

# AZ EVOLÚCIÓS JÁTÉKELMÉLET ÉS A STATISZTIKUS FIZIKA ÖSSZEFONÓDÁSA

Szabó György

HUN-REN Energiatudományi Kutatóközpont, Budapest

E-mail: szabo.gyorgy@ek.hun-ren.hu

## Evolúciós játékelmélet

A sokszereplős evolúciós játékelméleti modellek legegyszerűbb változataiban a játékosok közötti párkölcsönhatást a hagyományos játékelmélet nyereménymátrixa definiálja. A játékelmélet Neumann János által kidolgozott matematikai leírásában [1] két intelligens és önző játékos  $n$  lehetséges döntés (továbbiakban stratégia) valamelyikét választva kívánja saját nyereményét maximálni. Mindkét játékos valós számmal jellemzett nyereménye függ a saját maga, illetve a társa által választott stratégiától. Pontosabban, a nyereménymátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme az első játékos nyereményét számszerűsíti, ha ő az  $i$ -edik, társa pedig a  $j$ -edik stratégiát választotta. Szimmetrikus játék esetén a játékosok ekvivalensek, emiatt azonos stratégia választása esetén a nyereményük is azonos lesz. Különböző stratégia választása esetén a nyereményük lehet különböző, de ha stratégiát cserélnek, akkor a nyereményük is felcserélődik. A lehetséges kölcsönhatások halmaza jelentősen szűkül a szimmetrikus játékokon belül, amikor a játékosok nyereménye minden lehetséges stratégiapárnál azonos. Ilyenkor az egyéni és a közösségi érdek egybeesik, ami leegyszerűsíti az optimális stratégiapár meghatározását. Az ennek megfelelő evolúciós játékelméleti modellekben az optimális stratégiaeloszlás kiszámítása egybeesik a sokrészecskés fizikai rendszerek alapállapotának meghatározásával, ahol a maximális nyereményű állapot meghatározása helyett a minimális energiájú állapotot keressük.

Az evolúciós játékelmélet alap gondolata az elméleti biológia területéről indult hódító útjára. Price és Maynard Smith [2] felismerte, hogy játékelmélet nyereménymátrix-fogalma használható az egymással kölcsönható biológiai fajoknál a versengés eredményeképpen kialakuló utódlétrehozó-képesség matematikai leírására. Erre a kapcsolatra épülnek azok a populációdinamikai modellek, amelyek egy bilineáris differenciálegyenlet-rendszerrel írják le a fajok gyakoriságának időfüggését [3].



Szabó György a HUN-REN Energiatudományi Kutatóközpont nyugdíjas kutatója, ahol korábban a Komplex Rendszerek osztály kutatásait irányította. Kutatóként részt vesz a HUN-REN Evolúciótudomány Intézet munkájában is. Fizikus diplomáját és PhD-fokozatát oktatóként az ELTE-n szerezte. Fő kutatási területe kezdetben a szilárdtest-fizikai jelenségek elméleti vizsgálata volt. Az utóbbi 35 évben az itt megszerzett ismereteket az evolúciós játékelmélettel leírható jelenségek elemzésénél használja. Eredményeit 2021-ben Széchenyi-díjjal jutalmazták.

Az evolúciós játékelmélet további fejlődésének eredménye, hogy a játékosok közötti párkölcsönhatás paraméterei mellett figyelembe kellett venni a kölcsönhatási kapcsolatrendszer és a dinamikai szabályt, ami definiálja, hogy miképpen módosítják stratégiájukat a szereplők [4, 5]. Ezek a szabályok természetesen függenek attól, hogy a játékosok stratégiája egy baktériumfajta különböző mutáns változatait, növényeket, állatokat, intelligens embereket vagy azok csoportjainak magatartását képviselik.

A szilárdtest-fizikai modellekben az atomok fajtáját, állapotát (pl. a mágneses momentum irányát), illetve az atom jelenlétét vagy annak hiányát jellemezhetjük a játékelméleti stratégia fogalmával. Ez a lehetőség indította el az anyagtudományokban kiemelkedően sikeres matematikai módszerek alkalmazását az evolúciós játékelméletben. Kezdetben ezek a módszerek erősen kötődtek a kristályos anyag tulajdonságaihoz, illetve a fizika törvényei által megengedett lehetőségekhez.

Az első térbeli evolúciós játékelméleti modellben [6] a játékosok egy négyzetrácson helyezkedtek el, és azonos stratégiát használtak a szomszédok elleni azonos játékokban. A kölcsönhatás egy szűk környezetre (pontosabban első- és esetenként másodsomszédokra) korlátozódott. A játékosok stratégiájának módosításánál a sejtautomaták dinamikai szabályát használták. Ennél az evolúciós dinamikánál a játékosok diszkrét időpontokban (pl.  $t = 0, 1, 2, 3$  stb.) meghatározták az összegzett nyereményeiket, majd mindenki átvette a legsikeresebb szomszéd stratégiáját. Ezt követően a valóságnak jobban megfelelő modellezés igénye két jelentős módosítást kényszerített ki, amelyek semlegesítik az egyidejű stratégiaváltás mesterséges következményeit és megengedik a hibázást. A manapság leggyakrabban használatos dinamikai szabályoknál egy véletlenül kiválasztott játékos módosítja a stratégiáját, és ezt az elemi lépést ismételjük – hasonlóan ahhoz, ahogyan a kinetikus Ising-modellben változnak az állapotok az egyes rácspontokon [7].

A kinetikus Ising-modellben a Glauber-dinamika biztosítja azt, hogy a nagyon sok „játékosból” álló rendszer a termodinamikai egyensúly felé fejlődik. Ennél a dinamikai szabálynál a spinállapotok választásának valószínűsége az energia és a hőmérséklet arányának olyan függvénye, ami biztosítja, hogy az elegendően sok spinválogatás után kialakuló egyensúlyi állapotban egy adott mikroszkopikus állapot valószínűségét a Boltzmann-eloszlás írja le. Ebben a termodinamikai állapotban teljesül a részletes egyensúly, miszerint két mikroszkopikus állapot között az oda-vissza átmenet

valószínűsége megegyezik. Ezt a dinamikai szabályt használjuk különböző közelítő módszereknél és a Monte Carlo-szimulációkban, amikor a sokrészecskés rendszerekben az egyensúlyi állapot makroszkopikus jellemzőit vizsgáljuk. Ezzel a dinamikai szabállyal azonos az evolúciós játékelmélet ún. „logit” dinamikája [8] azzal a különbséggel, hogy egy új stratégia választásának valószínűsége az adott játékos lehetséges új nyereményeinek és egy „hőmérséklettel” jellemzett zaj hányadosának függvénye. Az egyetlen említésre méltó különbség, hogy a sokrészecskés fizikai rendszerben a Glauber-dinamika az alacsonyabb energiájú állapot választását támogatja. Ezzel szemben a hasonló evolúciós játékelméleti modellben a magasabb nyereményű stratégia választása érvényesül. A matematikai módszerek alkalmazásánál ez a különbség lényegtelen, és emiatt a statisztikus fizika módszereivel számszerűsítve értelmezhetőek a megfelelő evolúciós játékelméleti modellek jelenségei. Például a kétdimenziós Ising-modellben a mágnesezettség hőmérsékletfüggése leírja a stratégiák arányának zajfüggését egy olyan evolúciós játékelméleti modellben, ahol az ún. koordinációs játék definiálja a kölcsönhatást, és emellett a játékosok térbeli elhelyezkedése és kölcsönhatási kapcsolatrendszere is hasonló. A modellek hasonlósága természetesen kiterjeszthető olyan többstratégias koordinációs játékokra is, amelyek azonosak a Q-állapotú Potts-moddal [9] vagy az Ashkin-Teller-moddal [10]. Érdemes kiemelni azokat a kölcsönhatásokat, amelyek a fizikában egy külső (pl. mágneses) térnek megfelelő kölcsönhatást írnak le. Ez utóbbi esetben a szereplők egymástól függetlenül választják a külső tér által diktált stratégiát, és a stratégiák választásának valószínűségét az átlagtér-közelítés számszerűsíti.

Az anyagtudományban nagyon hasznosnak bizonyult a Kawasaki-dinamika használata, ami figyelembe veszi az anyagmegmaradást; és megfelelő rácsgázmodellekkel olyan állapotábrákat származtathatunk, amelyek a hőmérséklet és az összetétel függvényében mutatják az egyensúlyi állapotokat. A Kawasaki-dinamikánál két szomszédos atom cserélhet helyet megfelelő valószínűséggel. A hasonló játékelméleti modell egy ökológiai rendszerben két élőlény helycseréjének következményeit képes számszerűsíteni.

A Price és Maynard Smith által elindított evolúciós játékelmélet olyan biológiai rendszerek leírásának felelt meg, ahol a kölcsönhatás bármelyik két szereplő között azonos valószínűséggel befolyásolja a fejlődési folyamatot. Ez a feltétel teljesül azokban a rendszerekben, ahol a részvevők állandó keveredése biztosított. A fizikai rendszerekben ez az idealizált kölcsönhatás jelenik meg az átlagtér-közelítésekben, ami sok esetben képes elfogadható pontossággal számot adni a folyamatokról. A szilárdtestfizikán belül a kristályos anyagoknál a szomszédságra lokalizált kölcsönhatás következményeinek pontosabb leírására számos olyan módszer (pl. a párközelítést) fejlesztettek ki, amelyek hasznosnak bizonyultak a térbeli evolúciós játékelmélet-modellek

tanulmányozásánál is. Ezzel párhuzamosan mindkét tudományterületen belül megindultak ezen módszerek sikeres továbbfejlesztései olyan esetekre, amikor a kristályrács helyett egy gráffal jellemezzük a kölcsönhatási kapcsolatrendszert. Ezt a folyamatot természetes módon katalizálta a hálózatkutatás fejlődése, aminek előnyei, illetve hasznossága a társadalmi és biológiai jelenségek értelmezésénél érvényesülnek.

## Újdonságok a termodinamikai rendszerekhez képest

Az előző fejezet legfontosabb üzenete, hogy az evolúciós játékelméleti modellek egy részhalmaza azonos egy megfelelő kölcsönhatással jellemzett sokrészecskés fizikai rendszerrel, ahol a termodinamikai állapot vizsgálatánál a statisztikus fizika módszerei sikeresek. Az evolúciós játékelméleti modellek azonban tartalmazhatnak számos olyan tulajdonságot, amelyeknél az alkalmazhatóság eredeti feltételei nem teljesülnek. Korábbi vizsgálatok kiderítették, hogy a nyereménymátrix (a vektorokhoz hasonlóan) felbontható olyan ortogonális elemi komponensek összegére, amelyek négyféle, alapvetően különböző jellegű kölcsönhatást képviselnek [11]. Az egyik ilyen kölcsönhatástípus az Ising-modellnek megfelelő koordinációs kölcsönhatások lineáris kombinációja a lehetséges stratégiapárok között. Emellett létezik két olyan (ortogonális) kölcsönhatástípus, amikor a játékosok nyereménye csak az egyik játékos stratégiájától függ. Az egyik ilyen esetben a játékos nyereménye csak a saját döntésétől függ. A másik esetben a nyeremény nagyságát csak a játékos társ döntése határozza meg.

Az utóbbi két ortogonális „kölcsönhatás” nyereménymátrixában azonos értékek találhatók a mátrix soraiban illetve oszlopaiban. Ezen kölcsönhatások hiánya a fizikai rendszerekben kötődik a Hamilton-operátorok hermitikus voltahoz. Pontosabban fogalmazva, az ön- és társfüggő nyereményű játékok összegének szimmetrikus komponensei jelen vannak, és számszerűsítik a külső tér hatását. Ha csak ez a komponens írja le a „kölcsönhatást”, akkor valójában nincs is kölcsönhatás a szereplők között, akik emiatt egymástól függetlenül és azonos módon követik a külső tér, illetve zaj által meghatározott választást.

Ugyanakkor az ön- és társfüggő nyereményű játékok összegének antiszimmetrikus komponense felelős az olyan *társadalmi csapdahelyzetek* (vagy társadalmi dilemmahelyzetek) kialakulásáért, amikor az egyéni érdekek által diktált stratégiapár választásánál a játékosok nyereménye kisebb lehet annál, mint amit a közös érdek érvényesítésénél kaphatnának [12, 13]. Ilyen párkölcsönhatást ír le az adományozó játék, amikor a játékosok arról döntenek, hogy hajlandóak-e befizetni egységnyi költséget azért, hogy a játékos társ ennél nagyobb ( $r > 1$ ) nyereményt kapjon. Ebben a kétszemélyes kétstratégias játékban mindkét szereplő két lehetőség valamelyikét választhatja, amelyek az önzetlen (C stratégia), illet-

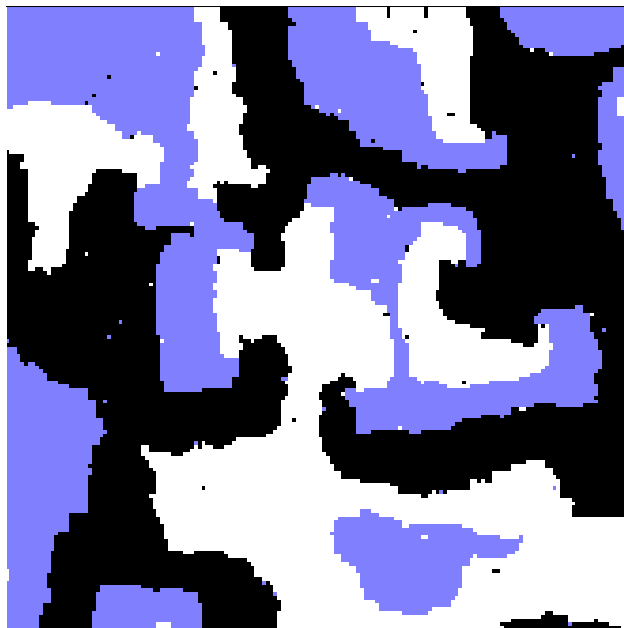
ve az élőködő vagy potyázó magatartást (D stratégia) képviselik. Az önzetlen játékos befizeti az egységni jövedelmet azért, hogy a társa ennél magasabb jövedelmet kapjon. Az élőködő játékos nem hoz ilyen áldozatot, és emiatt nem növeli társa (vagy társai) jövedelmét. Ilyen élethelyzetekben az egyéni érdek az önző magatartás választását diktálja mindkét szereplő számára, akik emiatt nem részesülnek a kölcsönös önzetlenség esetén megérdemelt magasabb jövedelemből. Ez a társadalmi csapda többstratégiás játékoknál is létezhet, mert mindkét önző játékosnál az ön- és társfüggő nyereseményű komponensek összegének antiszimmetrikus része ugyanazon stratégia választását diktálja, amikor viszont mindkét játékos nyeresége nulla lesz. Ez az ámításra hasonlító hajtóerő akkor is működik, amikor koordinációs komponensek megléte magasabb nyeresémet biztosítana egy másik stratégiapár választásánál, és elegendően erős hatásnál az összesített nyeresemény csökkenését okozza. Természetesen létezhet olyan kölcsönhatás is, amikor mindkét komponens ugyanazt a választást támogatja. Ebben az esetben az antiszimmetrikus komponens hasznos lehet, mert csökkenti a zaj által okozott társadalmi veszteséget.

Mindhárom eddig említett ortogonális komponensnél és lineáris kombinációjuknál létezik egy potenciál [14, 15], ami a stratégiapárok (mikroszkopikus állapotok) terében az egyoldalú stratégiaválasztások hajtóerejét (a nyeresemény növekedését) összesíti hasonlóan a fizikai rendszerekben definiált potenciális energiához. Valójában ezek azok a kölcsönhatások, amelyeknél a rendszer a Boltzmann-eloszlásba fejlődik, és érvényesülnek a termodinamika törvényei, ha logit dinamika írja le a fejlődést. Érdemes megemlíteni, hogy koordinációs játékoknál a párpotenciál és a nyereséymátrix azonos, és a sokszereplős rendszereknél a megfelelő párpotenciálok összege felel meg a teljes rendszer potenciáljának.

A játékelméleti kölcsönhatások különleges tulajdonsága, hogy a társfüggő nyereseményű elemi komponensek nem adnak járulékot a potenciál értékéhez, mert nem befolyásolják az egyoldalú stratégiaváltoztatás hajtóerejét. Emiatt, ha logit dinamika vezérli a fejlődést, akkor ezek a komponensek a stratégiák gyakoriságát változtatlanul hagyják, miközben a résztvevők átlagos nyeresége növekedhet vagy csökkenhet. Ez a tulajdonság összhangban van társadalmi csapdahelyzetek létezésével.

A negyedik típusú ortogonális kölcsönhatás a ciklikus dominancia lehetőségeit összegzi olyan módon, hogy tartalmazza a kő-papír-olló játékra jellemző körbeverést az egymástól független stratégiahármasok között. Ez a kölcsönhatástípus három vagy annál több stratégia esetén létezik, megakadályozza a potenciál létezését, és ezzel együtt a termodinamikai viselkedést. A nyereséymátrixa antiszimmetrikus, és a mátrixelemek összege nulla minden sorban és oszlopban. További általános tulajdonsága, hogy segíti a stratégiák együtt létezését és a térbeli stratégiatársulások kialakulását szinte mindegyik evolúciós dinamikai szabály esetében. Az

egyik legismertebb ilyen jelenség az önszervező térbeli mintázatok kialakulása, amit az 1. ábra illusztrál.



1. ábra. Három stratégia (fehér, kék, és fekete) tipikus térbeli eloszlása egy olyan evolúciós játékelméleti modellben, ahol a négyzetrácson elhelyezkedő szomszédos játékosok között a háromállapotú Potts-modell és egy kő-papír-olló játék összege definiálja a kölcsönhatást, az egymást követő egyéni stratégiaváltoztatást pedig a Monte Carlo-szimulációkban gyakran használt Glauber- (vagy logit) dinamika vezérli

A háromállapotú Potts-modell tekinthető három olyan Ising-típusú koordinációs kölcsönhatás összegének, ahol a lehetséges három különböző stratégiapár között azonos erősségű az egyforma stratégia választásának a támogatottsága. Egy kritikus hőmérséklet alatt a véletlen kezdőállapotból indított rendszerben olyan folyamatosan növekvő (rendezett) tartományokat figyelhetünk meg, amelyekben belül az egyik stratégia többségben van. Véges méret esetén előbb-utóbb uralkodóvá válik a három rendezett eloszlás valamelyike, és kialakul a spontán szimmetriasérülés, aminek mértéke (rendparamétere) függ a hőmérséklettől, és egy kritikus hőmérséklet felett eltűnik. Ha a megfelelő evolúciós játékelméleti modellben a kölcsönhatást kiegészítjük egy gyenge kő-papír-olló típusú komponenssel, akkor a rendezett tartományok növekedését leállítja a közöttük kialakuló ciklikus invázió. Az 1. ábrán a fekete tartományok terjeszkednek a fehér tartományok kárára. Hasonló módon hódítja el a fehér tartomány a szomszédos kék területet és a kék a feketét. A kialakuló önszervező mintázat jellegzetessége, hogy a háromféle tartományt elválasztó határvonalak találkozási pontja körül jobbra vagy balra forgó spirálkarokat figyelhetünk meg, ha követjük a mintázat időbeli fejlődését. A szakirodalomban ezeket a forgó spirálkarokat „vortex”-nek illetve „antivortex”-nek nevezik, mert a részecske-antirészecske párokhoz hasonlóan keletkeznek, illetve semmisülnek meg.

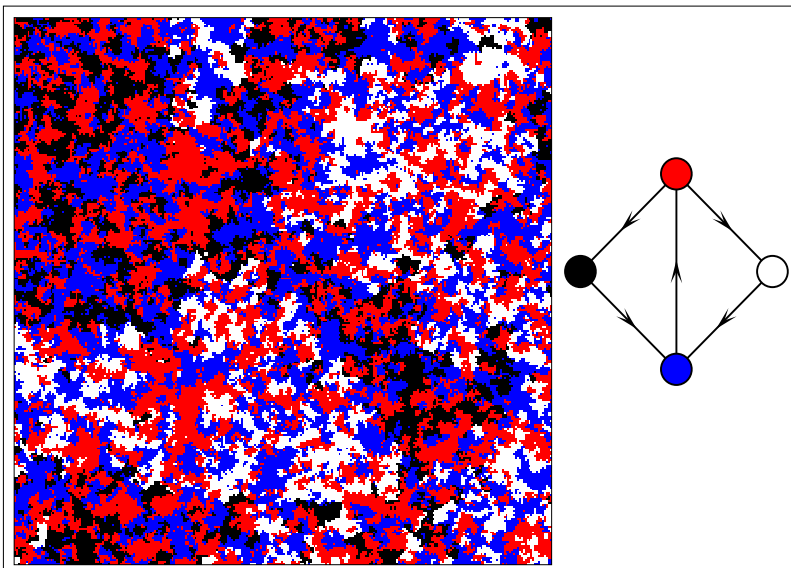
A kő-papír-olló játékra jellemző ciklikus dominancia megfigyelhető a Petri-csésze táptalaján tenyésztett egysejtűek között [16], ha azok képesek olyan mérgező anyag termelésére, amivel megölhetik azokat a szomszédos társaikat, akik képtelenek a megfelelő ellenanyag termelésére. Ebben az ökológiai rendszerben egy sejt három mutánsa között zajlik a vegyi háború. A „mérgező” mutáns előállít egy olyan mérgező anyagot, ami elpusztítja azokat a sejteket, amelyek nem rendelkeznek a mérge hatását semlegesítő molekulákkal. Ezt az ellenmérget természetesen a mérgező sejtnek is termelnie kell, hogy ne ölje meg önmagát. Az „ellenálló” mutáns azonban csak ezt az ellenanyagot termeli, emiatt felépítése egyszerűbb, és gyorsabban képes osztódni, ami előnyt jelent a mérgezővel szemben a terület (élelem) megszerzéséért folytatott küzdelemben. A harmadik (ún. „érzékeny”) mutáns a legegyszerűbb, mert szerkezetéből hiányzik a mérge és annak ellenanyagát előállítani képes biokémiai háttér. Ennek következtében a gyorsabb sejtosztódás miatt előnyt élvez az ellenálló mutánsokkal szemben, de elpusztul a „mérgező” mutánsok szomszédságában. Egy ilyen biológiai rendszerben a sejtek mutánsai több mérge és ellenanyag előállítására is képesek lehetnek, aminek eredménye egy olyan ragadozó-zsákmány viszony, ami számos kő-papír-olló jellegű hármas körbeverést tartalmaz. A hasonlóan több hármas ciklust tartalmazó ragadozó-zsákmány modellek vizsgálata olyan térbeli stratégiatársulások és védelmi szövetségek kialakulását mutatta, amelyek között szintén megfigyelhető a ciklikus dominancia, ami már képes fenntartani nagyon sok faj együttlétét.

A kő-papír-olló játékok kombinálása a többstratégias modellekben a jelenségek olyan széles skáláját hozza felszínre, amelyek részletes elemzése meghaladja egy ismeretterjesztő cikk lehetőségeit. A legegyszerű-

rűbb példában négy stratégia (A, B, C, D) szerepel, ahol kő-papír-olló típusú körbeverés létezik az A-B-C és az A-D-C stratégiák között. Hasonló kölcsönhatás vezérelheti egy négyfajos ragadozó-zsákmány modellben a fajok kétdimenziós térbeli eloszlásának fejlődését, ha a B és D fajok nem eszik meg egymást. A biológiában gyakran használt ragadozó-zsákmány modellek egy újabb lehetséges evolúciós dinamikát képviselnek. A legegyszerűbb evolúciós szabálynál kiválasztunk két szomszédot egy rács pontjain helyet foglaló egyedek közül. Ha az egyik ragadozója a másiknak, akkor a ragadozó megeszi a zsákmány szomszédját és az üresen maradt helyet a ragadozó utódja foglalja el. Ezen elemi folyamat ismétlődése eredményezi a 2. ábrán bemutatott komplex mintázatképződést, ahol a négyzetláncra elhelyezett fajok két (jól megkülönböztethető, háromfajú és növekvő) térbeli társulást hoznak létre. Makroszkopikus skálán a rendszer viselkedése hasonlít a kétállapotú szavazó modellre, ami a kétdimenziós rendszerekben egy nagyon lassú doménnövekedést jósol. Ennek következtében ebben a rendszerben előbb vagy utóbb a B (fekete) vagy D (fehér) faj kihal.

A harmadik példa az evolúciós játékelmélet leggyakrabban tanulmányozott kérdéséhez, az élősködés és az önzetlenség evolúciós versengéséhez kötődik két faj között, amelyek egyedei két egymás feletti négyzetláncra helyezkednek el egy legegyszerűsített matematikai modellben [17]. Itt a szereplők közötti párkölcsönhatást az előző fejezetben ismertetett adományozó játékkal definiáljuk. A kétfajos matematikai modell különlegessége, hogy a felső négyzetláncra elhelyezkedő faj egyedei ezt a játékot az alsó rétegen hozzájuk legközelebb eső öt olyan egyeddel játsszák, akik a másik fajhoz tartoznak. Ehhez hasonlóan, az alsó réteg egyedeinek jövedelme a felső négyzetláncra található öt legközelebbi játékosal játszott adományozó játékból származik. Ez a térbeli szerkezet lehetőséget ad annak tanulmányozására, hogy mi történik akkor, amikor a sikeresebb szomszéd stratégiájának utánzására épülő evolúciós szabály az azonos fajhoz tartozó egyedekre vonatkozik, ami ebben az esetben az azonos rétegben található négy legközelebbi szomszédra korlátozódik.

A legtöbb utánzásra épülő dinamikai szabálynál az utánzás valószínűségét egy olyan Fermi–Dirac-függvény definiálja, amiben az energia helyett a két játékos nyereménkülönbsége szerepel, a hőmérsékletnek megfelelő paraméter pedig a döntés bizonytalanságát (vagy a külső körülményekből származó zajt) jellemzi. Ez a modell olyan élethelyzeteket képvisel, amikor a kölcsönhatási és utánzási kapcsolatrendszer különbözik a sokszereplős rendszerben.

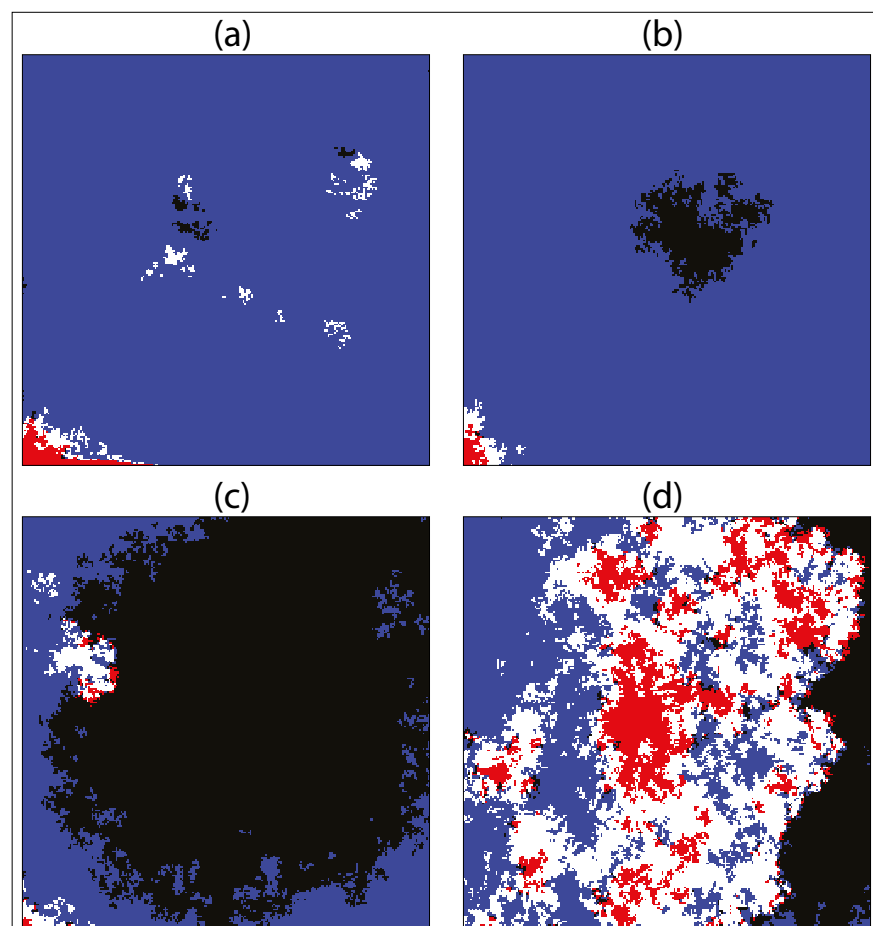


2. ábra. Jellegetes térbeli eloszlás a négyzetláncra egy olyan négyfajos ragadozó-zsákmány modellben, ahol a ragadozó-zsákmány viszonyokat a jobb oldali táplálékhálózat mutatja. Az idő múlásával együtt növekszik azon tartományok mérete, ahol a fehér vagy a fekete faj hiányzik a megfelelő kő-papír-olló jellegű ciklikus társulásból

A szomszédos játékosok stratégiájának utánzására épülő dinamikai szabályoknak vannak természetes következményei. A legfontosabb, hogy az evolúciós folyamat leáll, ha a rendszer eléri valamelyik homogén (abszorbeáló) állapotot. A térbeli modelleknél további általános tulajdonság, hogy ez a dinamika támogatja az olyan homogén nagyméretű tartományok kialakulását is, amelyek belsejében nincs változás, és ilyenkor a stratégiák változása a különböző abszorbeáló állapotokat elválasztó határ környékére korlátozódik. Ebben a modellben négy abszorbeáló állapot létezik, amelyeknél a két rétegben a játékosok azonos stratégiát (C vagy D) választanak. Emiatt nem meglepő, hogy a szimulációs vizsgálatok a paraméterek változtatása esetén több lehetséges állapotot, illetve állapotváltozást mutattak. Ennek a kétfajos rendszernek az egyik legérdekesebb tulajdonsága, hogy a paraméterek értékétől függően képes leírni olyan élethelyzeteket, amikor az egyik faj (például a felső réteg) egyedei kizsákmányolják a másik faj tagjait. A szimmetrikus kölcsönhatás miatt azonban a kizsákmányolás iránya ellentétes is lehet ahhoz hasonlóan, ahogyan a kétdimenziós Ising-modellben kialakul a mágnesezettség (spontán szimmetriasérülés) alacsony hőmérsékleten. A hasonlóság következménye, hogy a

zajszint növelése során a stratégiák eloszlása azonossá válik a két rétegben, és a C stratégia választásának gyakorisága eltűnik egy kritikus érték felett. A várakozásokkal összhangban ez utóbbi fázisátalakulás ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint amit a kétdimenziós irányított perkolációs univerzalitási osztály képvisel.

Ezzel szemben elegendően alacsony zajszint esetén az említett szimmetriasérülés és a folytonos fázisátalakulás jellemzőinek (rendparaméter, fluktuációk, korrelációs távolság stb.) zajfüggése hasonlít az Ising-modellel leírt univerzális tulajdonságokra – annak ellenére, hogy alapvetően különböző folyamatok vezérlik az állapotváltozást. Ezek a különbségek felerősödnek még alacsonyabb zajszintnél, amikor a szimmetriasérülés úgy jelenik meg a stratégiák kétdimenziós eloszlásában, hogy a kétfajta élősködés megfigyelhető elegendően nagy méretű tartományok belsejében, de ezeknek a tartományoknak az összterülete különböző. Az ellentétes irányú élősködést elválasztó határvonal mentén „zajlik az élet”, és innen indulnak el azok a lavinajelenségek, amelyeket a 3. ábrán négy egymást követő pillanatfelvétel segítségével mutatunk be egy nagyméretű rendszer  $240 \times 240$  rácspontot tartalmazó részén.



3. ábra. Lavinajelenség illusztrálása a négyzet rácson négy egymást követő stratégiaeloszlás segítségével a két faj közötti evolúciós adományozó játéknál. A fekete és piros színek olyan stratégiapárt jelölnek, amelynél az egyik réteg szereplője a C, a másik a D stratégiát választotta; a fekete, illetve fehér négyzetek a DD és CC stratégiapár jelenlétét jelzik

A 3. ábra pillanatfelvételein a kék tartományokon belül a felső réteg egyedei élősködnek az alattuk elhelyezkedő egyedeken. A 3a. ábra bal alsó részén látható piros tartományban az élősködés iránya ellentétes. A piros és kék tartományok határán képződnek azok a kicsi fehér (mindenki C), illetve fekete (mindenki D), méretüket változtató és mozgó szigetek, amelyek mélyen behatolhatnak a kék (vagy piros) tartományok belsejébe. Az egymást segítők (fehér) tartományai viszonylag rövid időn belül kihálnak. A vándorló kis fekete szigetek azonban növekedésnek indulhatnak, ha méretük nagyobb lesz, mint egy kritikus érték. Ez a folyamat hasonlít a kristályosodásnál megfigyelt csíráképződési folyamatokra, amelyek a stabil állapot kialakulásának dinamikáját jellemzik a termodinamikai rendszerekben. A fekete tartomány növekedését az állítja meg, ha a határát eléri az egymást kölcsönösen segítők kis (fehér) csoportja, melyek utódai a háttértől kapott támogatás miatt eltűntetik a fekete tartományt. Ebben az esetben az élősködés egyéni haszna azonban elegendően magas ahhoz, hogy az



egyik faj újból az élősködést válassza (3d. ábra), és a permfeltételek hatására nagy valószínűséggel visszaáll az élősködés eredeti változata, amit a 3a. ábrán látható stratégiaeloszlás képvisel.

Ez az ismétlődő folyamat egyre nagyobb és ritkább lavinák kialakulását és eltűnését okozza, ha csökkentjük a zaj vagy az  $r$  nagyságát. A hasonló lavinajelenségek megfigyelése számítógépes szimulációkkal azért nehéz, mert a nagyméretű lavinák megjelenésére esetenként hónapokat kell várni. Ez az oka annak, hogy a jelenség univerzális tulajdonságainak feltárása még nem teljes annak ellenére, hogy ilyen jelenségeket korábban más modellek numerikus vizsgálatánál is megfigyeltek. A jelenség legegyszerűbb változatai jelen vannak azokban a háromfajos populációdinamikai modellekben is, ahol az evolúciós folyamat egy olyan állapot (határeloszlás) felé tereli a fejlődést, ami instabil bizonyos zavarok megjelenése esetén. Nagyon alacsony  $r$  értékeknél a lavinajelenségek szerepe erősödik, aminek eredménye, hogy a rendszer valamelyik homogén (abszorbeáló) állapotba fejlődik olyan valószínűséggel, ami függ a kezdőfeltételektől és a rendszer méretétől.

A 2. és 3. ábrán vázolt jelenségek modelljeinek kiválasztását néhány közös tulajdonság illusztrálása indokolta. Mindkét modellben négy abszorbeáló állapot létezik, és ezek doménjei között ugyanolyan területhódítási folyamat figyelhető meg, mint amit a 2. ábra tápláléklánca jellemez. A hasonlóság mellett azonban hangsúlyozni kell a különbségeket is, amelyek a paraméterek függvényében a statisztikus fizikai modellekre általánosan jellemző univerzális fázisátalakulási tulajdonságok helyett a folytonos fázisátalakulás jellemzőinek változását is eredményezhetik. Ez utóbbi jelenségre példa a négyállapotú Ashkin–Teller-modell, ami a lehetséges hat stratégiapár közötti koordinációs kölcsönhatást három paraméterrel jellemzi. A koordinációs kölcsönhatásokra korlátozott sokstratégias evolúciós játékelméleti modellek számos olyan lehetőséggel rendelkeznek, amelyek elemzése még hiányos, és amelyek újdonságok sokaságát kínálják a termodinamikai rendszerek statisztikus fizikájával foglalkozók számára [18].

## Távlati lehetőségek

Az evolúciós játékelméleti modelleket vizsgáló biológusok, közgazdászok, orvosok és viselkedéskutatók számára nagyon hasznosak azok az általános ismeretek, amelyek a statisztikus fizika területéről származnak. Érdekes kiemelni a folytonos fázisátalakulások felderítése során felszínre került univerzális tulajdonságokat és az univerzalitási osztályok létezését, mert a paraméterek változtatása során a stratégiák gyakoriságában megfigyelt változások hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek. A folytonos fázisátalakulásokat kísérő jelenségek (a rendparaméter, a fluktuációk, a válaszfüggvények, a korrelációs távolság, a relaxációs idő hatványfüggvény-szerű viselkedése) ismeretének átadása segítheti az élő

rendszereket szimulációs módszerekkel vizsgáló kutatókat a megbízható numerikus eredmények kiszámításánál. A statisztikus fizikában használt közelítő módszerek (pl. párközelítés) a jelenségek gyorsabb feltérképezését teszik lehetővé. Hasonlóan hasznos lehet a méreteffektusok és lavinajelenségek (például a sok szálból álló kötelek szakadásánál [19]) statisztikai elemzésére kifejlesztett módszerek hasznosítása az említett kutatási területeken. A fizika módszereinek hasznosságát hűen tükrözik az ipari technológiák területén elért sikerek az elmúlt száz évben. A különböző tudományterületek közötti együttműködés ezt a folyamatot támogatja más területeken is. Ugyanakkor ez az együttműködés a statisztikus fizika számára is kínál számos olyan új és érdekes jelenséget, amelyek felbecsülhetetlen mértékben gazdagítják az élettelen anyagoknál eddig feltárt összefüggéseket. Ez a gazdagság jelenik meg a koevolúciós játékelméleti modellekben, ahol a stratégiaeloszlás mellett változhat a játékosok száma, a közöttük meglévő kapcsolatrendszerek, a dinamikai szabályok és a kölcsönhatás is. Mindez együtt a kihívások sokaságát kínálja a statisztikus fizika számára, mert a vizsgált jelenségek megértése jelentősen javíthatja az emberiség, a velünk együtt élő földi élőlények és a következő generációk életminőségét és fennmaradási esélyeit.

## Irodalom

1. von Neumann J., Morgenstern O. (1944): Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press.
2. Maynard Smith J., Price G. R. (1973): The logic of animal conflicts. Nature 246, 15.
3. Hofbauer J., Sigmund K. (1998): Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge University Press.
4. Szabó G., Fáth G. (2007): Evolutionary games on graphs. Phys. Rep. 446, 97.
5. Tanimoto J. (2015): Fundamentals of Evolutionary Game Theory and its Application. Springer.
6. Nowak M. A., May R. M. (1992): Evolutionary games and spatial chaos. Nature 359, 826.
7. Glauber R. J. (1963): Time-dependent statistics of the Ising model. J. Math. Phys. 4, 294.
8. Blume L. E. (1993): The statistical mechanics of strategic interactions. Games Econ. Behav. 5, 387.
9. Potts R. B. (1952): Some generalized order-disorder transformations. Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 106.
10. Ashkin J., Teller E. (1943): Statistics of two-dimensional lattices with four components. Phys. Rev. 64, 178.
11. Szabó G., Borsos I. (2016): Evolutionary potential games on lattices. Phys. Rep. 624, 1.
12. Poundstone W. (1992): Prisoner's Dilemma. Doubleday.
13. Sigmund K. (2010): The Calculus of Selfishness. Princeton University Press.
14. Monderer D., Shapley L. S. (1996): Potential games. Games Econ. Behav. 14, 124.
15. Candogan O., Menache I., Ozdaglar A., Parrish P. A. (2011): Flows and decomposition of games: Harmonic and potential games. Math. Oper. Res. 36, 474.
16. Czárán T. L., Hoekstra R. H., Pagie L. (2002): Chemical warfare between microbes promotes biodiversity. PNAS 99, 786.
17. Hauert C., Szabó G. (2024): Spontaneous symmetry breaking of cooperation between species. PNAS Nexus 3, 326.
18. Király B., Szabó G. (2017): Evolutionary games combining two or three pair coordinations on a square lattice. Phys. Rev. E 96, 042101.
19. Kun F., Allan L., Batool A., Danku Z., Pál G. (2024): Failure process of fiber bundles with random misalignment. Phys. Rev. Res. 6, 033344.