

ERGODICITÁS ÉS TERMALIZÁCIÓ ZÁRT KVANTUMRENDSZEREKBEN

Takács Gábor

BME Elméleti Fizika Tanszék, Budapest

E-mail: takacs.gabor@ttk.bme.hu

Boltzmann ergodikusan hipotézise [1] szerint kellően hosszú időtartam alatt tekintve egy zárt dinamikai rendszer által a fázistér adott tartományában eltöltött idő arányos a tartomány fázistér-fogatával. Más megfogalmazásban, hosszú időn át tekintve az összes mikroállapot egyenletes valószínűséggel fordul elő. Az ergodikusan hipotézis jelentősége, hogy ebben az esetben az egyensúly statisztikus leírását a mikrokanonikus sokaság adja. Ennek egyik legfontosabb következménye, hogy egy nagyméretű környezettel („hőtartály”) energiát cserélő rendszer egyensúlyi állapota termális, azaz statisztikus leírását a kanonikus sokaság adja meg; ezt nevezzük hőmérsékleti egyensúlynak.

A fent leírt ergodikusan hipotézis klasszikus hamiltoni dinamikai rendszerekre vonatkozik. Természetesen vetődik fel: mi történik akkor, ha a mikroszkopikus dinamikát a kvantummechanika törvényei írják le? Kiterjeszthető-e az ergodikusan hipotézis a kvantumos esetre is? Megalapozható-e ebben az esetben is, hogy az egyensúlyi állapot hőmérsékleti egyensúlynak felel meg?

A klasszikus ergodikusan hipotézis

Egy zárt hamiltoni rendszer dinamikáját kanonikusan konjugált q_i koordinátákkal és p_i impulzusokkal írhatjuk le, amelyek időfüggését a Hamilton-egyenletek adják:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1)$$

ahol H az összenergiát megadó Hamilton-függvény, ami egyben megmaradó mennyiség. A dinamikai rendszerek elméletének egyik alapvető eredménye Liouville tétele, miszerint a

$$dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N \quad (2)$$

kanonikus térfogatelemet a Hamilton-féle időfejlődés megőrzi, ami azt jelenti, hogy ez egy természetes mértéket ad meg a fázistéren. Az ergodikusan hipotézis szerint ez a mérték az, amire nézve a mikroállapotok egyenlő

valószínűségűek, ami azt jelenti, hogy az egyensúlyban a fizikai mennyiségek időátlagai megkaphatóak a fázistér-fogat szerinti átlagolással. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az egyetlen releváns megmaradó mennyiség a rendszer összenergiája, ekkor az átlagolást egy vékony energiahéjra kell elvégezni:

$$A_i = \frac{\int_{W(E, \Delta E)} A(q, p) d^N q d^N p}{\int_{W(E, \Delta E)} d^N q d^N p}, \quad (3)$$

ahol az energiahéj a

$$W(E, \Delta E) = \{(q, p) : E - \Delta E \leq H(q, p) \leq E + \Delta E\} \quad (4)$$

által megadott fázistérbeli tartomány.

Az ergodicitás fontos feltétele, hogy a rendszer Liouville-értelmenben nem integrálható¹ legyen. Továbbá az itt tárgyalt fizikai alkalmazásokban csak az ún. termodinamikai határesetben van rá szükség, amikor a szabadsági fokok N száma végtelennek tekinthető.

A klasszikus megközelítésben az ergodicitás az ezen feltételek mellett fellépő dinamikai káosz következménye.² Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy a fenti érvelések nagymértékben heurisztikusak. A kérdéskör precízebb tárgyalása azonban nagyon messzire vezetne, így ettől itt eltekintünk. Annyit érdemes megjegyezni, hogy a (3) feltevésben egy kritikus kérdés, hogy milyen A fizikai mennyiségekre vonatkoztatjuk. Ez a kérdés a kvantumrendszerek esetén is előkerül, amint az alábbiakban látni fogjuk.

Zárt kvantumrendszerek dinamikája

Amennyiben a fenti megfontolásokat kvantumrendszerekre próbáljuk általánosítani, komoly problémák merülnek fel. A klasszikus ergodicitáshoz ugyanis szükséges volt a dinamikai káosz, ami nemlineáris dinamikai rendszerekben lép fel. A kvantumrendszerek időfejlődését leíró Schrödinger-egyenlet azonban lineáris, vagyis a kvantumállapot (hullámfüggvény) szintjén nem beszélhetünk kaotikus viselkedésről.

¹ A rendszer akkor Liouville-integrálható, ha létezik pontosan N darab, egymással involúcióban álló (Poisson-kommutáló) I_i megmaradó mennyiség. Ekkor át lehet térni olyan kanonikus koordinátákra (hatás-szög változók), amikben a dinamika egymástól független kváziperiodikus egydimenziós mozgásokra esik szét. Ebben az esetben a trajektóriák nem járják be a $2N - 1$ dimenziós energiahéjat, hanem az $I_1, \dots, I_N$ megmaradó mennyiségek által meghatározott N -dimenziós tóruszokon maradnak; ez okozza a (3) ergodikusan hipotézis sérülését.

² A Boltzmann-féle H -tétel levezetésében a dinamikai káoszt az ún. molekuláris káosz (Stoßzahlansatz) feltevése helyettesíti.



Takács Gábor a BME Elméleti Fizika Tanszék egyetemi tanára, az MTA doktora, 2020 és 2024 között a BME Fizika Tudományok Doktori Iskola vezetője, 2024 óta a BME Fizikai Intézet igazgatója. 2012-ben elnyerte az MTA Lendület pályázatát, amivel megalapította a BME-MTA „Lendület” Statisztikus Térelméleti Kutatócsoportot. Kutatási területe az alacsony dimenziós kvantumrendszerek, a kvantumtérelmélet és alkalmazásai a kondenzált anyagok elméletében és a statisztikus fizikában.

A továbbblépéshez érdemes a kérdést dinamikailag vizsgálni. Ehhez érdemes bevezetni a kvantumkvens protokollt, ami egyfelől kibillenti a rendszert az egyensúlyból [2], másfelől pedig rutinszerűen megvalósítható pl. csapdázott ultrahideg atomokkal, tehát kísérletileg is jól vizsgálható.

A legegyszerűbb esetben a rendszert a $\hat{H}_0$ Hamilton operátor alapállapotában preparáljuk:

$$\hat{H}_0 |\psi_0\rangle = E_0 |\psi_0\rangle. \quad (5)$$

Ezután a kezdeti ($t = 0$) időpillanatban a rendszer valamilyen paraméterét hirtelen megváltoztatjuk, és a rendszer az új $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$ Hamilton-operátorral fejlődik tovább, amit a kvantumelmélet szerint a következő állapot ír le:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi_0\rangle. \quad (6)$$

Az időfejlődés további vizsgálatához fejtsük ki a kiinduló állapotot a $\hat{H}$ Hamilton operátor E_n energiájú $|n\rangle$ sajátállapotainak bázisán:

$$|\psi_0\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad (7)$$

ahol $\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$, és

$$\sum_n |C_n|^2 = 1. \quad (8)$$

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az alapállapot energiáját vesszük referenciapontnak, azaz $E_0 = 0$.

Az állapot időfejlődése a következőképpen adódik:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n e^{-iE_n t} |n\rangle. \quad (9)$$

Egy $\hat{A}$ operátorral leírt fizikai mennyiség várható értékének időbeli változását a

$$\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \sum_{n,m} C_n C_m^* e^{-i(E_n - E_m)t} \langle m | \hat{A} | n \rangle \quad (10)$$

formulával számíthatjuk ki. Amennyiben az időfejlődés egyensúlyi helyzethez vezet, akkor az egyensúlyi érték megegyezik az időátlaggal, amiből kiesnek az oszcilláló tagok. Következésképpen az egyensúlyban a mennyiség várható értéke a következő alakot ölti:³

$$\langle \hat{A}_{\text{eq}} \rangle = \sum_n |C_n|^2 \langle n | \hat{A} | n \rangle. \quad (11)$$

Ebben az állapotban az energia várható értékére

$$\bar{E} = \langle \hat{H} \rangle_{\text{eq}} = \sum_n |C_n|^2 E_n, \quad (12)$$

míg a varianciára

$$\begin{aligned} \Delta E^2 &= \langle \hat{H}^2 \rangle_{\text{eq}} - \langle \hat{H} \rangle_{\text{eq}}^2 \\ &= \sum_n |C_n|^2 E_n^2 - \left(\sum_n |C_n|^2 E_n \right)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

adódik.

³ Itt az egyszerűség kedvéért feltételeztük, hogy az energiaszintek nem degeneráltak, azaz $E_n \neq E_m$, ha $n \neq m$.

A klasszikus eset mintájára azt várjuk, hogy az egyensúlyban a várható értékeket a mikrokanonikus sokaság adja meg. A fenti formula azonban nemcsak nem egyezik ezzel, hanem az egyensúlyi átlag függ a kiinduló állapot C_n átfedéseitől is az $|n\rangle$ energia-sajátállapotokkal – szemben a klasszikus eredménnyel, ami csak a mikrokanonikus eloszláshoz tartozó energiahéj E energiájának a függvénye.

Tételezzük fel továbbá, hogy a Hamilton-operátor megváltozása olyan tagok összege, amelyek mindegyike lokalizált kölcsönhatást ír le, azaz minden egyes tagja legfeljebb d -test kölcsönhatásnak felel meg, ahol d egy természetes szám (pl. kéttest kölcsönhatások esetén $d = 2$); ez a fizikai rendszerek esetében tipikus esetben számít. Konkrét példaként tekinthetünk rácson ugráló, kemény törzsű (angolul „hard-core”) bozonokat, amelyekre a Hamilton-operátor

$$\hat{H}_{\text{hcb}} = -J \sum_{i,j} (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_i) + U \sum_{i,j} \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad (14)$$

ahol az első tag az ugrálást („hopping”) írja le, $\langle i, j \rangle$ a szomszédos rácshelyekre vett összegzést jelzi, a bozon-operátorok pedig két eltérő rácsponton felcserélnek

$$i \neq j: [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j] = 0. \quad (15)$$

A hard-core tulajdonság miatt egy rácsponton két bozon egyszerre nem lehet, azaz

$$(\hat{b}_i)^2 = 0 = (\hat{b}_i^\dagger)^2. \quad (16)$$

A második tagban $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ a bozonok száma az i rácsponton, és az $U > 0$ a szomszédos rácsponton lévő bozonok közötti taszítást írja le. Feltehetjük, hogy mind a kiinduló $\hat{H}_0$, mind pedig az időfejlődést leíró $\hat{H}$ Hamilton-operátor (14) alakú. Általánosabban azt tesszük fel, hogy ezek a (14)-hez hasonlóan olyan tagok összegeként állnak elő, amelyek külön-külön csak kevés (pl. szomszédos) szabadsági fokok közti kölcsönhatást tartalmaznak.

Ekkor bebizonyítható [3], hogy mind az energia várható értéke, mind pedig a varianciájának négyzete a rendszer méretével extenzíven skálázik

$$\bar{E} \sim N \quad \text{és} \quad \Delta E^2 \sim N, \quad (17)$$

ahol N a rendszert alkotó szabadsági fokok száma. Ennek következtében az energia relatív fluktuációira igaz a klasszikus statisztikus mechanikából ismert

$$\frac{\Delta E}{\bar{E}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (18)$$

összefüggés; ami a termodinamikai határesetben zérushoz tart. Ez azt jelenti, hogy a C_n együtthatók olyan állapotokra koncentrálódnak, amelyek energiája az átlagos $\bar{E}$ körüli relatíve keskeny, tipikusan⁴ ΔE szélességű

⁴ A „tipikusan” kifejezés itt azt jelenti, hogy a ΔE szélességű sávon kívül a C_n átfedések exponenciálisan gyorsan csökkennek. Ezért az összegzés megszorítható egy ΔE -vel összemérhető szélességű sávra, és az ezzel

energiasávba esik. Ezen az intervallumon felírható a mikrokanonikus átlag megfelelője:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{mc}} = \frac{1}{\mathcal{N}(\bar{E}, \Delta E)} \sum_{n | E_n - \bar{E} \leq \Delta E} \langle n | \hat{A} | n \rangle, \quad (19)$$

ahol $\mathcal{N}(\bar{E}, \Delta E)$ az $[\bar{E} - \Delta E, \bar{E} + \Delta E]$ intervallumba eső E_n energiaszintek száma. Ugyanakkor a (11) egyensúlyi átlag felírható

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{eq}} \approx \sum_{n | E_n - \bar{E} \leq \Delta E} |C_n|^2 \langle n | \hat{A} | n \rangle \quad (20)$$

alakban, ahol az összegzést megszorítottuk a fent jelzett energiasávban lévő $|n\rangle$ sajátállapotokra, hiszen a C_n átfedések is ide koncentrálnak. Ha feltételezzük, hogy a megfigyelhető mennyiség várható értéke az energiasajátállapotokban csak az energia-sajátérték sima függvénye:

$$\langle n | \hat{A} | n \rangle = f_A(E_n), \quad (21)$$

akkor egyfelől a sáv keskeny volta miatt

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{mc}} \approx f_A(\bar{E}) \quad (22)$$

másfelől pedig (7)-et felhasználva

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{mc}} \approx f_A(\bar{E}) \sum_n |C_n|^2 = f_A(\bar{E}), \quad (23)$$

azaz

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{eq}} \approx \langle \hat{A} \rangle_{\text{mc}}. \quad (24)$$

Ez az egyenlőség annál pontosabban teljesül, minél kisebb az energiasáv relatív szélessége, azaz a termodinamikai határesetben ($N \rightarrow \infty$) egzakt lesz.

A sajátállapot-termalizációs hipotézis (STH)

A (20) alatt megfogalmazott feltevés, ami szerint az energiasajátállapotokban az $\hat{A}$ megfigyelhető mennyiség várható értéke az energiasűrűség sima függvénye:

$$\langle n | \hat{A} | n \rangle = f_A(E_n), \quad (25)$$

*sajátállapot-termalizációs hipotézis (STH)*⁵ néven ismert [4, 5], ami nem más, mint a (3) alatt felírt ergodikus hipotézis kvantumozott megfelelője. Fontos észrevenni, hogy ez a hipotézis nem teljesülhet tetszőleges állapotban, sem pedig tetszőleges $\hat{A}$ mennyiségre.

Az állapot tekintetében olyan sajátállapotokról van szó, amiknek a gerjesztési energiája extenzív, azaz (17)-nek megfelelően

$$E_n \sim N \quad (26)$$

okozott hiba az $N \rightarrow \infty$ termodinamikai határesetben exponenciálisan gyorsan eltűnik. Az egyszerűség kedvéért ezt úgy jelezzük, hogy az összegzést megszorítjuk az $[\bar{E} - \Delta E, \bar{E} + \Delta E]$ intervallumra; ez az egyszerűsítés a lényegét nem érinti.

⁵ A kifejezés angol megfelelője Eigenstate Thermalisation Hypothesis, rövidítése ETH.

Az $\hat{A}$ operátor sem lehet tetszőleges. Ha például egy energia-sajátállapotra vetítő $\hat{P}_m = |m\rangle\langle m|$ projektort veszünk, akkor

$$\langle n | \hat{P}_m | n \rangle = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}, \quad (27)$$

ami nagyot ugrik két egymáshoz nagyon közeli energiájú sajátállapot között is. Egy jó választás olyan $\hat{A}$ operátorokra koncentrálni, mint pl. a kemény törzsű bozonok esetében az $\hat{n}_i$ helyi betöltési szám, ami egy kevés szabadság foktól függő (lokális) operátor, vagy mint a (14) Hamilton-operátor, ami ilyenek összegeként áll elő. Ilyen esetekben numerikus vizsgálatokkal azt találták, hogy az STH teljesül [3], és emellett sok rendszer esetén erős elméleti érvek is felhozhatók.

A sajátállapot-termalizációs hipotézis általános érvényű igazolása (a klasszikus ergodicitáshoz hasonlóan) nem egyszerű feladat. Egyfelől alátámasztható direkt numerikus vizsgálatokkal [3], ez azonban csak relatíve kis rendszerekre végezhető el, mert a releváns mátrixok mérete a szabadsági fokok N számával exponenciálisan nő. Egy másik lehetőség véletlenmátrix-módszerek használata [4], amik segítségével az általános (nem integrálható) Hamilton-operátor matematikailag modellezhető; ez azonban figyelmen kívül hagyja, hogy a (14)-hez hasonló mátrixok nem triviális (pl. lokális) struktúrával rendelkeznek. A vizsgálatok során az is kiderült, hogy az STH kibővítendő a nem diagonális $\langle n | \hat{A} | m \rangle$ mátrixelemekre tett feltevéssel [5], mivel ez garantálja, hogy a rendszer az időfejlődése során az egyensúlyhoz tart.

A jelzett nehézségek ellenére mára komoly bizonyíték gyűlt össze arra vonatkozólag, hogy az STH a kvantumrendszerek termalizációjának feltétele, azaz az STH az ergodikus hipotézis helyes általánosítása kvantumrendszerekre [6].

Az STH folyományai

Az STH számos érdekes következtetésre vezet. Az első érdekesség, hogy nem mindegy, milyen $\hat{A}$ megfigyelhető mennyiséget tekintünk. Amint ezt fentebb jeleztük, az STH természetes módon működik olyan mennyiségekre, amik kevéstesttagok összegei. A termodinamikában használt állapotjelzők, mint pl. a belső energia, vagy a részecskeszám pont ilyenek. Ez összecseng Khinchin⁶ megközelítésével, amit a klasszikus rendszerek ergodicitására dolgozott ki [7].

A másik érdekesség, hogy mivel az $\hat{A}$ mennyiségek kevés szabadsági fokból álló részrendszertől függenek csak, a rendszer többi szabadsági foka hőfürdőként jelenik meg, vagyis a mikrokanonikus sokaság egybeesik a kanonikus sokasággal. Az ehhez tartozó egyensúlyi

⁶ A. Ya. Khinchin (1894–1959) szovjet matematikus, az A. N. Kolmogorov (1903–1987) által alapított szovjet valószínűségelméleti iskola neves képviselője.

hőmérséklet könnyen kiszámítható: az energiamegmaradás miatt a Hamilton-operátor kezdő állapotban vett és egyensúlyi várható értéke ugyanaz, ahonnan a következő egyenletet kapjuk:⁷

$$\langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-E_n/T}}{\sum_n e^{-E_n/T}}, \quad (28)$$

ami egy egyenletet ad az egyensúlyi T hőmérsékletre.

A harmadik érdekesség, hogy az energiahéjon vett (19) mikrokanonikus átlag megegyezik az egyes sajátállapotokban vett (25) átlaggal, azaz minden egyes olyan sajátállapot, aminek a gerjesztési energiája (26)-nak megfelelően extenzív, maga is hőmérsékleti egyensúlynak felel meg, amennyiben méréseink a fentebb tárgyalt megfigyelhető mennyiségek osztályán belül maradnak. Az időfejlődés során tulajdonképpen anynyi történik, hogy a nem diagonális tagok fázisai véletlenszerűen forogva kiátlagolódnak, és a kapott (11) diagonális sokaság azért ekvivalens a hőmérsékleti egyensúllyal, mert minden egyes tagja már eleve külön-külön annak felel meg.

Az STH sérülése

A fentiekben láttuk, hogy az STH a kvantumrendszerek termalizációjának elégséges feltétele. Az irodalomban ugyan javasoltak alternatívákat, azonban eddig minden jel arra mutat, hogy az STH egyben a termalizáció szükséges feltétele is [8].

Ugyanakkor az STH nem minden rendszerre igaz; a bevezetésekor láttuk, hogy bizonyos feltevésekkel kellett élnünk a Hamilton-operátorra, és a releváns mennyiségek osztályára is, továbbá, hogy az STH még ezen feltételek mellett sem igazolt mint matematikai tétel. Több olyan mechanizmus is felmerült, amelyek az STH sérüléséhez, és ezzel a termalizáció megakadályozásához vezetnek. Az egyik ilyen mechanizmus az integrálhatóság, amikor a klasszikus Liouville-integrálhatóság általánosítása történik meg kvantumos soktest-rendszerekre;⁸ ebben az esetben a rendszer ugyan relaxál, de az STH nem teljesül, és így az egyensúlyi állapot nem termikus [10]. Egy másik mechanizmus a rendezetlenségből ered, ez a soktest-lokalizáció, ami az Anderson-lokalizáció kiterjesztése kölcsönható soktest-rendszerekre [11].

Az integrálhatóság, valamint a rendezetlenség a klasszikus rendszerekből is ismert, ergodicitást sértő mechanizmusok. Egy másik érdekes mechanizmus az ún. kvantumsebhelyek [12] létezése, aminek a klasszikus megfelelői az instabil periodikus pályák. A kvantumrendszerekben azonban újfajta, az STH-t sértő mechanizmusok is felmerültek. Ilyen pl. a bezáró kölcsönhatások hatása [13], amiről az érdeklődő olvasó a *Fizikai*

Szemle korábbi számában olvashat [14], valamint a Hilbert-tér fragmentációja [15].

Összefoglalás

A közelmúlt kutatásai nyomán megerősítést nyert, hogy a Boltzmann-féle ergodikus hipotézis általánosítása kvantumrendszerekre a sajátállapot-termalizációs hipotézis. A klasszikus esethez képest ennek számos újszerű vonása van; az egyik, hogy maguk az egyedi sajátállapotok is termikusak. Egy másik újszerű aspektus a megfigyelhető mennyiségek osztályának hangsúlyos szerepe is. Végül pedig a kvantumrendszerekben az ergodicitás sértésének új, a klasszikus statisztikus fizikában nem ismert mechanizmusai merültek fel.

Ebben a cikkben elsősorban az egyensúlyi állapottal foglalkoztunk, fő kérdésként azt vizsgálva, hogy mi biztosítja az egyensúly termikus jellegét. Azzal a kérdéssel kapcsolatban, hogy milyen értelemben és hogyan kerülnek egyensúlyba a sok szabadsági fokú kvantumrendszerek, a jelen számból *Kormos Márton* cikkét ajánljuk az érdeklődő olvasó figyelmébe.

Irodalom

1. Boltzmann L. (1898): Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig: J. A. Barth. [Angolul: Lectures on Gas Theory (Dover Books on Physics), Dover Publications (1995).]
2. Calabrese P., Cardy J. (2007): Quantum quenches in extended systems. J. Stat. Mech. P06008.
3. Rigol M., Dunjko V., Olshanii M. (2008): Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems. Nature 452, 854–858.
4. Deutsch J. M. (1991): Quantum statistical mechanics in a closed system. Phys. Rev. A 43: 2046.
5. Srednicki M. (1994): Chaos and quantum thermalization. Phys. Rev. E 50, 888.
6. D'Alessio L., Kafri Y., Polkovnikov A., Rigol M. (2016): From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. Adv. Phys. 65: 239.
7. Khinchin A. Ya. (1949): Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, Dover, New York.
8. Rigol M., Srednicki M. (2012): Alternatives to eigenstate thermalization. Phys. Rev. Lett. 108, 110601.
9. Caux J.-S., Mossel J. (2011): Remarks on the notion of quantum integrability. J. Stat. Mech. (2011) P02023.
10. Rigol M., Dunjko V., Yurovsky V., Olshanii M. (2007): Relaxation in a completely integrable many-body quantum system: An ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1D lattice hard-core bosons. Phys. Rev. Lett. 98, 050405.
11. Nandkishore R., Huse D. A. (2015): Many-body localization and thermalization in quantum statistical mechanics. Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 6, 15–38.
12. Turner C. J., Michailidis A. A., Abanin D. A., Serbyn M., Papić Z. (2018): Weak ergodicity breaking from quantum many-body scars. Nature Phys. 14, 745–749.
13. Kormos M., Collura M., Takács G., Calabrese P. (2017): Real-time confinement following a quantum quench to a non-integrable model. Nature Phys. 13, 246–249.
14. Takács G. (2025): Elérlik-e az egyensúlyt a zárt kvantum-rendszerek? – amikor a „fénykúp” bezárul. Fizikai Szemle 2025/3, 74–78.
15. Sala P., Rakovszky T., Verresen R., Knap M., Pollmann F. (2020): Ergodicity-breaking arising from Hilbert space fragmentation in dipole-conserving Hamiltonians. Phys. Rev. X10, 011047.

⁷ Itt a hőmérséklet skáláját úgy választottuk meg, hogy a Boltzmann-állandó értéke 1 legyen.

⁸ Megjegyezzük, hogy az integrálhatóság precíz definíciója kvantumos esetben egyáltalán nem egyszerű feladat, ld. [9].