények (geometria, hangsebesség, idő, hely stb.) függvényében.

szemközti falának $-2\mathbf{p}$ lendületet ad át *egyidejűleg,* akkor a doboz eredően 0 lendületet kap, így a K rendszerben a doboz nem vesz fel sem lendületet, sem mozgási energiát. Ezért – bár az állóhullám a K rendszerben sem alkot zárt rendszert –, a dobozzal való kölcsönhatás mégsem változtatja meg a rendszer eredő lendületét (amely nulla), és az energiát.

Más a helyzet a K′ rendszerben: itt *az ütközések egyidejűsége megszűnik,* ezért a K′ rendszerbeli megfigyelő úgy látja, hogy a részecske-komponensek hol jobbra, hol balra „lökdösik” a dobozt (pl. a T′1 pontban jobbra, a T′2 pontban balra stb). Ezért a K′ rendszerbeli megfigyelő szerint a doboznak nem állandó sem a lendülete, sem a mozgási energiája, hanem időről időre kap lendületet (és energiát) az „állóhullámtól” is. A doboz+állóhullám rendszer azonban már zárt rendszer lenne (hiszen semmi mással nem áll kölcsönhatásban), ezért az energiájára természetesen továbbra is érvényes kell legyen a speciális relativitáselmélet szerinti $E' = E_0\,[1-\beta^2]^{-1/2}$ összefüggés.

Felvetődik a kérdés, hogy ha a doboznak ilyen fontos szerepe van a K′ rendszerben, akkor vajon korábban miért jött ki a várt relativisztikus összefüggés az állóhullámra, azaz miért kaptuk azt, hogy

$$E' = \frac{1}{2}\hbar(\omega_1+\omega_2) = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,?$$

A megoldás az, hogy az egyenlet két, egymással szemben haladó, *végtelen* hullámot ír le! (A dobozba szorítottság csak az állapotfüggvény normálására – az A értékére – volt hatással). Az eredő is *végtelen* kiterjedésű állóhullám lesz, amelynek a K rendszerben csomópontjai vannak az $x = \pm n\cdot L$ (n = 0, 1, 2, ...) helyeken. Ez a végtelen kiterjedésű állóhullám is *zárt* rendszer, hiszen nincsenek olyan események – mint például fallal történő kölcsönhatás – amelyek egyidejűsége fontos lenne, és amelyek változást idéznének elő a rendszer lendületében és energiájában. A világvonaluk két 45 fokos végtelen egyenes lenne. A K rendszerben mindkettőnek azonos a frekvenciája (és energiája), a K′ rendszerben pedig az egyiké a vörös, a másiké a kék felé eltolódott a Doppler-jelenség miatt. Ezért ezek is egy zárt rendszert alkotnának (nem állnának kölcsönhatásban sem egymással sem semmi mással), és ezért a rendszer energiájának a speciális relativitáselmélet szerinti módon kell transzformálódnia. Ez így is van, ezt mutattuk meg fentebb.

A cikk arra próbált rávilágítani, hogy a relativitáselmélet még egy olyan egyszerű rendszer esetén is sok meglepetést tartogat, mint egy egydimenziós skaláris állóhullám (pl. egy relativisztikus részecske kvantummechanikai állapotfüggvénye).

Az érdeklődők a következő linken lévő szimuláción meg is nézhetik a „relativisztikus állóhullám” alakját, és kísérletezhetnek különböző sebességű koordináta-rendszerekkel: https://sukjaro.hu/SCsaba/RelHullam/

A szerzők köszönetet mondanak Hraskó Péternek a cikk eredeti verziójához tett értékes megjegyzéseiért.