

A SÚLYLÖKÉS ÉS A KALAPÁCSVETÉS VILÁGCSÚCS-RANGSORAINAK VÁLTOZÁSA, HA FIGYELEMBE VENNÉK A FÖLD FORGÁSÁT ÉS AZ ATLÉTÁK MAGASSÁGÁT

Horváth Gábor[@], Hegedűs Dénes Zsolt, Slíz-Balogh Judit
ELTE Biológiai Fizika Tanszék, Budapest
[@]E-mail: gh@arago.elte.hu

A súlylökés és a kalapácsvetés dobótávjainak egymást követő világcúcsai közti különbség tendenciózusan csökken, mivel a sportolók teljesítőképessége közelít egy felső határhoz. Emiatt napjainkban már érdemes lenne figyelembe venni olyan környezeti tényezők dobótávra kifejtett hatásait, mint a szélesebbesség, a tengerszint fölötti magasság, a légnyomás, a lég hőmérséklet, a dobópálya ferdesége és földrajzi szélessége, valamint a dobás égtáj szerinti azimutiránya. Az utóbbi kettő a Föld forgásából eredő centrifugális és Coriolis-gyorsuláson keresztül fejti ki hatását a dobótávra. Cikkünk célja annak számítógépes modellezéssel való kiderítése, hogy ha a centrifugális és Coriolis-gyorsulást, valamint a sportolók testmagasságát is figyelembe vették volna a kültéri női és férfi súlylökés és kalapácsvetés világcúcsainak hitelesítésekor, akkor miként változtak volna a világcúcsrangorszámok [Hegedűs 2022, Horváth és társai 2023]. Számítógépes modellezéssel rekonstruáljuk a súlygolyók és kalapácsok világcúcsokkori kezdősebességeit, majd meghatározzuk, hogy a súlylökés és kalapácsvetés világcúcsrangorszámjai miként változnának, ha figyelembe vennék a centrifugális és Coriolis-gyorsulás, valamint a testmagasság dobótávra kifejtett hatásait.

1. A Föld gyorsuló koordináta-rendszere és a dobósportok

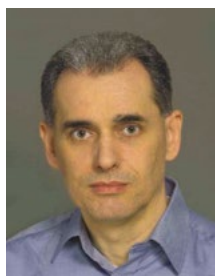
A négy olimpiai dobósportág – súlylökés, kalapácsvetés, diszkoszvetés, gerelyhajítás [White 2011] – közül cikkünkben csak a súlylökés és a kalapácsvetés fizikájával foglalkozunk. Egy $\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ lineárisan gyorsuló és a t időben változó $\boldsymbol{\omega}(t)$ szögsebességvektorú forgást végző rendszerben – mint például a Föld – eldobott m tömegű

súlygolyó vagy kalapács Newton II. törvénye szerinti mozgásegyenletében az \mathbf{F} valódi külső eredő erő által okozott \mathbf{F}/m gyorsuláson túl még a következő négy lát-szólagos tehetetlenségi gyorsulás lép fel [Landau és Lif-sic 1984]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m - \mathbf{a}_{\text{lineáris}} + \mathbf{a}_{\text{Euler}} + \mathbf{a}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{a}_{\text{centrifugális}},$$
$$\mathbf{a}_{\text{Euler}} = \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad \mathbf{a}_{\text{Coriolis}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$
$$\mathbf{a}_{\text{centrifugális}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}),$$

ahol $-\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ az $\mathbf{a}_{\text{lineáris}}$ lineáris gyorsulással ellentétes irányú tehetetlenségi gyorsulás, $\mathbf{a}_{\text{Euler}} = (\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})$ az $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ szög-gyorsulásvektor keltette Euler-gyorsulás, $\mathbf{a}_{\text{Coriolis}} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{a}_{\text{centrifugális}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ pedig az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor keltette Coriolis- és centrifugális gyorsulás.

Mizera és Horváth [2000, 2002], Horváth [2001, 2009], valamint Jánosi és Bántay [2002] vizsgálták a centrifugális és Coriolis-gyorsulásnak a súlylökés és a kalapácsvetés dobótávjait csökkentő vagy növelő hatásait a forgó és keringő Földön, a Föld lineáris gyorsulását (azaz a földfelszíni árapályt) és Euler-gyorsulását elhanyagolva a gravitációs, centrifugális és Coriolis-gyorsuláshoz, valamint a légellenállás miatti lassuláshoz képest. Pálfi [2021], valamint Pálfi és társai [2022] a csillagászati és geofizikai szakirodalom [Brosche és Sünder-



Horváth Gábor az ELTE-n végzett fizikus, az MTA doktora, az ELTE Biológiai Fizika Tanszék egyetemi tanára, az ELTE Környezetoptika Laboratórium és a HUN-REN-ELTE Asztropolarimetria Kutatócsoport vezetője. A vizuális környezet optikai sajátágaival, az állatok polarizációérzékelésével foglalkozik, valamint fotobiofizikai, biomechanikai, égi mechanikai és asztropolarimetria kutatásokat végez. Polarimetria expedíciókon vett részt az Északi-sarkon, a finn Lappföldön, az Atlanti-óceánon, valamint a tunéziai és namíbiai sivatagokban. Számos szakmai díj és kitüntetés tulajdonosa. Több angol és magyar (szak-, tan-) könyv, valamint számos tudományos szerzői cikk szerzője, rendszeresen tart ismeretterjesztő előadásokat, főleg iskolákban.



Hegedűs Dénes Zsolt az ELTE-n szerzett fizikus-diplomát. „A kültéri felnőtt férfi és női súlylökés és kalapácsvetés világcúcsrangsorainak változásai a Föld forgása miatti centrifugális gyorsulás és a testmagasság dobótávra kifejtett hatásainak figyelembevételével” című szakdolgozatát Horváth Gábor témavezetésével írta. Jelenleg Budapesten dolgozik, ahol a Ceva-Phylaxia Vakcinagyártó Zrt. Minőség-ellenőrzési Osztályán állatkísérletek lebonyolításával és kiértékelésével foglalkozik.



Slíz-Balogh Judit a BME-n végzett matematikus-mérnökként, majd menedzserként dolgozott a Graphisoft SE szoftverfejlesztő cégnél. Azután az ELTE-n szerzett csillagászdiplomát, majd ott doktorált a Fizika Doktori Iskola Rézszeckszefizika és csillagászat programjában. Fő kutatási területe az égi mechanika, azon belül a Naprendszer Lagrange-pontjainak kaotikus dinamikája és képkalkoló polarimetriája. Jelenleg a HUN-REN-ELTE Asztropolarimetria Kutatócsoport tagja.

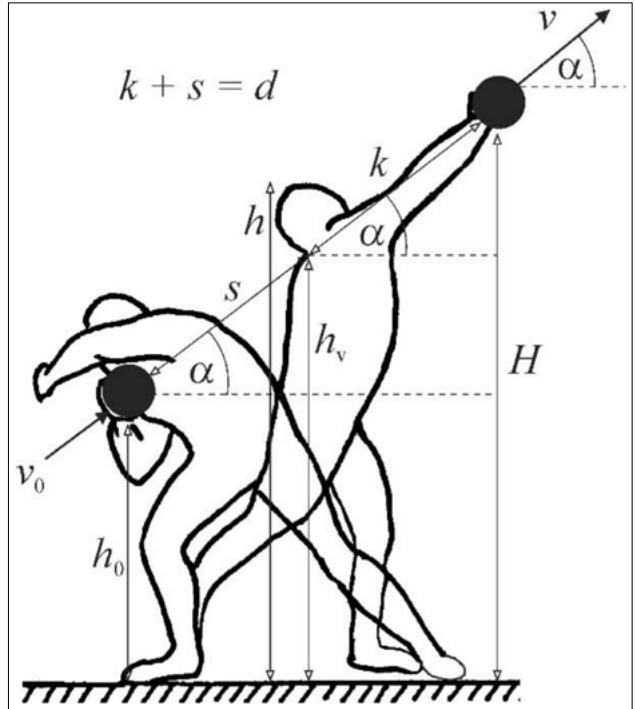
mann 1978, Scrutton 1978, Marik 1989, Horváth 1991, Völgyesi 2013, Varga 2014] áttekintésével a Föld (1)-beli négy tehetetlenségi gyorsulását számszerűen becsülték meg és állították nagyságrendi sorrendbe azért, hogy kiderüljön, melyiküknek érdemes figyelembe venni a forgó és keringő Föld felszínén lezajló dobósportversenyek dobótávjaira gyakorolt hatását, és melyiküké hanyagolható el. Arra jutottak, hogy a Galaxis, a Nap és a Hold keltette árapály, valamint a Föld szögsebességvektorának időbeli változása (általános precesszió, luniszoláris precesszió, planetáris precessziókori nutáció, forgásslassulás) miatti gyorsulások a $g \approx 9,832 \text{ m/s}^2$ fölfelszíni Newton-féle gravitációs gyorsulásnak nagyságrendileg csak a 10^{-6} – 10^{-25} -nyi hányadát teszik ki, miáltal elhanyagolhatók. Ugyanakkor a centrifugális és a Coriolis-gyorsulás nagyságrendben 10^{-3} és 10^{-4} -szerese g -nek; ezeket már érdemes figyelembe venni a dobósportok dobótávjainak hitelesítésében. A kalapácsvetés és a súlylökés dobótávjait a centrifugális gyorsulás deciméteres, illetve centiméteres nagyságrendben képes változtatni, míg a Coriolis-gyorsulás centiméteres, illetve milliméteres nagyságrendben [Mizera és Horváth 2000, 2002, Horváth 2004, 2009, Jánosi és Bántay 2002].

Habár az ellökött, elvetett súly és kalapács H kezdőmagassága triviálisan befolyásolja az L dobótávot (L nő vagy csökken H növekedésével vagy csökkenésével adott kezdőszög és kezdősebesség mellett), a jelen vizsgálatunk elsőként bizonyítja, hogy a súlylökés és a kalapácsvetés jónéhány világcsúcsának rangsorszáma megváltozna, ha az atléták magasságának, valamint a centrifugális és Coriolis-gyorsulásoknak a hatásait figyelembe vennék. Azt is kiderítjük, hogy e három tényező közül mikor melyik a leginkább felelős egy adott változásért.

2. A súlylökés és a kalapácsvetés kezdőmagasságai és kezdőszögei

A felnőtt női és férfi súlylökés és kalapácsvetés 20–20 legjobb kültéri világcsúcsát elérő atléták h testmagasságát nyilvános internetforrásokból gyűjtöttük össze. Egyedül Terence Hillary Albritton észak-amerikai súlylökő magassága nem volt így módon elérhető. Az ő $h = 1,94 \text{ m}$ magasságát egy vele készült interjúból [Jordan 1977] derítettük ki.

Az 1. ábra szerint a súlylökés H kezdőmagassága a következőképpen számolható: $H_{\text{súlylökés}} = h_v + k \cdot \sin \alpha$, ahol h_v a sportoló vállmagassága, k a karhossza, α pedig a súlygolyó kezdőszöge. h_v és k egyéni értékei azonban sajnos nem ismertek, ellentétben a súlylökők h testmagasságával. Ha elfogadjuk azt a logikus föltételezést, hogy az emberek testrészeinek hossza (esetünkben h_v és k) egyenesen arányos a h magasságukkal, akkor a súlylökők h egyéni magasságának és h^* átlagmagasságának ismeretében h_v és k így becsülhető: $h_v = h_v^* h/h^*$, $k = k^* h/h^*$, ahol h_v^* és k^* az átlagos vállmagasság és átlagos karhossz. Így módon a súlylökés kezdőmagassága:



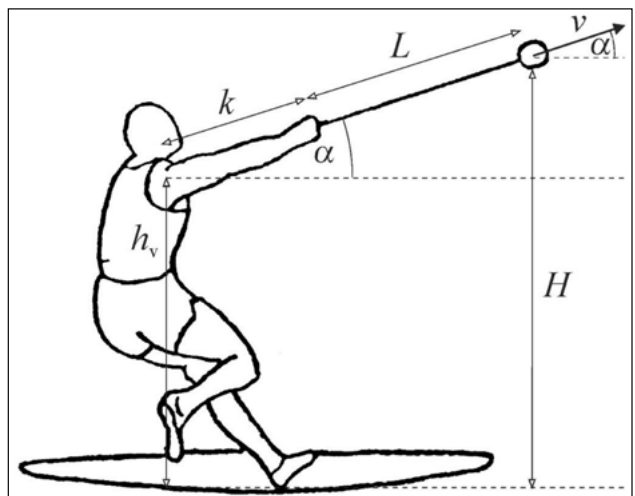
1. ábra. A súlylökés $H_{\text{súlylökés}}$ kezdőmagasságának és a súlylökő W munkájának számításához. A súlylökő a súlygolyó végső gyorsításakor jó közelítéssel egy $d = k + s$ hosszúságú egyenes szakaszon végez W munkát a gravitáció ellenében, a golyó mozgási energiájának növelése céljából

$$H_{\text{súlylökés}} = h_v + k \cdot \sin \alpha = h_v^* h/h^* + (k^* h/h^*) \sin \alpha = (h_v^* + k^* \sin \alpha) h/h^*$$

A 2. ábra szerint hasonlóan adódik a kalapácsvetés kezdőmagasságára:

$$H_{\text{kalapácsvetés}} = h_v + (k + L) \sin \alpha = h_v^* h/h^* + (k^* h/h^* + L) \sin \alpha,$$

ahol L a kalapács drótjának és fogantyújának összhossza. A gond csak az, hogy gyakorlatilag kideríthetetlenek a súlylökők és kalapácsvetők vállmagasságának és kar-



2. ábra. A kalapácsvetés $H_{\text{kalapácsvetés}}$ kezdőmagasságának számításához

hosszának h_v^* és k^* átlagai. Ily módon az egyéni H kezdőmagasságokat más módon kell becsülnünk.

Megede és Hymans [1991] szerint a férfi súlylökés és kalapácsvetés esetén a lökések, vetések a következő átlagos kezdőmagasságokból történnek:

$$H_{\text{férfi súlylökés}}^* = 2,250 \text{ m}, \quad H_{\text{férfi kalapácsvetés}}^* = 1,800 \text{ m}. \quad (2)$$

A súlylökő és kalapácsvető nőknél a súlygolyó és a kalapács $H_{\text{női súlylökés}}^*$ és $H_{\text{női kalapácsvetés}}^*$ átlagos kezdőmagasságaira csak ritkán és kis létszámon végzett mérések történtek [Linthorne 2001, Konz és Hunter 2015]. Ezért a férfi és nő súlylökők és kalapácsvetők $h_{\text{férfi súlylökés}}^*$, $h_{\text{férfi kalapácsvetés}}^*$, $h_{\text{női súlylökés}}^*$, $h_{\text{női kalapácsvetés}}^*$ átlagos testmagasságainak ismeretében a nők sportszerének átlagos $H_{\text{női súlylökés}}^*$ és $H_{\text{női kalapácsvetés}}^*$ kezdőmagasságát úgy becsüljük, hogy a férfiakra jellemző $H_{\text{férfi}}^*$ kezdőmagasságból kivonjuk a férfiak $h_{\text{férfi}}^*$ átlagos testmagasságának és a nők $h_{\text{női}}^*$ átlagos testmagasságának a különbségét:

$$H_{\text{női}}^* = H_{\text{férfi}}^* - (h_{\text{férfi}}^* - h_{\text{női}}^*) = H_{\text{férfi}}^* - h_{\text{férfi}}^* + h_{\text{női}}^*. \quad (3)$$

Az ellökött, elvetett súlygolyó és kalapács H kezdőmagassága nyilván egyenes arányban áll a sportoló h testmagasságával úgy, hogy h növekedésével $H(h)$ is monoton nő. H egyéni értékei ismeretlenek, valamint csak a (2) és (3) szerinti sportág- és nemfüggő H^* átlagmagasság ismert (becsült), ezért az egyéni H_i magasság úgy becsülhető, hogy H_i annival nagyobb vagy kisebb H^* -nál, amennyivel az egyéni h_i testmagasság nagyobb vagy kisebb a sportolók sportág- és nemfüggő testmagasságának h^* átlagánál¹:

$$H_i(h_i) = H^* + h_i - h^*. \quad (4)$$

(3) és (4) felhasználásával kapjuk a sportszer sportág- és nemfüggő kezdőmagasságát:

$$\begin{aligned} H_{i,\text{férfi}}(h_{i,\text{férfi}}) &= H_{\text{férfi}}^* + h_{i,\text{férfi}} - h_{\text{férfi}}^*, \\ H_{i,\text{női}}(h_{i,\text{női}}) &= (H_{\text{férfi}}^* - h_{\text{férfi}}^* + h_{\text{női}}^*) \\ &+ h_{i,\text{női}} - h_{\text{női}}^* = H_{\text{férfi}}^* + h_{i,\text{női}} - h_{\text{férfi}}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Az 1–4. táblázat alapján és (3) használatával a férfi és női súlylökés 20 legnagyobb világcsúcsára vonatkozó átlagos adatok a következők:

$$\begin{aligned} H_{\text{férfi súlylökés}}^* &= 2,250 \text{ m}, & H_{\text{férfi kalapácsvetés}}^* &= 1,800 \text{ m}, \\ h_{\text{férfi súlylökés}}^* &= 1,941 \text{ m}, & h_{\text{női súlylökés}}^* &= 1,782 \text{ m}, \\ h_{\text{férfi kalapácsvetés}}^* &= 1,872 \text{ m}, & h_{\text{női kalapácsvetés}}^* &= 1,758 \text{ m}, \\ H_{\text{női súlylökés}}^* &= 2,091 \text{ m}, & H_{\text{női kalapácsvetés}}^* &= 1,686 \text{ m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Vegyük észre, hogy mivel a sportolók k egyéni és k^* átlagos karhossza egyaránt ismeretlen, a H kezdőmagasság (3), (4) és (5) szerinti becslésekor kénytelenek voltunk azon föltételezéssel élni, hogy k egy, a h test-

¹ A kezdőmagasság majdnem 90%-át a testmagasság adja ki, és ez – férfiakat-nőket egyben tekintve – egy nagyjából 25 cm-es tartományban változik, ezért a kezdőmagasság testmagasság-különbséggel való egyszerűsített egyéni korrigálása a számításainkban elhanyagolható hibát jelent.

magasságtól független konstans. Ezzel azonban csak elhanyagolható hibát követünk el, mert a k csekély (néhány cm-es) egyéni különbségei sokkal kisebb mértékben – súlylökéskor $ksina$ járulékkal, kalapácsvetéskor pedig $(k + L)sina$ többlettel – járulnak hozzá a $H_{\text{súlylökés}}^* = h_v + ksina$ és $H_{\text{kalapácsvetés}}^* = h_v + (k + L)sina$ kezdőmagassághoz, mint a jóval nagyobb h_v vállmagasság (1. és 2. ábra), ráadásul a konstans karhosszúság és az egyéni kezdőmagasság testmagasság-különbséggel való korrekciója között is részbeni hibakioltás áll fenn.

A súlylökés és a kalapácsvetés leghosszabb dobótávjait a vízszintestől mért következő ideális kezdőszögek biztosítják [Megede és Hymans 1991, Linthorne 2001, Horváth 2009]:

$$\alpha_{\text{súlygolyó}} = 37^\circ, \quad \alpha_{\text{kalapács}} = 44^\circ. \quad (7)$$

Habár az atléták mindig próbálják tartani ezen ideális α értékeket, dobáskor gyakran kisebb-nagyobb mértékben eltérnek tőlük. Mivel az általunk vizsgált 80 világcsúcs tényleges α értékei ismeretlenek, és lehetetlen rekonstruálni őket, a modellünkben szükségszerűen állandónak és ideálisnak vettük azokat.

3. A földfelszíni nehézségi gyorsulás Cassini-formulája

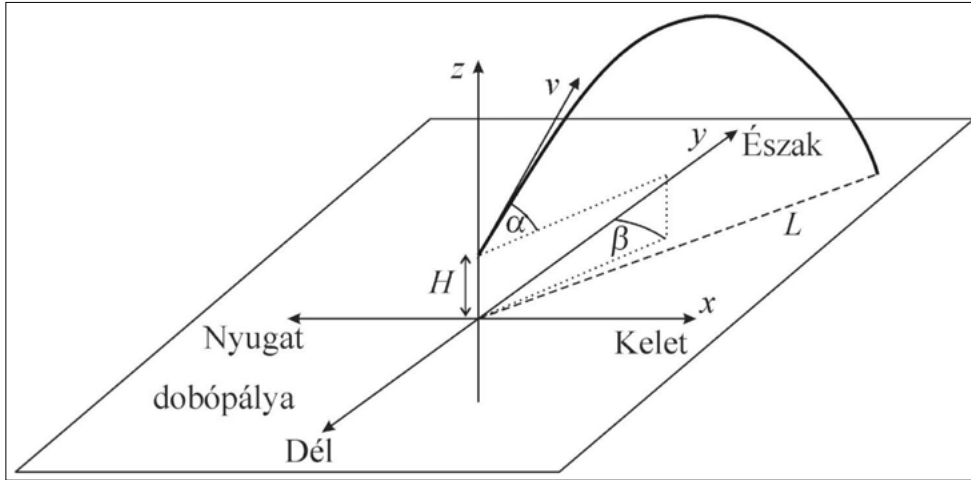
A forgó Föld a centrifugális erő miatt a gömbtől kissé eltérő, leginkább forgási ellipszoidra hasonlító, geoid alakot vesz fel. A Föld átlagos felszíne úgy görbül, hogy minden pontjában merőleges a nehézségi gyorsulásra, ami két komponensből áll: a gravitációs és a centrifugális gyorsulásból. Mivel a centrifugális gyorsulás a Föld tengelyétől mért távolsággal egyenes arányban nő, nagysága a földrajzi szélességgel változik. Változik a gravitációs gyorsulás értéke is, hiszen a Föld lapultsága miatt a földfelszín tömegközépponttól mért távolsága a földrajzi szélesség függvénye. A nehézségi gyorsulás φ földrajzi szélességtől való függését a nemzetközi gravitációs formula írja le nagy pontossággal [Hinze és társai 2013]:

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= 9,780327 \cdot [1 + 0,0053024 \cdot \sin^2\varphi \\ &- 0,0000058 \cdot \sin^2(2\varphi)] \text{ m/s}^2, \end{aligned} \quad (8)$$

ami magában foglalja a forgás miatti centrifugális gyorsulást is.

4. A súlygolyó és a kalapács mozgásának számítógépes modellezése

Modellünkben a következő változókat tekintettük állandónak, mert a világcsúcsokkor konkrét értékeik ismeretlenek és utólag kideríthetetlenek: T léghőmérséklet, p légnyomás, ρ légsűrűség, α kezdőszög, szélsősebesség és dobópályaferdeség. A dobás tengerszint fölötti s magassága szintén befolyásolja az $L\{\rho[T(s), p(s)]\}$ dobótávot a $T(s)$ hőmérséklettől és $p(s)$ nyomástól függő $\rho[T(s), p(s)]$



3. ábra. A számítógépes modellezésben használt koordináta-rendszer

légsűrűség által meghatározott légellenálláson keresztül. Mivel T , p és ρ dobásokról értékei ismeretlenek, azok állandó, normál értékeit ($T = 293 \text{ K}$, $p = 101\,325 \text{ Pa}$, $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$) vettük alapul. Habár súlylökéskor a forgó és csúszó technikák kissé eltérő hatással lehetnek az L dobótávra, vizsgálatunkban ezt figyelmen kívül hagytuk, mivel utólag többnyire már kideríthetetlen, hogy melyik technikát alkalmazták a súlylökők egy adott világcsúcsuk elérésekor.

Tekintsük a 3. ábra szerint a földfelszínhez rögzített koordináta-rendszert, amiben az x tengely a földrajzi keletre, az y tengely a földrajzi északra mutat, a z tengely pedig függőlegesen fölfelé! A sportoló H magasságból dobja el a sportszert, északról az óramutató járásával egyezően mért β azimutszögben és a vízszinteshez képest α kezdőszög alatt. E koordináta-rendszerben a

$$\mathbf{v} = (v \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta, v \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta, v \cdot \sin\alpha) \quad (9)$$

kezdősebességvektorral eldobott súlygolyó vagy kalapács általános mozgásegyenlete:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \cdot \mathbf{g}(\varphi) + 2m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{kQ\rho(p,T)}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}} \right)^2 \cdot \mathbf{n}, \quad (10)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}} \right|},$$

ahol az egyes tagok jelentése a következő:

m : A sportszer tömege. A férfiak súlygolyója és kalapácsa $m_{\text{férfi}} = 7,26 \text{ kg}$ tömegű, míg a nőké $m_{\text{női}} = 4,00 \text{ kg}$, továbbá a sűrűségétől függően a férfi súlygolyó $5,5\text{--}6,5 \text{ cm}$ átmérőjű, míg a női $4,75\text{--}5,5 \text{ cm}$ [Linthorne 2001, Konz és Hunter 2015]. A kalapács a súlygolyóval egyező fémgolyó, amihez fogantyúban végződő acélkötél van rögzítve.

φ : Az Egyenlítőtől mért földrajzi szélesség szöge.

β : A dobás égtáj szerinti azimutiránya az óramutató járásával azonos irányban mérve (például $\beta = 0^\circ$: észak, $\beta = +90^\circ$: kelet, $\beta = +180^\circ$: dél).

p : légnyomás

T : léghőmérséklet

$\boldsymbol{\omega}$: A Föld szögsebességvektora, aminek nagysága $\omega = 2\pi/86\,400 \text{ s}^{-1} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, iránya a Föld forgástengelyével párhuzamos és az

Északi-sark felé mutat, komponensei pedig:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega \cdot \cos\theta, \quad \omega_z = \omega \cdot \sin\theta,$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{R_c^2}{R_s^2} \operatorname{tg}\varphi\right), \quad (11)$$

ahol θ az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor földfelszínétől mért szöge a φ földrajzi szélességen, $R_c = 6\,378\,000 \text{ m}$ a forgási ellipszoiddal közelített Föld sugara az Egyenlítőn, $R_s = 6\,357\,000 \text{ m}$ a Föld sugara a sarkokon.

$\mathbf{g}(\varphi)$: a φ földrajzi szélességen a (8) Cassini-formulával leírható $\mathbf{g}(\varphi) = [g_x = 0, g_y = 0, g_z = -g(\varphi)]$ földfelszíni nehézségi gyorsulásvektor nagysága, ami már magában foglalja a földforgás miatti centrifugális gyorsulást. A dobóversenyek helyszíneinek tengerszint fölötti magassága elhanyagolható a Föld sugarához képest, ezért a g tengerszint fölötti magasság növekedésével való kis csökkenését a továbbiakban elhanyagoljuk.

$2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \boldsymbol{\omega}$: Coriolis-gyorsulás,

$\mathbf{v}_{\text{szél}}$: a szél sebességvektora, amit a továbbiakban zérusnak veszünk, mert csak a szélcsendes meteorológiai helyzettel foglalkozunk.

$\frac{k\rho Q}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_{\text{szél}} \right)^2$: a közegellenállási erő nagysága, ahol Q a súlygolyó ($Q_{\text{súlygolyó}} = 0,0095 \text{ m}^2$, $r_{\text{súlygolyó}} = 5,5 \text{ cm}$), illetve a kalapács ($Q_{\text{kalapács}} = 0,0138 \text{ m}^2$) homlokfelülete, k a súlygolyó ($k_{\text{súlygolyó}} = 0,47$), illetve a kalapács ($k_{\text{kalapács}} = 0,7$) közegellenállási tényezője (az utóbbiban benne foglaltatik a kalapács fogantyújának és vetődrótjának légellenállása is), ρ a levegő sűrűsége, ami a p légnyomástól és T léghőmérséklettől az ideális gázként kezelt levegő állapotegyenlete szerint függ:

$$\rho = \frac{p}{BT}, \quad B = 287,05 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}. \quad (12)$$

A (10) mozgásegyenlet minden fontos környezeti hatást magában foglal. Megoldásához negyedrendű Runge-Kutta-integrátort használtunk.

5. A súlygolyó és a kalapács világcúcskori kezdősebességének rekonstrukciója

A (10) mozgásegyenlet numerikus megoldásával a súly vagy a kalapács világcúcskori v kezdősebességét a következőképpen határoztuk meg. Vettük egy adott világcúcs L dobótávértékét. 30 m/s kezdősebesség feltetelezésével (10)-et megoldva a g helyi gravitációs gyorsulás, H kezdőmagasság, α kezdőszög, β azimutuszög és ρ légsűrűség aktuális értékei mellett, megkaptuk a sportszer mozgáspályáját, ami a vízszintes talajt a kiindulási dobóhelytől q távolságban érte. Ha q kisebb vagy nagyobb volt, mint L , akkor v -t $\Delta v = 10^{-6}$ m/s-mal növeltük, illetve csökkentettük. Ezután (10)-et ismét megoldottuk a $v + \Delta v$ vagy $v - \Delta v$ új kezdősebességekkel, miáltal q új értékéhez jutottunk. Ezt az iterációt mindaddig folytattuk, amíg a $|q - L|$ különbség $\varepsilon = 10^{-6}$ m-nél kisebb lett. Így végül a sportszer L világcúcskori v kezdősebességét $\Delta v = 10^{-6}$ m/s pontossággal rekonstruáltuk.

Az 1–4. táblázat a felnőtt kültéri férfi és női súlylökés és kalapácsvetés időben monoton növekvő 20 legnagyobb L_i világcúcsát, a versenyhelyszínek φ_i földrajzi szélességét és a (8) Cassini-formulából számított helyi g_i

nehézségi gyorsulását, a sportolók nevét, állampolgárságát és h_i testmagasságát, a sportszer eldobásának egyéni H_i kezdőmagasságát, a sportszer számítógépes modellezéssel rekonstruált v_i kezdősebességét tartalmazza $\alpha_{\text{súlygolyó}} = 37^\circ$, $\alpha_{\text{kalapács}} = 44^\circ$, $d = 2,0$ m és $\beta_E = 0^\circ$ északi dobásazimutuszög mellett. A v_i oszlopbeli sorszámok e változó numerikus értékeinek nagyság szerinti sorrendjét tükrözik. A pirossal jelölt adatokat tartalmazó sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámától ($i \neq j$).

Számítógépes vizsgálataink elvégzése és e cikk megírása után a 2021 júniusában elért 23,37 m-es világcúcsot tartó, kétszeres olimpiai bajnok, harmincéves észak-amerikai Ryan Crouser súlylökő egy új világrekordot állított föl 23,56 m-es súlylökésével a 2023. május 27-én Los Angelesben rendezett atlétikai viadalon. E világcúcsot már nem volt időnk figyelembe venni jelen írásunkban.

6. A súlylökés és kalapácsvetés világcúcsrangsorainak változása

Az eltérő helyszíneken történő dobóversenyek többekévesé különböző környezeti viszonyainak dobótáv-

1. táblázat

Felnőtt kültéri férfi súlylökés. Az $i = 12., 13., 19., 20.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámától ($i \neq j$). A φ földrajzi szélességet radiánban adjuk meg, mert a számítógépes programunk így használja, de persze bárki átválthatja fokra az $1 \text{ rad} \approx 57,2958^\circ$ összefüggés alapján

| i | L_i (m) | φ_i (rad) | g_i (m/s ²) | Sportoló (állampolgárság) | h_i (m) | H_i (m) | v_i (m/s) | j |
|-----|-----------|-------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------|-----------|-------------------|-----------|
| 1. | 23,37 | 0,7686 | 9,805 | Ryan Crouser (USA) | 2,01 | 2,320 | $v_1 = 14,559$ | $j = 1.$ |
| 2. | 23,12 | 0,5945 | 9,797 | Randy Barnes (USA) | 1,95 | 2,260 | $v_2 = 14,488$ | $j = 2.$ |
| 3. | 23,06 | 0,6198 | 9,798 | Ulf Timmermann (GDR) | 1,94 | 2,250 | $v_3 = 14,471$ | $j = 3.$ |
| 4. | 22,91 | 0,7657 | 9,805 | Alessandro Andrei (ITA) | 1,91 | 2,220 | $v_4 = 14,435$ | $j = 4.$ |
| 5. | 22,84 | 0,7657 | 9,805 | Alessandro Andrei (ITA) | 1,91 | 2,220 | $v_5 = 14,410$ | $j = 5.$ |
| 6. | 22,72 | 0,7657 | 9,805 | Alessandro Andrei (ITA) | 1,91 | 2,220 | $v_6 = 14,367$ | $j = 6.$ |
| 7. | 22,64 | 0,9166 | 9,813 | Udo Beyer (GDR) | 1,94 | 2,250 | $v_7 = 14,334$ | $j = 7.$ |
| 8. | 22,62 | 0,9166 | 9,813 | Ulf Timmermann (GDR) | 1,94 | 2,250 | $v_8 = 14,327$ | $j = 8.$ |
| 9. | 22,22 | 0,5943 | 9,797 | Udo Beyer (GDR) | 1,94 | 2,250 | $v_9 = 14,172$ | $j = 9.$ |
| 10. | 22,15 | 1,0072 | 9,817 | Udo Beyer (GDR) | 1,94 | 2,250 | $v_{10} = 14,162$ | $j = 10.$ |
| 11. | 22,00 | 0,8538 | 9,810 | Aleksandr Baryshnikov (URS) | 1,98 | 2,290 | $v_{11} = 14,087$ | $j = 11.$ |
| 12. | 21,85 | 0,3721 | 9,787 | Terence Albritton (USA) | 1,94 | 2,250 | $v_{12} = 14,032$ | $j = 13.$ |
| 13. | 21,82 | 0,6515 | 9,799 | Allan Feuerbach (USA) | 1,86 | 2,170 | $v_{13} = 14,060$ | $j = 12.$ |
| 14. | 21,78 | 0,5341 | 9,794 | Randel Matson (USA) | 2,01 | 2,320 | $v_{14} = 13,985$ | $j = 14.$ |
| 15. | 21,52 | 0,5341 | 9,794 | Randel Matson (USA) | 2,01 | 2,320 | $v_{15} = 13,891$ | $j = 15.$ |
| 16. | 20,68 | 0,5943 | 9,797 | Dallas Long (USA) | 1,93 | 2,240 | $v_{16} = 13,613$ | $j = 16.$ |
| 17. | 20,20 | 0,5943 | 9,797 | Dallas Long (USA) | 1,93 | 2,240 | $v_{17} = 13,433$ | $j = 17.$ |
| 18. | 20,10 | 0,5943 | 9,797 | Dallas Long (USA) | 1,93 | 2,240 | $v_{18} = 13,396$ | $j = 18.$ |
| 19. | 20,08 | 0,5943 | 9,797 | Dallas Long (USA) | 1,93 | 2,240 | $v_{19} = 13,388$ | $j = 20.$ |
| 20. | 20,06 | 0,5938 | 9,797 | Williem Nieder (USA) | 1,90 | 2,210 | $v_{20} = 13,392$ | $j = 19.$ |

2. táblázat

Felnőtt kültéri női súlylökés. Az $i = 3., 4., 11., 12.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámtól ($i \neq j$)

| i | L_i (m) | φ_i (rad) | g_i (m/s ²) | Sportoló (állampolgárság) | h_i (m) | H_i (m) | v_i (m/s) | j |
|-----|-----------|-------------------|---------------------------|---------------------------|-----------|-----------|-------------------|-----------|
| 1. | 22,63 | 0,9730 | 9,816 | Natalya Lisovskaya (URS) | 1,88 | 2,189 | $v_1 = 14,391$ | $j = 1.$ |
| 2. | 22,60 | 0,9730 | 9,816 | Natalya Lisovskaya (URS) | 1,88 | 2,189 | $v_2 = 14,381$ | $j = 2.$ |
| 3. | 22,53 | 0,7608 | 9,805 | Natalya Lisovskaya (URS) | 1,88 | 2,189 | $v_3 = 14,348$ | $j = 4.$ |
| 4. | 22,45 | 0,9144 | 9,813 | Ilona Slupianek (GDR) | 1,79 | 2,099 | $v_4 = 14,359$ | $j = 3.$ |
| 5. | 22,36 | 0,8070 | 9,807 | Ilona Slupianek (GDR) | 1,79 | 2,099 | $v_5 = 14,322$ | $j = 5.$ |
| 6. | 22,32 | 0,8432 | 9,809 | Helena Fibingerova (TCH) | 1,79 | 2,099 | $v_6 = 14,309$ | $j = 6.$ |
| 7. | 21,99 | 0,8716 | 9,811 | Helena Fibingerova (TCH) | 1,79 | 2,099 | $v_7 = 14,191$ | $j = 7.$ |
| 8. | 21,89 | 0,7360 | 9,804 | Ivanka Khristova (BUL) | 1,72 | 2,029 | $v_8 = 14,177$ | $j = 8.$ |
| 9. | 21,87 | 0,7360 | 9,804 | Ivanka Khristova (BUL) | 1,72 | 2,029 | $v_9 = 14,169$ | $j = 9.$ |
| 10. | 21,67 | 0,8872 | 9,812 | Marianne Adam (GDR) | 1,83 | 2,139 | $v_{10} = 14,060$ | $j = 10.$ |
| 11. | 21,60 | 0,9166 | 9,813 | Marianne Adam (GDR) | 1,83 | 2,139 | $v_{11} = 14,035$ | $j = 12.$ |
| 12. | 21,57 | 0,8592 | 9,810 | Helena Fibingerova (TCH) | 1,79 | 2,099 | $v_{12} = 14,038$ | $j = 11.$ |
| 13. | 21,45 | 0,7540 | 9,805 | Nadezhda Chizhova (URS) | 1,74 | 2,049 | $v_{13} = 14,009$ | $j = 13.$ |
| 14. | 21,20 | 0,8699 | 9,811 | Nadezhda Chizhova (URS) | 1,74 | 2,049 | $v_{14} = 13,921$ | $j = 14.$ |
| 15. | 21,03 | 0,8402 | 9,809 | Nadezhda Chizhova (URS) | 1,74 | 2,049 | $v_{15} = 13,857$ | $j = 15.$ |
| 16. | 20,63 | 0,7608 | 9,805 | Nadezhda Chizhova (URS) | 1,74 | 2,049 | $v_{16} = 13,705$ | $j = 16.$ |
| 17. | 20,43 | 0,9730 | 9,816 | Nadezhda Chizhova (URS) | 1,74 | 2,049 | $v_{17} = 13,638$ | $j = 17.$ |
| 18. | 20,43 | 0,6629 | 9,800 | Nadezhda Chizhova (URS) | 1,74 | 2,049 | $v_{18} = 13,627$ | $j = 18.$ |
| 19. | 20,10 | 0,6629 | 9,800 | Nadezhda Chizhova (URS) | 1,74 | 2,049 | $v_{19} = 13,502$ | $j = 19.$ |
| 20. | 20,10 | 0,9166 | 9,813 | Margitta Gummel (GDR) | 1,77 | 2,079 | $v_{20} = 13,499$ | $j = 20.$ |

3. táblázat

Felnőtt kültéri férfi kalapácsvetés. Az $i = 11., 12., 16., 17., 18.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámtól ($i \neq j$)

| i | L_i (m) | φ_i (rad) | g_i (m/s ²) | Sportoló (állampolgárság) | h_i (m) | H_i (m) | v_i (m/s) | j |
|-----|-----------|-------------------|---------------------------|---------------------------|-----------|-----------|-------------------|-----------|
| 1. | 86,74 | 0,8514 | 9,810 | Yuriy Sedykh (URS) | 1,85 | 1,778 | $v_1 = 29,680$ | $j = 1.$ |
| 2. | 86,66 | 1,0374 | 9,819 | Yuriy Sedykh (URS) | 1,85 | 1,778 | $v_2 = 29,679$ | $j = 2.$ |
| 3. | 86,34 | 0,9058 | 9,812 | Yuriy Sedykh (URS) | 1,85 | 1,778 | $v_3 = 29,609$ | $j = 3.$ |
| 4. | 84,14 | 0,9730 | 9,816 | Sergey Litvinov (URS) | 1,80 | 1,728 | $v_4 = 29,216$ | $j = 4.$ |
| 5. | 83,98 | 0,9730 | 9,816 | Sergey Litvinov (URS) | 1,80 | 1,728 | $v_5 = 29,186$ | $j = 5.$ |
| 6. | 81,80 | 0,9730 | 9,816 | Yuriy Sedykh (URS) | 1,85 | 1,778 | $v_6 = 28,767$ | $j = 6.$ |
| 7. | 81,66 | 0,7608 | 9,805 | Sergey Litvinov (URS) | 1,80 | 1,728 | $v_7 = 28,734$ | $j = 7.$ |
| 8. | 80,64 | 0,7573 | 9,805 | Yuriy Sedykh (URS) | 1,85 | 1,778 | $v_8 = 28,531$ | $j = 8.$ |
| 9. | 80,46 | 0,7573 | 9,805 | Jüri Tamm (URS) | 1,91 | 1,838 | $v_9 = 28,486$ | $j = 9.$ |
| 10. | 80,38 | 0,7573 | 9,805 | Yuriy Sedykh (URS) | 1,85 | 1,778 | $v_{10} = 28,482$ | $j = 10.$ |
| 11. | 80,32 | 0,8496 | 9,810 | Karl-Hans Riehm (FRG) | 1,95 | 1,878 | $v_{11} = 28,460$ | $j = 12.$ |
| 12. | 80,14 | 0,9730 | 9,816 | Boris Zaychuk (URS) | 1,80 | 1,728 | $v_{12} = 28,461$ | $j = 11.$ |

3. táblázat (folyt.)

Felnőtt kültéri férfi kalapácsvetés. Az $i = 11., 12., 16., 17., 18.$ sorokban az L dobótáv i rangsorszáma eltér a v nagyság szerinti j sorszámtól ($i \neq j$)

| i | L_i (m) | φ_i (rad) | g_i (m/s ²) | Sportoló (állampolgárság) | h_i (m) | H_i (m) | v_i (m/s) | j |
|-----|-----------|-------------------|---------------------------|---------------------------|-----------|-----------|-------------------|-----------|
| 13. | 79,30 | 0,8746 | 9,811 | Walter Schmidt (FRG) | 1,92 | 1,848 | $v_{13} = 28,272$ | $j = 13.$ |
| 14. | 78,50 | 0,8617 | 9,810 | Karl-Hans Riehm (FRG) | 1,95 | 1,878 | $v_{14} = 28,111$ | $j = 14.$ |
| 15. | 77,56 | 0,8617 | 9,810 | Karl-Hans Riehm (FRG) | 1,95 | 1,878 | $v_{15} = 27,930$ | $j = 15.$ |
| 16. | 76,70 | 0,8617 | 9,810 | Karl-Hans Riehm (FRG) | 1,95 | 1,878 | $v_{16} = 27,763$ | $j = 17.$ |
| 17. | 76,66 | 0,8402 | 9,809 | Aleksey Spiridonov (URS) | 1,92 | 1,848 | $v_{17} = 27,759$ | $j = 18.$ |
| 18. | 76,60 | 0,8961 | 9,812 | Reinhard Theimer (GDR) | 1,84 | 1,768 | $v_{18} = 27,767$ | $j = 16.$ |
| 19. | 76,40 | 0,8437 | 9,809 | Walter Schmidt (FRG) | 1,92 | 1,848 | $v_{19} = 27,709$ | $j = 19.$ |
| 20. | 75,48 | 0,8835 | 9,811 | Anatolij Bondarchuk (URS) | 1,83 | 1,758 | $v_{20} = 27,549$ | $j = 20.$ |

4. táblázat

Felnőtt kültéri női kalapácsvetés. Az L dobótáv i rangsorszáma minden sorban egyezik a v nagyság szerinti j sorszámmal ($i = j$)

| i | L_i (m) | φ_i (rad) | g_i (m/s ²) | Sportoló (állampolgárság) | h_i (m) | H_i (m) | v_i (m/s) | j |
|-----|-----------|-------------------|---------------------------|---------------------------|-----------|-----------|-------------------|-----------|
| 1. | 82,98 | 0,9116 | 9,813 | Anita Wlodarczyk (POL) | 1,78 | 1,708 | $v_1 = 29,642$ | $j = 1.$ |
| 2. | 82,29 | -0,3999 | 9,788 | Anita Wlodarczyk (POL) | 1,78 | 1,708 | $v_2 = 29,467$ | $j = 2.$ |
| 3. | 81,08 | 0,9563 | 9,815 | Anita Wlodarczyk (POL) | 1,78 | 1,708 | $v_3 = 29,264$ | $j = 3.$ |
| 4. | 79,58 | 0,9166 | 9,813 | Anita Wlodarczyk (POL) | 1,78 | 1,708 | $v_4 = 28,957$ | $j = 4.$ |
| 5. | 79,42 | 0,8985 | 9,812 | Betty Heidler (GER) | 1,75 | 1,678 | $v_5 = 28,929$ | $j = 5.$ |
| 6. | 78,30 | 0,9271 | 9,814 | Anita Wlodarczyk (POL) | 1,78 | 1,708 | $v_6 = 28,698$ | $j = 6.$ |
| 7. | 77,96 | 0,9166 | 9,813 | Anita Wlodarczyk (POL) | 1,78 | 1,708 | $v_7 = 28,627$ | $j = 7.$ |
| 8. | 77,80 | 1,0374 | 9,819 | Tatyana Lysenko (RUS) | 1,86 | 1,788 | $v_8 = 28,588$ | $j = 8.$ |
| 9. | 77,41 | 0,9704 | 9,816 | Tatyana Lysenko (RUS) | 1,86 | 1,788 | $v_9 = 28,504$ | $j = 9.$ |
| 10. | 77,26 | 0,9460 | 9,814 | Gulfiya Khanafeyeva (RUS) | 1,73 | 1,658 | $v_{10} = 28,494$ | $j = 10.$ |
| 11. | 77,06 | 0,9730 | 9,816 | Tatyana Lysenko (RUS) | 1,86 | 1,788 | $v_{11} = 28,432$ | $j = 11.$ |
| 12. | 76,07 | 0,8306 | 9,809 | Mihaela Melinte (ROU) | 1,70 | 1,628 | $v_{12} = 28,248$ | $j = 12.$ |
| 13. | 76,05 | 0,8306 | 9,809 | Mihaela Melinte (ROU) | 1,70 | 1,628 | $v_{13} = 28,243$ | $j = 13.$ |
| 14. | 75,97 | 0,7990 | 9,807 | Mihaela Melinte (ROU) | 1,70 | 1,628 | $v_{14} = 28,224$ | $j = 14.$ |
| 15. | 75,29 | 0,7990 | 9,807 | Mihaela Melinte (ROU) | 1,70 | 1,628 | $v_{15} = 28,083$ | $j = 15.$ |
| 16. | 73,14 | 0,7959 | 9,807 | Mihaela Melinte (ROU) | 1,70 | 1,628 | $v_{16} = 27,635$ | $j = 16.$ |
| 17. | 73,10 | 0,8402 | 9,809 | Olga Kuzenkova (RUS) | 1,76 | 1,688 | $v_{17} = 27,618$ | $j = 17.$ |
| 18. | 71,22 | 0,8402 | 9,809 | Olga Kuzenkova (RUS) | 1,76 | 1,688 | $v_{18} = 27,222$ | $j = 18.$ |
| 19. | 69,58 | 0,7754 | 9,806 | Mihaela Melinte (ROU) | 1,70 | 1,628 | $v_{19} = 26,880$ | $j = 19.$ |
| 20. | 69,42 | 0,8163 | 9,808 | Mihaela Melinte (ROU) | 1,70 | 1,628 | $v_{20} = 26,849$ | $j = 20.$ |

ra kifejtett hatásait csak úgy lehetne kiküszöbölni, ha a sportolók azonos környezetben dobnának. Például ugyanazon g nehézségi gyorsulás mellett, azonos β azimutirányban és egyforma meteorológiai viszonyok között történnének a dobások. Tekintsük azt a képzelt hely-

zetet, hogy a világcsúcstartók a világcsúcsukkor elért v kezdősebességgel nem különböző földrajzi szélességek eltérő g nehézségi gyorsulásai mellett és eltérő β azimutirányba dobnak, hanem ugyanazon g és β mellett. Az 5. és 6. táblázatok így hasonlítják össze az L dobótávokat.

5. táblázat

A felnőtt kültéri női súlylökés számítógépes modellezéssel kapott $L_{i,j}$ (sor: $i = 19, 20$; oszlop: $j = 1, 2, \dots, 6$) (m) dobótávjai az ellökött súlygolyók 2. táblázatbeli, számítógépes modellezéssel rekonstruált v_i (m/s) kezdősebességei és a sportversenyek φ_j földrajzi szélességen lévő helyszíneinek g_j (m/s²) nehézségi gyorsulásai esetén, $\alpha = 37^\circ$, valamint $\beta_E = 0^\circ$ (északi dobásazimut), $\beta_K = 90^\circ$ (kelet) és $\beta_N = 270^\circ$ (nyugat) azimutszögek mellett. A mátrix kövér L_{19}, L_{20} elemei és kövér $i = 19., 20.$ sorszámai a 2. táblázatbeli $i = 19., 20.$ világcúccsal azonosak. Egy adott j oszlopbeli L_i távolságok és $k = 19., 20.$ sorszámok a g_j nehézségi gyorsulás mellett fiktiivén lefolytatott versenyen elérhető dobótávokat és azok rangsorrendjét tükrözik, mintha mindkettő súlylökőnő ugyanazon g_j mellett lökött volna a világcúcsa felállításakor v_i kezdősebességgel és α kezdőszöggel északra (E: $\beta_E = 0^\circ$), keletre (K: $\beta_K = 90^\circ$) vagy nyugatra (N: $\beta_N = 270^\circ$). A g_j nehézségi gyorsulás zárójelbeli indexei a 2. táblázatbeli, gyakorlatilag ($\Delta g_{\max} = 0,002$ m/s²) azonos nagyságú gyorsulások indexeivel egyeznek meg. A pirossal jelzett adatok esetén i eltér k -tól ($i \neq k$)

| H_i (m) | v_i (m/s) | $g_{1(1,2,17)} = 9,816$ $\varphi_1 = 0,9730$ | $g_{2(3,8,9,13,16)} = 9,805$ $\varphi_2 = 0,7608$ | $g_{3(4,10,11,20)} = 9,813$ $\varphi_3 = 0,9144$ | $g_{4(5)} = 9,807$ $\varphi_4 = 0,8070$ | $g_{5(6,7,12,14,15)} = 9,809$ $\varphi_5 = 0,8432$ | $g_{6(18,19)} = 9,800$ $\varphi_6 = 0,6629$ |
|-------------------------------|--------------------------------|--|--|---|--|---|---|
| $i = 19.$ $H_{19} = 2,049$ | $i = 19.$ $v_{19} = 13,502$ | $k = 20.$ E: 20,070 K: 20,072 N: 20,069 | $k = 20.$ E: 20,090 K: 20,092 N: 20,089 | $k = 20.$ E: 20,076 K: 20,077 N: 20,075 | $k = 20.$ E: 20,087 K: 20,088 N: 20,085 | $k = 20.$ E: 20,083 K: 20,085 N: 20,082 | $i = 19., L_{19} = 20,10$ $k = 20.$ E: 20,100 K: 20,101 N: 20,098 |
| $i = 20.$ $H_{20} = 2,079$ | $i = 20.$ $v_{20} = 13,499$ | $k = 19.$ E: 20,094 K: 20,095 N: 20,092 | $k = 19.$ E: 20,114 K: 20,115 N: 20,112 | $i = 20., L_{20} = 20,10$ $k = 19.$ E: 20,099 K: 20,100 N: 20,098 | $k = 19.$ E: 20,110 K: 20,112 N: 20,108 | $k = 19.$ E: 20,106 K: 20,108 N: 20,105 | $k = 19.$ E: 20,123 K: 20,124 N: 20,121 |

6. táblázat

A felnőtt kültéri férfi kalapácsvetés számítógépes modellezéssel kapott $L_{i,j}$ (sor: $i = 1, 2, 10, 11$; oszlop: $j = 1, 2, \dots, 5$) (m) dobótávjai az elvetett kalapácsok 3. táblázatbeli, számítógépes modellezéssel rekonstruált v_i (m/s) kezdősebességei és a sportversenyek φ_j földrajzi szélességen lévő helyszíneinek g_j (m/s²) nehézségi gyorsulásai esetén, $\alpha = 44^\circ$, valamint $\beta_E = 0^\circ$ (északi dobásazimut), $\beta_K = 90^\circ$ (kelet) és $\beta_N = 270^\circ$ (nyugat) azimutszögek mellett. A mátrix kövér L_1, L_2, L_{10}, L_{11} elemei és kövér $i = 1., 2., 10., 11.$ sorszámok a 3. táblázatbeli $i = 1., 2., 10., 11.$ világcúccsal azonosak. Egy adott j oszlopbeli L_i távolságok és $k = 1., 2., 10., 11.$ sorszámok a g_j nehézségi gyorsulás mellett fiktiivén lefolytatott versenyen elérhető dobótávokat és azok rangsorát tükrözik, mintha mind a 4 kalapácsvető ugyanazon g_j mellett vetett volna a világcúcsakor v_i kezdősebességgel és α kezdőszöggel északra (E: $\beta_E = 0^\circ$), keletre (K: $\beta_K = 90^\circ$) vagy nyugatra (N: $\beta_N = 270^\circ$). A g_j nehézségi gyorsulás zárójelbeli indexei a 3. táblázatbeli, gyakorlatilag ($\Delta g_{\max} = 0,002$ m/s²) azonos nagyságú gyorsulások indexeivel egyeznek meg. A pirossal jelzett adatok esetén i nem mindig azonos k -val

| H_i (m) | v_i (m/s) | $g_{1(1,11,14,15,16,17,19)} = 9,810$ $\varphi_1 = 0,8514$ | $g_{2(2)} = 9,819$ $\varphi_2 = 1,0374$ | $g_{3(3,13,18,20)} = 9,812$ $\varphi_3 = 0,9058$ | $g_{4(4,5,6,12)} = 9,816$ $\varphi_4 = 0,9730$ | $g_{5(7,8,9,10)} = 9,805$ $\varphi_5 = 0,7608$ |
|-------------------------------|--------------------------------|---|---|--|--|---|
| $i = 1.$ $H_1 = 1,778$ | $i = 1.$ $v_1 = 29,680$ | $i = 1., L_1 = 86,74$ $k = 1.(2.)$ E: 86,741 $k = 1.$ K: 86,752 $k = 1.(2.)$ N: 86,730 | $k = 1.(2.)$ E: 86,667 $k = 1.$ K: 86,676 $k = 1.(2.)$ N: 86,659 | $k = 1.(2.)$ E: 86,725 $k = 1.$ K: 86,735 $k = 1.(2.)$ N: 86,714 | $k = 1.(2.)$ E: 86,692 $k = 1.$ K: 86,701 $k = 1.(2.)$ N: 86,682 | $k = 1.(2.)$ E: 86,782 $k = 1.$ K: 86,795 $k = 1.(2.)$ N: 86,770 |
| $i = 2.$ $H_2 = 1,778$ | $i = 2.$ $v_2 = 29,679$ | $k = 2.(1.)$ E: 86,736 $k = 2.(1.)$ K: 86,747 $k = 2.$ N: 86,725 | $i = 2., L_2 = 86,66$ $k = 2.(1.)$ E: 86,662 $k = 2.(1.)$ K: 86,670 $k = 2.$ N: 86,653 | $k = 2.(1.)$ E: 86,719 $k = 2.(1.)$ K: 86,730 $k = 2.$ N: 86,709 | $k = 2.(1.)$ E: 86,687 $k = 2.(1.)$ K: 86,696 $k = 2.$ N: 86,677 | $k = 2.(1.)$ E: 86,777 $k = 2.(1.)$ K: 86,789 $k = 2.$ N: 86,765 |
| $i = 10.$ $H_{10} = 1,778$ | $i = 10.$ $v_{10} = 28,482$ | $k = 10.$ E: 80,343 K: 80,353 N: 80,333 | $k = 10.$ E: 80,274 K: 80,282 N: 80,267 | $k = 10.$ E: 80,327 K: 80,337 N: 80,318 | $k = 10.$ E: 80,297 K: 80,306 N: 80,289 | $i = 10., L_{10} = 80,38$ $k = 10.$ E: 80,381 $k = 10.$ K: 80,392 $k = 10.(11.)$ N: 80,370 |
| $i = 11.$ $H_{11} = 1,878$ | $i = 11.$ $v_{11} = 28,460$ | $i = 11., L_{11} = 80,32$ $k = 11.$ E: 80,322 K: 80,332 N: 80,312 | $k = 11.$ E: 80,253 K: 80,261 N: 80,246 | $k = 11.$ E: 80,306 K: 80,316 N: 80,297 | $k = 11.$ E: 80,276 K: 80,284 N: 80,268 | $k = 11.$ E: 80,360 $k = 11.(10.)$ K: 80,371 $k = 11.$ N: 80,349 |

Az 5. táblázat szerint, ha a 19. (Nadezhda Chizhova²) és a 20. (Margitta Gummel) súlylökőnő ugyanazon g nehézségi gyorsulás mellett lőkött volna a világcsúcsuk elérésekori $v_{19} = 13,502$ m/s, illetve $v_{20} = 13,499$ m/s kezdősebességgel, akkor függetlenül a dobásuk β azimutirányától és az aktuális g nehézségi gyorsulástól az eredetileg egyforma $L_{19} = L_{20} = 20,10$ m dobótávjuk úgy változott volna, hogy Nadezhda Chizhova $L_{19,E,K,N}$ dobótávja kisebb lett volna Margitta Gummel $L_{20,E,K,N}$ dobótávjánál ($L_{19,E,K,N} < L_{20,E,K,N}$), vagyis a rangsorszámuk fölcserélődött volna egymással: 19. \leftrightarrow 20.

A 2. táblázat szerint Nadezhda Chizhova ($h_{19} = 1,74$ m) Margitta Gummelhez ($h_{20} = 1,77$ m) képest 3 cm-es testmagassághátrányban ($h_{19} < h_{20}$) volt, ami csökkentette az előbbi dobótávját. Ugyanakkor Nadezhda Chizhova ($g_{19} = 9,800$ m/s²) előnyben volt Margitta Gummelhez ($g_{20} = 9,813$ m/s²) képest a kisebb helyi g nehézségi gyorsulás miatt ($g_{19} < g_{20}$), ami növelte az előbbi dobótávját. Az azonos g melletti súlylökéskor bekövetkező 19. \leftrightarrow 20. rangsorszámcsere oka a g és h együttes hatása a dobótávra. Mindezen még a dobás β azimutirányának esetleges különbözőségéből eredő Coriolis-gyorsulás okozta dobótávváltozás sem lett volna képes változtatni.

Ugyanakkor, ha a súlygolyó v kezdősebességén alapulna a világcsúcsrangsor, akkor Nadezhda Chizhova ($v_{19} = 13,502$ m/s) maradna a 19. helyezett és Margitta Gummel ($v_{20} = 13,499$ m/s) is megtartaná a 20. helyezését, mert $v_{19} > v_{20}$, ám ekkor a $v_4 = 14,359$ m/s $>$ $v_3 = 14,348$ m/s és $v_{12} = 14,038$ m/s $>$ $v_{11} = 14,035$ m/s kezdősebességviszonyok miatt bekövetkezne a 3. \leftrightarrow 4. és 11. \leftrightarrow 12. rangsorszámcsere (2. táblázat).

A 6. táblázat szerint az 1. (Yuriy Sedykh) és a 2. (Yuriy Sedykh) kalapácsvetővilágcsúcs esetén 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsere lépett volna föl, amennyiben azonos g mellett történt volna mindkét vetés a világcsúcs elérésekori v kezdősebességgel, ha az 1. vetés észak (E) felé történt volna, a 2. pedig kelet (K) felé, amikor is $L_{1,E} < L_{2,K}$ lett volna a dobótávviszony. i) Ekkor a Coriolis-gyorsulás az 1. vetés északi ($\beta_E = 0^\circ$) dobótávját nem változtatta volna, míg a 2. vetés keleti ($\beta_K = 90^\circ$) dobótávját kicsivel növelte volna. ii) Másodrészt, az 1. vetés kalapácsának nagyobb kezdősebessége ($v_1 = 29,680$ m/s) növelte a dobótávot a 2. vetéséhez képest, ami kisebb kezdősebességgel ($v_2 = 29,679$ m/s) történt. iii) Mivel mindkét világcsúcsot ugyanaz a kalapácsvető, Yuriy Sedykh érte el, a h testmagasság nem játszott szerepet a rangsorszámcsereben. Itt tehát a β azimutirány és a v kezdősebesség együttes hatásai (az előbbi dominanciája az utóbbi felett) okozták volna az $L_{1,E} < L_{2,K}$ dobótávviszony miatti 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsereét.

A 6. táblázat szerint ugyancsak 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsere lépett volna föl, amennyiben azonos g mellett történt volna mindkét vetés a világcsúcs elérésekori v kezdősebességgel, ha az 1. vetés nyugat (N) felé történt volna, a 2. pedig észak (E) vagy kelet (K) felé, amikor is $L_{1,N} < L_{2,E} < L_{2,K}$ lett volna a dobótávviszony. i) Ekkor a Coriolis-gyorsulás az 1. vetés nyugati ($\beta_N = 270^\circ$) dobótávját

csökkentette volna, míg a 2. északi ($\beta_E = 0^\circ$) dobótávját nem változtatta volna, és a keleti ($\beta_K = 90^\circ$) dobótávját kicsivel növelte volna. ii) Másodrészt, az 1. vetés kalapácsának nagyobb kezdősebessége ($v_1 = 29,680$ m/s) növelte a dobótávot a kisebb kezdősebességű ($v_2 = 29,679$ m/s) 2. vetéséhez képest. iii) A h testmagasság nyilván itt sem játszott szerepet e rangsorszámcsereben. Itt megint a β azimutirány és a v kezdősebesség együttes hatásai (illetve az előbbi dominanciája) okozták volna az $L_{1,N} < L_{2,E} < L_{2,K}$ dobótávviszony miatti 1. \leftrightarrow 2. rangsorszámcsereét. Ha viszont azonos északi, keleti vagy nyugati azimutirányba történtek volna a kalapácsvetések egy adott sportpályára (azonos g) ugyanazon dobóköréből (azonos β), akkor maradt volna a kezdősebesség által meghatározott $L_{1,E,K,N} > L_{2,E,K,N}$ dobótávfölény, azaz nem változtak volna az 1. és 2. rangsorszámok (6. táblázat). Itt is a Coriolis-gyorsulás hatása lett volna a felelős az említett rangsorszámcsereért.

A 6. táblázat szerint a 10. (Yuriy Sedykh) és a 11. (Karl-Hans Riehm) kalapácsvetővilágcsúcs esetén rangsorszámcsere történt volna, amennyiben mindkét kalapácsvető a $\varphi_5 = 43,59^\circ$ földrajzi szélesség $g_{5(7,8,9,10)} = 9,805$ m/s² nehézségi gyorsulása mellett vetett volna a világcsúcsa elérésekori v kezdősebességgel, ha a 10. helyezett nyugat (N) felé vetett volna, a 11. pedig kelet (K) felé, amikor is $L_{10,N} = 80,370$ m $<$ $L_{11,K} = 80,371$ m lett volna a dobótávviszony. i) Ekkor a Coriolis-gyorsulás a 11. helyezett keleti ($\beta_K = 90^\circ$) irányú dobótávját kissé megnövelte volna, míg a 10. helyezett nyugati ($\beta_N = 270^\circ$) irányú dobótávját kicsivel csökkentette volna. ii) Másodrészt, a 11. helyezett kalapácsának kisebb kezdősebessége ($v_{11} = 27,744$ m/s) csökkentette a dobótávot a 10. helyezettéhez képest, aki nagyobb kezdősebességgel ($v_{10} = 27,766$ m/s) vetette el a kalapácsot. iii) Harmadrészt, a 10. helyezett ($h_{10} = 1,85$ m) 10 cm-es testmagassághátránya csökkentette a dobótávot a magasabb 11. helyezettéhez ($h_{11} = 1,95$ m) viszonyítva (3. táblázat). iv) Negyedrész, a 10. helyezett eredetileg kisebb nehézségi gyorsulás ($g_{10} = 9,805$ m/s²) mellett vetett, ami növelte a dobótávot a 11. helyezettéhez képest, aki nagyobb nehézségi gyorsulás mellett ($g_{11} = 9,810$ m/s²) vetett, ami csökkentette a dobótávját (3. táblázat). Itt a β azimutirány, v kezdősebesség, h testmagasság és g nehézségi gyorsulás együttes hatásai okozták volna az $L_{10,N} < L_{11,K}$ dobótávviszony miatti 10. \leftrightarrow 11. rangsorszámcsereét. Ha viszont e két kalapácsvető azonos északi, keleti vagy nyugati azimutirányba vetette volna a kalapácsot egy adott sportpályára (azonos g) ugyanazon dobóköréből (azonos β), akkor maradt volna az $L_{10,E,K,N} > L_{11,E,K,N}$ dobótávfölény, azaz nem változott volna az eredeti 10. és 11. rangsorszám (6. táblázat). Ezért itt is főleg a Coriolis-gyorsulás hatása lett volna felelős az említett rangsorszámcsereért.

Ugyanakkor, ha a kalapács v kezdősebességére alapulna a világcsúcsrangsor, akkor a 3. táblázat szerint a $v_{12} = 28,461$ m/s $>$ $v_{11} = 28,460$ m/s kezdősebességviszony miatt bekövetkezne a 11. \leftrightarrow 12. rangsorszámcsere, továbbá a $v_{18} = 27,767$ m/s $>$ $v_{16} = 27,763$ m/s $>$ $v_{17} = 27,759$ m/s viszony okán az eredeti 18. lenne az új 16., az eredeti 16. lenne az új 17., és az eredeti 17. lenne az új 18.

² Ebben a cikkben az orosz neveket a magyar átírás helyett az orosz nemzetközi latinbetűs átírása szerint írjuk.

Mint korábban említettük, az eltérő helyszíneken történő dobóversenyek eltérő környezeti viszonyainak dobótávra kifejtett hatásait csak úgy lehetne kiküszöbölni, ha a sportolók azonos környezetben dobnának. Mivel ez gyakorlatilag kivitelezhetetlen, érdemes lenne a súlygolyó v kezdősebességét tekinteni rangadó mértéknek.

A Föld északi (déli) féltekéjén a Coriolis-gyorsulás az óramutató járásával egyezően (ellentétesen) téríti el egy repülő test pályáját. Természetesen e jelenséget is figyelembe vettük a számítógépes modellünkben, aminek (10) mozgásegyenletében a Coriolis-gyorsulás vektoriális formában szerepel. A súlylökés 40 és a kalapácsvetés 40 vizsgált világcsúcsa közül egyedül a lengyel Anita Włodarczyk kalapácsvetése történt a déli féltekén lévő brazil Rio de Janeiro $\varphi = -22,91^\circ$ földrajzi szélességén, míg a többi 79 másik világcsúcsot az északi féltekén érték el (1–4. táblázat).

7. Következtetések

- 1) A súlygolyó és a kalapács v kezdősebességének nagysága sokkal jobban tükrözi a sportoló saját fizikai teljesítményét, mint az L dobótáv, mert utóbbit a földrajzi szélességtől függő helyi g nehézségi gyorsulás mellett leginkább a sportoló h testmagassága és több más környezeti hatás is befolyásolja, elsősorban a légsűrűségtől és szélességtől függő légellenállás. Ezért az egyforma esély és a *fair play* (tisztá eszközökkel játszott mérkőzés és az ellenfélle szemben tanúsított sportszerű magatartás) eszméje értelmében helyénvalóbb lenne a sportszer v kezdősebességét tekinteni a sportoló környezeti hatásoktól mentes saját, igazi, rangadó teljesítményének és ez alapján megállapítani a rangsorrendet – ahelyett, hogy szokás szerint az L dobótávokat mérnék össze. A sportszer v kezdősebességét ultrahangos vagy lézer-doppler elven működő berendezéssel lehet mérni a helyszínen.
- 2) Ha a súlygolyó v kezdősebességét tekintenék rangadónak, akkor a kültéri női és férfi súlylökés világcsúcsrangosoraiban több rangsorszámcsere és rangsorszámazonosság lépne föl. Ha viszont azonos azimutirányokba történtek volna a súlylökések azonos helyi g mellett, akkor nem változtak volna a rangsorszámok.
- 3) Ha a kalapács v kezdősebességét tekintenék rangadónak, akkor a kültéri férfi kalapácsvetés világcsúcsrangosorában rangsorszámcsere és rangsorszámváltozások történnének.
- 4) A valóságot jól modellező, a légellenállást és a Coriolis-erőt is figyelembe vevő számítógépes vizsgálatokkal kapott eredmények nagy része egyezik a légellenállást és Coriolis-erőt elhanyagoló analitikus becslésekeivel. Ennek oka, hogy a súlygolyó és kalapács súlyához képest igen kicsik a légellenállási és Coriolis-erők, amelyek ezért csak kis mértékben befolyásolják a dobótávot.
- 5) A súlylökők és kalapácsvetők h testmagasság-különbségeiből eredő L dobótávbeli előnyök és hátrányok

kiküszöbölése céljából a versenyzőknek egy emelhető-süllyeszthető dobókörből állandó H kezdőmagasság mellett kellene eldobniuk a sportszerüket.

Irodalom

- Brosche P., Sündermann J. (1978): Tidal Friction and the Earth's Rotation. Springer: Heidelberg, Berlin, New York
- Hinze W. J., Frese von R. R. B., Saad A. H. (2013): Gravity and Magnetic Exploration: Principles, Practices, and Applications. Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-32819-8)
- Hegedűs D. (2022): A kültéri felnőtt férfi és női súlylökés és kalapácsvetés világcsúcsrangosorainak változásai a Föld forgása miatti centrifugális gyorsulás és a testmagasság dobótávra kifejtett hatásainak figyelembevételével. BSc-szakdolgozat, ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék, Budapest, 54 o. (témavezető: Horváth Gábor)
- Horváth G. (1991): A holdak kötött keringése, az árapály-effektus és az árapályfűtés. Fizikai Szemle 41: 79–88.
- Horváth G. (2001): (2004: 2. változatlan kiadás) A mechanika biológiai alkalmazása: Biomechanika. Egyetemi tankönyv, 262 o., ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, ISBN 963-463-379-X
- Horváth G. (2009): Biomechanika: A mechanika biológiai alkalmazásai. Egyetemi tankönyv, 3. átdolgozott, bővített kiadás, 368 o., ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, ISBN 978-963-284-052-9
- Horváth G., Hegedűs D., Slíz-Balogh J. (2023): Change of world-record rankings of shot put and hammer throw due to the effects of Earth rotation and athlete's height. Scientific Reports 13: 10409 (DOI: 10.1038/s41598-023-36665-5)
- Jánosi I., Bántay P. (2002): Statistical test of throwing events on the rotating Earth: lack of correlations between range and geographic location. European Physical Journal B 30: 411–415.
- Jordan T. (1977): Terry Albritton – T & FN interview. Track & Field News 1977 March: pp. 11–12.
- Konz S. M., Hunter I. (2015): Technique comparison of male and female hammer throwers. pp. 1038–1041. In: Coaching and Sports Activities. edited by Colloud F, Domalain M, Monnet T. 33. International Conference on Biomechanics in Sports. Poitiers, France, 29 June – 3 July 2015
- Landau L. D., Lifsic E. M. (1984): Elméleti fizika I.: Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest
- Linthorne N. P. (2001): Optimum release angle in the shot put. Journal of Sports Sciences 19(5): 359–372 (DOI: 10.1080/02640410152006135)
- Marik M. (szerk.) (1989): Csillagászat. Akadémiai Kiadó, Budapest
- Megede E., Hymans R. (eds) (1991): Progression of World Best Performances and IAAF Approved World Records. International Athletic Foundation
- Mizera F., Horváth G. (2000): Dobósportok a forgó Földön. Hogyan befolyásolja a dobótávot a centrifugális és a Coriolis-erő? I. + II. rész Természet Világa 131: 402–405. + 457–461.
- Mizera F., Horváth G. (2002): Influence of environmental factors on shot put and hammer throw range. Journal of Biomechanics 35 (6): 785–796 (DOI: 10.1016/S0021-9290(02)00029-5)
- Pálfi K. (2021): A forgó és keringő Föld tehetetlenségi gyorsulásai a dobósportok biomechanikája háttérül. BSc-szakdolgozat, ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék, Budapest, 38 o. (témavezető: Horváth Gábor, konzulens: Slíz-Balogh Judit)
- Pálfi K., Horváth G., Slíz-Balogh J. (2022): A Föld felszínén fellépő gyorsulások a dobósportok biomechanikája háttérül. 1. rész: Árapály és forgáslassulás. 2. rész: Precesszió, nutáció, Coriolis- és centrifugális gyorsulás. Fizikai Szemle 72 (4): 99–103., 72 (5): 131–134.
- Scrutton C. T. (1978): Periodic growth features in fossil organisms and the length of the day and month. In: Brosche P., Sündermann J. (eds) Tidal Friction and the Earth's Rotation. Springer: Heidelberg, Berlin, New York
- Varga P. (2014): A naphosszúság változása – Hatásai a Föld és az élet fejlődésére. Természet Világa 145: 546–548.
- Völgyesi L. (2013): A Föld precessziós mozgása. Fizikai Szemle 63: 152–156.
- White C. (2011): Projectile Dynamics in Sport: Principles and Applications. Routledge, Abingdon, Oxon, UK