NUMERIKUS MÓDSZEREK A KÖZÉPISKOLÁBAN? IGEN, LEHETSÉGES! EXOBOLYGÓK MOZGÁSÁNAK MODELLEZÉSE

Ollé Hajnalka[1,@], Kovács Tamás[2]
[1]Magyar Tanítási Nyelvű Magángimnázium, Dunaszerdahely, Szlovákia
[2]ELTE Atomfizikai Tanszék, Budapest
[@]E-mail: olle.hajnalka@gmail.com

Bevezetés

Az igényes, tudományos gondolkodás megalapozását már a középiskolai oktatás során el kell kezdeni. Ennek egyik megkerülhetetlen pontja azon problémák elemzése, melyeknek a mai napig nem létezik egzakt analitikus megoldása. Ezeket a kérdéseket mintha egy kis titok lengené körül, így izgalmasabbak a diákok számára is, akik igénylik, hogy megismertessük őket olyan módszerekkel, melyeket segítségül hívhatnak egy-egy megoldásban. Bizonyos természeti jelenségek megismerése során gyakran találjuk magunkat olyan helyzetben, amikor a zárt alakú megoldás helyett közelítő módszereket kell alkalmaznunk. Ebben a cikkben egy ilyen esetet dolgozunk fel középiskolai fizikaóra keretein belül. A megvalósítás során figyelembe vesszük, hogy szükség lesz a gravitációról szóló általános ismeretekre, tehát olyan korosztálynak, évfolyamnak ajánljuk, ahol a gravitáció témakört a standard fizikaóra keretein belül már átvették. Mi tizenegyedikeseket vontunk be, és szakköri foglalkozás formájában, heti 1 × 45 percet foglalkoztunk a témával. A téma feldolgozását mindenképpen kiscsoportos (3-4 fő csoportonként) munkaként javasoljuk, semmiképpen sem teljes létszámú osztályban. Valamint javasolt, hogy a csoport tagjai között legyen olyan diák, aki jártas a Python-programozás alapjaiban.

Diákjaimmal a síkbeli háromtest-problémát jártuk körbe [1]. Ez az égi mechanikának egy klasszikus esete, mely közel három évszázada foglalkoztatja a kutatókat. Ismeretes, hogy néhány speciális geometriai elrendezést kivéve a problémának nincs zárt alakú megoldása, de különböző mértékű közelítésekkel, sorfejtés alakjában megtalálhatjuk a számunkra megfelelő pontosságú leírását. Ez a fajta analitikus közelítés azonban igen számításigényes, és a végtelen sorok nem is mindig konvergensek. A számítástechnika megjelenésével egyidejűleg a numerikus módszerek is egyre finomodtak. Elfogadott eljárássá vált a numerikus integrálás olyan differenciálegyenletek megoldása során, ahol az analitikus tárgyalás nem vezet eredményre. Ezzel a ténnyel megismertetni a diákokat azért is tanulságos, mert ezen technikák alkalmazása során ráeszmélnek arra, hogy a numerikus módszerek sok esetben az egyetlen használható eljárást adják a probléma megoldására. Hangsúlyozni szeretnénk, hogy nem differenciálegyenleteket és azok megoldását szeretnénk fizikaórán tanítani, hanem a numerikus módszerek alapjainak megismertetésével a diákok kritikus gondolkodását kívánjuk erősíteni. Továbbá a tudományos élet nyitott kérdéseinek szemléltetésével és az azok megoldására használt módszerek elemi változatával próbáljuk felkészíteni őket a tudományos jellegű problémamegoldásra. A továbbiakban bemutatott módszerek jó alkalmat teremtenek a számítástechnika tárgy bizonyos témaköreinek színesítésére és tehetséggondozó feladatok kidolgozására is.

A numerikus módszerek alapjainak középiskolában való tanítására több példát találhatunk az elmúlt években. Szakdolgozati feldolgozásokon kívül *Jaloveczki* tanár úr volt az első, aki az Excel-munkalapokon alapuló módszer alkalmazhatóságát mutatta be [2]. Illetve 2021-ben elkészült egy szabadon használható e-learning anyag [3], mely kész Excel-munkalapok bemutatásával vezet végig az ejtőernyős mozgásától kezdve a rezgéseken keresztül a Föld keringéséig (s eljut egy kaotikus példáig is). A je-

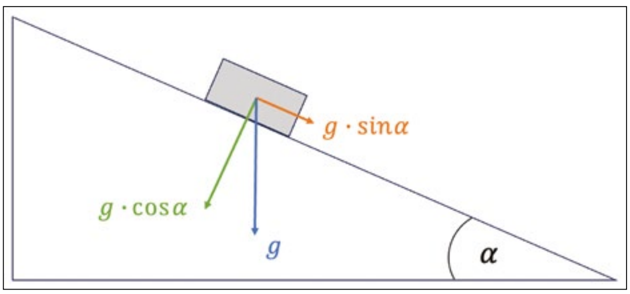
Ollé Hajnalka csillagász, az ELTE Fizika Tanítása Doktori iskola PhD-hallgatója, valamint a dunaszerdahelyi Magyar Tanítási Nyelvű Magángimnázium fizikatanára. Fontosnak tartja, hogy diákjai megismerkedjenek a korszerű kutatási módszerekkel, és megmutassa szerzett tudásuk gyakorlati hasznát.

Kovács Tamás csillagász, az ELTE Atomfizikai Tanszékének adjunktusa. Doktori értekezését égi mechanikából írta. Jelenlegi érdeklődési területei a nemlineáris dinamikai rendszerek, az idősoranalízis, a komplex hálózatok, valamint a fázistérbeli transzport statisztikus fizikai leírása és ezek csillagászati alkalmazásai. Bolyai-ösztöndíjas. A Fizika Tanítása Doktori Iskola aktív témavezetője.

len cikk újszerűsége a fő témaválasztáson kívül, hogy az Excel-módszer mellett bemutatja az érdeklődő középiskolások között egyre népszerűbb Python használatát is.

Egy ismert példa numerikus megoldása: súrlódásmentes lejtőn csúszó test

Mielőtt ismertetnénk az exobolygó-rendszerek sajátosságait, illetve dinamikai leírását, didaktikai szempontból a numerikus módszer bevezetését egy, a tanulók által jól ismert mechanikai feladaton – a lejtőn lecsúszó test esetén – keresztül szemléltetjük, melynek során képet kaphatnak az eljárás alkalmazhatóságának határairól és a módszer lényegéről. Mindezt azért tesszük, hogy a diákok maguk is belássák, hogy a számítógépes megoldás tényleg konzisztens az analitikusssal, továbbá, hogy átérezzék a módszer pontossága bizonyos határokig szabályozható és jól alkalmazható. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk el a súrlódástól és a közegellenállástól! Célunk az ismert analitikus megoldás összehasonlítása a numerikusan számolt eredményekkel.



1. ábra. A lejtőn mozgó test gyorsulásának komponensei. A feladat megoldása során a lejtőirányú összetevőkre vagyunk kíváncsiak

A feladat tehát a lejtőn mozgó test helyzetének és sebességének meghatározása a lejtővel párhuzamos irányban, ha a súrlódástól és a közegellenállástól eltekintünk. A *1. ábrán* vázolt kép alapján kezdősebesség nélkül, egy adott helyről elengedjük a testet. Ekkor a lejtőn megtett út (s) és a pillanatnyi sebesség (v) a középiskolából jól ismert módon a következőképpen adható meg:

$$s(t)=\frac{a}{2}t^2=\frac{g\sin\alpha}{2}t^2, \quad v(t)=at=g\sin\alpha\, t. \qquad (1)$$

Most nézzük meg az egyik legalapvetőbb numerikus eljárás, az *Euler*-módszer felépítését, melynek segítségével mozgásegyenletek megoldása általánosan tanulmányozható, például a Microsoft Excel program segítségével.

Az Euler-módszerrel a lejtőn lecsúszó test mozgását diszkrét időpontokban közelíthetjük úgy, hogy a test kezdeti helyzete, kezdősebessége és a rá ható erő (gyorsulás) ismert. Az eljárás során a mozgást olyan függvényekkel írjuk le, amelyeknek az időtől függő értékei a test helyzetét és sebességét adják meg. Ezekkel az értékekkel egy Excel-táblázatban [3, 4] a program beépített függvényei segítségével könnyedén tudunk dolgozni. Mivel a táblázatkezelés órai tananyag, ez sok diák számára sokkal barátságosabb környezet, mint valamely programozási nyelv használata. A folyamat, illetve a lépéseinek megértése szempontjából pedig ugyanúgy célravezető. Az algoritmikus gondolkodást, a probléma mélyreható átlátását az Excel használata is kiválóan kielégíti, teljesíti.

Az Euler-módszer

A numerikus eljárás során a gondolatmenetünk a következő. Ha ismert a test gyorsulása egy adott pillanatban, akkor könnyen kiszámolható a test sebességének megváltozása kis Δt idő múlva. Ez a következőképpen adható meg:

$$a_n=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t},$$

mely átrendezve

$$a_n\,\Delta t = v_{n+1} - v_n,$$

ahol v_n az n-edik lépés eleji, v_{n+1} a lépés végi sebesség, és az időt a Δt időegység többszöröseiben mérjük. Minket a későbbi sebesség érdekel, ezért tovább alakítva az összefüggést a következőt kapjuk:

$$v_{n+1} = v_n + a_n\,\Delta t. \qquad (2)$$

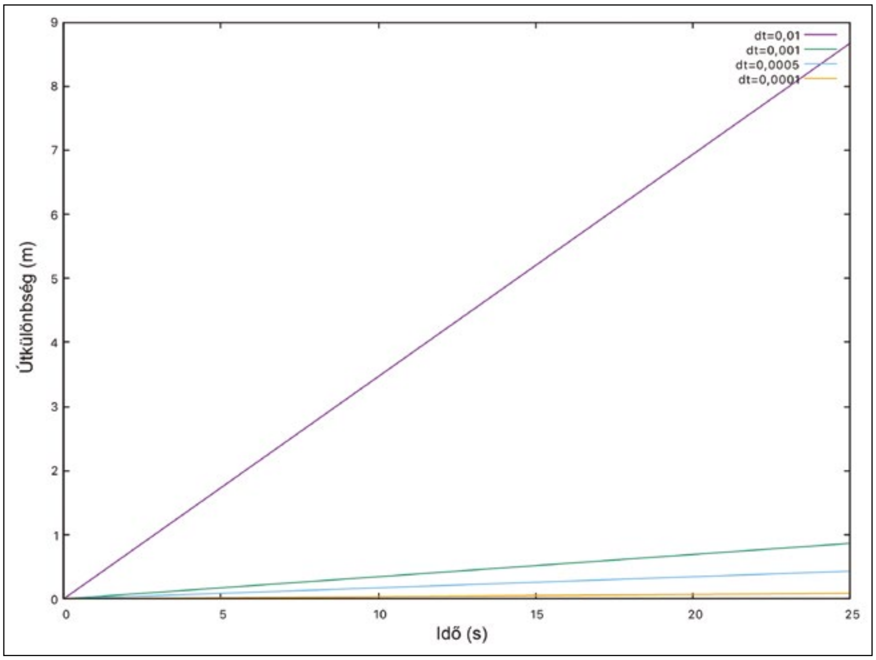
Itt jegyezzük meg, hogy a fenti képletekben alkalmaztuk a numerikus eljárások során bevett jelölést a diszkrét időlépések szemléltetésére, miszerint a mozgás során számított két tetszőleges egymást követő függvényérték – az n-edik és az (n+1)-edik – között mindig Δt idő telik el. Fontos még megjegyezni, hogy a (2) képletben azzal a feltételezéssel élünk, hogy Δt megfelelően kis megválasztása esetén a sebességváltozás lineáris. Tehát az a_n gyorsulás a sebesség adott pontbéli iránytangense. Ezt az eljárást nevezzük Euler-módszernek.

Amennyiben a mozgó test pillanatnyi pozíciójára vagyunk kíváncsiak, a (2) képlethez hasonló összefüggést alkalmazhatjuk a kitérés és a sebesség között:

$$s_{n+1} = s_n + v_n\,\Delta t, \qquad (3)$$

ahol most v_n a (2) képletben meghatározott sebesség. Így tehát a testre ható gyorsulás ismeretében (2) és (3) egymás utáni alkalmazásával tetszőleges időpontra megkaphatjuk a sebesség és pozíció értékeit. Mindezt a kinematika egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásra megismert összefüggéseivel. Az Excel előnye itt mutatkozik meg, hiszen a fenti képletek ismeretében az egyes oszlopokban szereplő cellák megfelelő másolásával rekurzívan, egymásból következően, hamar megkapható az eredmény, és kirajzolható a megoldás.

A lépésköz megválasztása tanulságos feladat lehet a diákok számára, hiszen egyértelműen megmutatható, hogy minél kisebb Δt, annál jobban közelítjük az analitikus, általuk is jól ismert megoldást. Az internetről letölthető táblázatunkban [4] a gyorsuló mozgásra vonatkozó összefüggésből (1) meghatározható a lejtő mentén megtett $s(t)$ távolság (E oszlop), illetve az Euler-módszerrel közelített s_n távolság (G oszlop). Ha e kettő különbségét az idő függvényében ábrázoljuk, a *2. ábrán* látható egyeneseket kapjuk. Az útkülönbséget egyre rövidebb Δt lépésközökre kiszámolva (a táblázat különböző fülei) a meredekség csökken, azaz egyre kisebb az analitikus megoldástól való eltérés. Megjegyzendő azonban, hogy az iterációk számával a hiba egyenes arányban nő!



2. ábra. A lejtőn lecsúszó test analitikus és numerikus útkülönbsége más-más Δt időlépésekre. A kisebb meredekségű egyenesek a nagyobb numerikus felbontáshoz tartoznak, és jobban közelítik az (1)-ből számítható $s(t)$ függvényt

Ezzel a numerikus „kísérlettel” demonstrálhatjuk a diákok számára, hogy a számítógépes modellek bizonyos pontossággal visszaadják a fizikát, és hogy a pontosságot magunk is befolyásolhatjuk. A lejtőre helyezett test tetszés szerint lecserélhető más mechanikai rendszerre (inga, szabadesés, Kepler-mozgás stb.), melyre az ismert megoldás és adott esetben megmaradási tételek jól összehasonlíthatók az Euler-módszerrel kapott eredményekkel. A [3] honlap minden igényt kielégítően tárgyalja a témakört haladó szintre emelve az ismereteket.

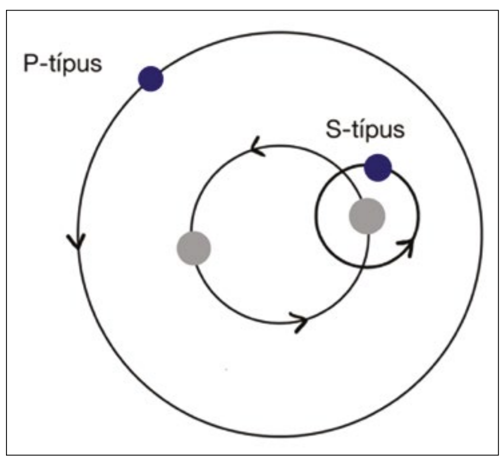
A bevezetésben említett gravitációs háromtest-probléma esetében azonban nem tudunk analitikus megoldás felírni, csak a közelítő módszerek állnak rendelkezésünkre a feladat megoldásához. Így egy ilyen feladat megoldása során pusztán a numerikus eredményekre támaszkodhatunk, és azok alapján értelmezhetjük az eredményeket. Az, hogy ilyen esetben milyen fizikai mennyiség vizsgálata célravezető, és ennek változása mit eredményez a dinamikában, a következő fejezet témája.

Egy középiskolában kevésbé ismert példa numerikus megoldása: gravitációs háromtest-probléma

Eddigi tapasztalataink azt mutatják, hogy a diákok érdeklődése sokkal inkább felkelthető, ha a tudomány jelenlegi frontvonalából származó kérdésekre keressük a választ, mert ezekben az esetekben eltávolodhatunk a fizikai alapfeladatoktól, és izgalmas, „megoldás nélküli” problémákon tesztelhetik a már ismert fizikai fogalmakat. Egy ilyen fogalom az energiamegmaradás, melynek kombinálása modern dinamikai problémákkal ihlette a következő vizsgálatokat.

Az elmúlt évtizedekben több exobolygó-rendszert fedeztek fel, amelyek jelentősen különböznek a Naprendszerünktől. Nemcsak a bolygók tömege, egymástól való távolságuk vagy pályájuk excentricitása, hanem a térbeli elrendezésük is nagyon különbözhet az általunk megszokott képtől. A több mint ötezer jelenleg ismert exobolygó közül jó néhány többes csillagrendszer körül alakult ki, ezek dinamikája rendkívül érdekes kutatási terület [5, 6]. Az ilyen exobolygó-rendszerek tanulmányozása segíthet megérteni a bolygók kialakulásának és fejlődésének folyamatát más csillagok körül.

Kettőscsillagok körül háromféle bolygóelrendeződést különböztetünk meg. A *3. ábrán* látható, hogy ha a bolygó csak az egyik csillag körül kering, akkor S-típusról, ha a két csillag tömegközéppontja körül, akkor P-típusról beszélünk. Ezenkívül előfordulhat olyan eset is, amikor a bolygó keringése során csillagot „vált”, ezek a C-típusú rendszerek (ez nincs jelölve az ábrán). Az órai feladat során egy S-típusú rendszert vizsgáltunk.



3. ábra. Kettőscsillag körül keringő bolygó különböző elrendeződésben (szürkével a csillagokat, a kék színnel pedig a körülöttük keringő bolygót jelöltük). A P a „planet”, az S jelölés pedig a „szatellit” típusú keringésre vonatkozik

Konkrétabban megfogalmazva, feladatul tűztük ki, hogy meghatározzuk három tömegpont mozgását, melyek között csak a Newton-féle gravitációs kölcsönhatás hat. A háromtest-probléma alapján a következő elrendeződést vizsgáltuk: a három tömegpont (a mi esetünkben egy-egy naptömegű csillag és egy földtömegű bolygó) egy síkban kering a közös tömegközéppontjuk körül. Érdemes megjegyezni, hogy a harmadik test kicsi (de nem elhanyagolható) tömegének következtében a gravitációs hatása nem számottevő, így a kettőscsillag Kepler-pályán látszik mozogni. A numerikus kódban a teljes Newton-féle gravitációs erőtörvény szerepel, mely minden testet figyelembe vesz.

A numerikus eljárás és a program működési elve

Szakítva az eddigiekkel, a kettőscsillag körül keringő bolygó síkbeli mozgását egy Python programozási nyelven írt rövid program segítségével szemléltethetjük [7]. Természetesen az eddig bemutatott Excel-verzió kibővítése is alkalmas a probléma tárgyalására, azonban az olvasó némi kényelmetlenségbe ütközhet, ha hosszú idejű vizsgálatra kíváncsi. Ebben az esetben ugyanis az Excel-táblázat sorainak száma kezelhetetlenül nagy lesz.

A háromtest-probléma esetén is hasonló gondolatmenetre támaszkodunk, mint a lejtős feladat esetén. Annyi lesz a különbség, hogy gyorsulás helyett erővel, sebesség helyett lendülettel számolunk. Nézzük meg részletesen az Euler-módszert ebben az esetben is.

Feltesszük, hogy minden időpillanatban ismerjük a testek között ható erőt. Így a kezdőfeltételek (hely, sebesség) és paraméterek (tömeg) megadása után a programmal minden ciklusban, azaz minden egyes diszkrét időlépésben, hasonlóan az Excel-táblázat soraihoz, kiszámoltatjuk az egyes testekre ható erőket. Esetünkben az pusztán a kölcsönös gravitációs erő, mely általánosan adott időpillanatban

$$\mathbf{F}_{i,n} = -\gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{R}_{ij,n}|^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_{ij,n}}{|\mathbf{R}_{ij,n}|} - \gamma \frac{m_i m_k}{|\mathbf{R}_{ik,n}|^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_{ik,n}}{|\mathbf{R}_{ik,n}|},$$
$$i, j, k = 1, 2, 3 \quad \text{és} \quad i \neq j \neq k,$$

ahol $\mathbf{F}_{i,n}$ az i-edik testre ható erő, γ a Newton-féle gravitációs állandó, m a testek tömege, $\mathbf{R}$ pedig a köztük lévő távolság. Az alsó indexben lévő n az n-edik iterációs lépésre utal – hasonlóan a módszer bevezetésénél tárgyalt jelöléshez.

Az impulzus időegység alatti megváltozásából kapjuk az Euler-módszer első összefüggését (itt elhagytuk az égitestek indexét (i), mert mindegyikre formailag azonos kifejezés érvényes) két egymást követő időpillanatra:

$$F_n = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t}.$$

Ezt (2)-höz hasonlóan átrendezve a lendületre kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \mathbf{F}_n \cdot \Delta t,$$

ahol $\mathbf{p}_{n+1}$ az új, $\mathbf{p}_n$ pedig az előző ciklusban számolt (Δt idővel korábbi) impulzus. Ebből meghatározhatjuk az új helyvektort a következő módon:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \frac{\mathbf{p}_n}{m} \Delta t.$$

Hasonlóan itt is $\mathbf{R}_{n+1}$ az új, $\mathbf{R}_n$ pedig a régi helyvektor. Ez utóbbi két összefüggés az impulzusnak és a helyvektornak egy olyan alakja, mely a számítógépes ciklusokhoz és automatizáláshoz könnyen alkalmazható. A példa kedvéért kiemeljük a harmadik testre (bolygóra) érvényes egyenleteket az Euler-módszer formalizmusában:

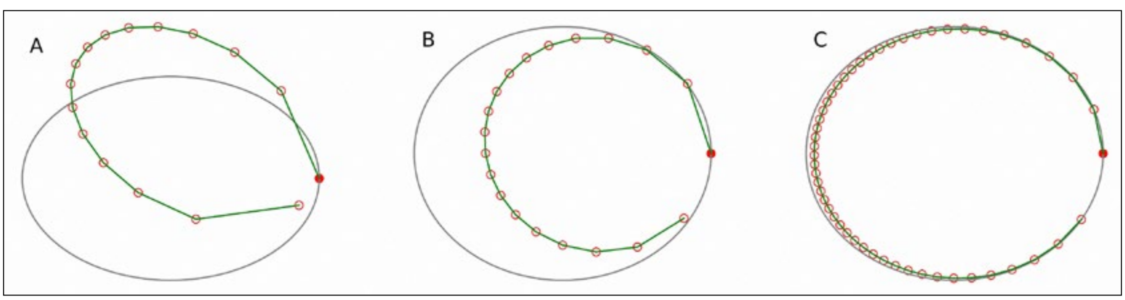
$$\mathbf{F}_3 = -\gamma \frac{m_3 m_1}{|\mathbf{R}_{31}|^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_{31}}{|\mathbf{R}_{31}|} - \gamma \frac{m_3 m_2}{|\mathbf{R}_{32}|^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_{32}}{|\mathbf{R}_{32}|},$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 + \mathbf{F}_3 \, \mathrm{d}t,$$

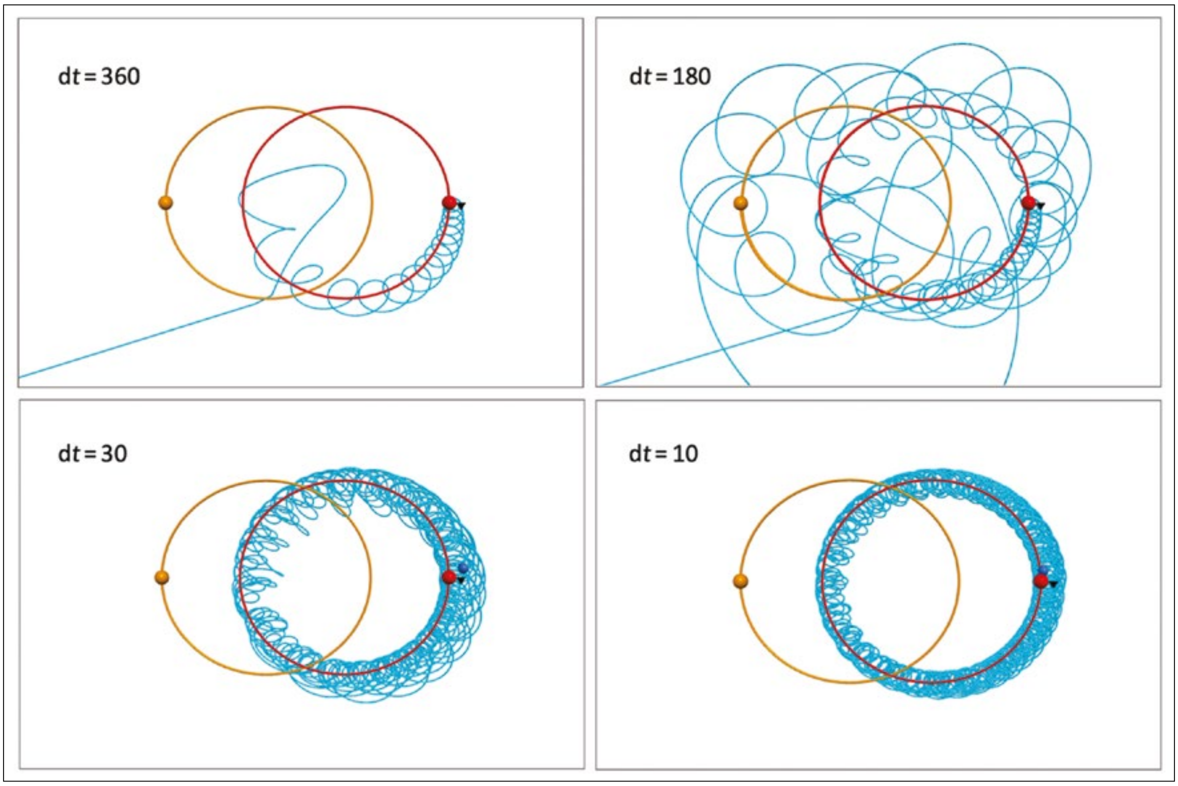
$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_3 + \frac{\mathbf{P}_3}{m_3} \mathrm{d}t.$$

Ezek a forráskódban a következő formát öltik:

```
F3 = (G*M3*M1)/(mag(R3 – R1))**2*R31 + (G*M2*M3)/
(mag(R3 – R2))**2*R32
P3 = P3 + F3*dt
R3 = O3.pos = R3 + (P3/M3)*dt
```



4. ábra. Szemléletes bemutatása annak, hogy *egy ismert bolygópálya* esetén (szürke ellipszis) a numerikus közelítésnél menynyire fontos a Δt lépésköz megfelelő választása. A teli kör a bolygó kezdeti helyét jelöli, az üres körök pedig az egyes Δt lépések eredményéhez tartozó pozíciókat. Az A, B és C esetekben a lépésköz egyre kisebb. Vegyük figyelembe, hogy az Euler-módszert alkalmazva a bolygó a zöld szakaszok mentén mozog, és ezzel a közelítéssel a numerikus eredmény letér az analitikus pályáról. A tanulság úgy fogalmazható meg, hogy minél kisebb a lépésköz, annál jobban közelítjük a valódi megoldást. Megjegyezzük továbbá, hogy a szürke ellipszisek mindhárom esetben ugyanazok, az A eset ellipszise csak az ábrázolás miatt látszik lapultabbnak



5. ábra. Különböző Δt időintervallumokat alkalmazva egyértelműen látható, hogy teljesen más végkimenetele lesz a rendszer viselkedésének. Az ábrákon mindegyik esetben a kettőscsillag 5 keringése látható (piros és sárga ellipszisek). A fekete háromszög a bolygó kezdeti pozícióját jelöli, világoskékkel pedig a bolygópályát rajzoltuk. Megjegyezzük, hogy a letölthető program adataival a kettőscsillag keringési ideje T = 402 földi nap

Itt R31 = −norm(R3 − R1) az „1-es” csillag és a bolygó között lévő egységvektort jelöli, melyről tudjuk, hogy a tömegközéppontból a bolygóhoz mutató R3 helyvektor és a csillaghoz mutató R1 helyvektor különbségéből adódik. A mag() függvény pedig az argumentumában lévő vektor abszolút értékét (nagyságát) képezi. Az impulzus kiszámolásánál a program figyelembe veszi, hogy az előző sorban már meghatároztuk az F3 erőt, így azt megszorozva Δt lépésközzel hozzáadjuk az előző ciklusban számolt P3 impulzushoz. Ezen új impulzus ismeretében kapjuk a helyvektor (R3) frissített változatát.

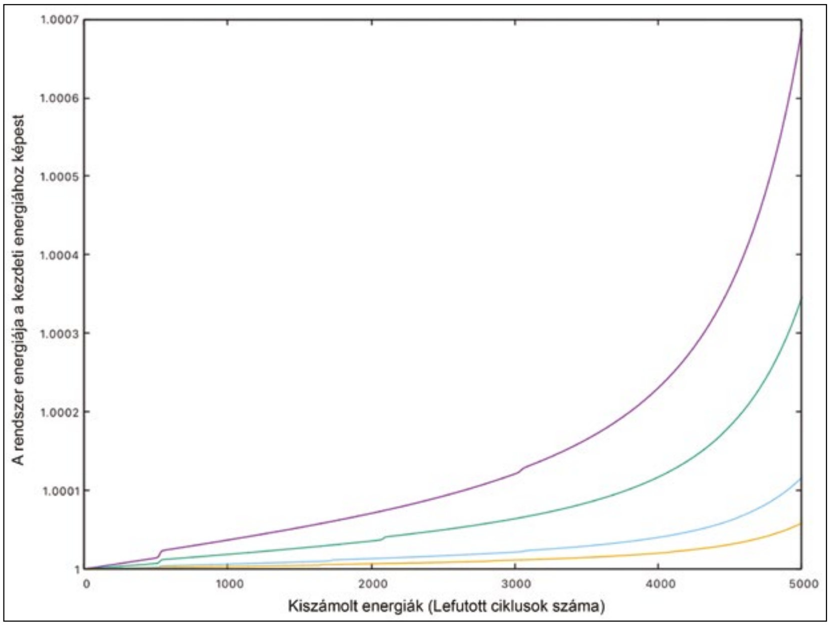
Az eljárás fontos része a Δt lépésköz (a programkódban dt), melynek változtatása kiváló feladat a diákoknak, hiszen maguk tapasztalják meg, hogy minél kisebb időlépést választanak két pozíció meghatározása között, annál jobb felbontást kapnak, hiszen ebben az esetben sokkal több pont áll rendelkezésre, mely végül kirajzolja a pályát (*4. ábra,* szürke ellipszis). Hátránya viszont, hogy a program futási ideje érezhetően megnő a több számolás miatt, és egy bizonyos határ fölött élvezhetetlenné teszi az animációt.

A rendszer energiájának vizsgálata

A csoportos foglalkozás során több diákban felmerült, hogy miként lehet ellenőrizni a numerikus eljárás hitelességét, hiszen azt már előzőleg megbeszéltük, hogy nem ismert a mozgás analitikus leírása. Végül egy irányított beszélgetés során megegyeztünk, hogy az energia megmaradásának teljesülnie kell a rendszerben, így ennek vizsgálata jó jelölt a szimuláció helyességének eldöntésére. Mivel azt már a lejtős feladatnál láttuk, hogy a megoldás közelítő jellegű, ez a választás teljes mértékben helytálló. Első lépésként megvizsgáltuk a pályák alakulását különböző Δt időkre *(5. ábra).*

Ezzel kapcsolatban merült fel a gondolat, hogy a négy ábra közül vajon melyik a feladat „hiteles” megoldása. Nézzük meg, hogy a különböző Δt lépésközökkel kapott megoldások esetében vajon mennyire pontosan marad meg az energia. Ennek érdekében meghatározzuk a rendszer összenergiáját a kezdeti időpillanatban, majd minden egyes ciklusban (időlépésben) újra az aktuális értékekkel. Végül a két energia hányadosát ábrázoljuk. A *6. ábrá*ról kiderül tehát, hogy minél kisebb Δt időközöket választunk, annál kevésbé közelíti a görbe az 1-et, azaz kevésbé tér el a numerikusan meghatározott energia a kezdeti értéktől. Ezzel belátható, hogy a helyes megoldás elérése érdekében nagyon fontos az időlépést minél kisebbre választani. Megjegyezzük, hogy kaotikus esetben a numerikus pontosság ugyanúgy radikális befolyással van a megoldás alakjára, mint a rendszer kezdeti konfigurációja.

Ez egyértelműen és szemléletesen mutatja be a diákok számára a numerikus megoldási módszer technikai paramétereinek fontosságát, és felhívja a figyelmet annak közelítő jellegére. Gyorsan nyilvánvalóvá vált számukra, hogy a probléma alaposabb körültekintést igényel, valamint ösztönözte őket arra, hogy más, pontosabb eljárá-



6. ábra. A kezdeti és a futás során minden időlépésben kiszámolt energiák hányadosa különböző Δt időközökre (360 s – lila, 180 s – zöld, 30 s – kék, 10 s – sárga)

sok után kutassanak. Hiszen, amint az a *6. ábrán* is látszik, még a legjobb, 10 másodperces időfelbontással sem teljesül pontosan az energia megmaradása.

Az Euler-módszer kiváló eszköze lehet a numerikus módszerek bevezetésének a középiskolai fizikaoktatásban, hiszen viszonylag könnyen megérthető és alkalmazható. Mindemellett nem elhanyagolható az sem, hogy összetett problémák tudományos igényű szemléletét és megoldásának menetét is elsajátíthatják a diákok. Másrészt teljesen általános jellegű, tehát bármilyen mechanikai jellegű problémára könnyedén alkalmazható. A részletes megismerése pedig egyértelműen rávilágít a hiányosságaira is, mely módszertani szempontból kiválóan használható, ezáltal a diákok maguk is igénylik a pontosabb (magasabb rendű) módszerek alkalmazását.

Megvalósítás

A program megírásakor olyan platformot, felületet kerestünk, mely nem túl bonyolult, könnyen alkalmazható, és viszonylag kevés programozási ismerettel is jól használható. A Python programozási nyelvnek van egy 3D programozásra alkalmas egyszerű modulja, a VPython [8], melynek letöltése sem szükségszerű, egyszerű böngészővel kiválóan alkalmazható [9]. Rengeteg példaprogram [10] segíti a megismerést, melyek önmagukban is jól használhatók a fizika és az informatika oktatásában, illetve ezen két terület összekapcsolásában.

Összefoglalás

A célunk az volt, hogy a diákokat megismertessük a numerikus módszerek alkalmazásának fontosságával, valamint felismerjék a tényt, hogy ezek a módszerek közelítő jellegűek, de mindenképpen eredményesen alkalmazhatók a kutatások, modellezések során. Kezdetben szándékosan olyan feladatok elé állítottuk őket, melyek analitikus megoldása középiskolai módszerekkel is lehetséges. A tanulási folyamat során bemutattunk egy olyan egyszerű mechanikai rendszert is, mint a lejtőn való súrlódásmentes mozgás, melynek megoldását ismerjük. Ezáltal remekül szemléltethető a közelítő módszerek gyakorlati haszna, hiszen könnyedén össze tudjuk hasonlítani a számítógépes megoldásokat az analitikussal. Majd a diákok készítettek egy Python programot, melyben két csillag körül kering egy bolygó, és ezek pályáját számolják ki. Ennek keretében a diákok megismerkedtek egy olyan alapvető égi mechanikai problémával is, mint a háromtest-probléma. Szembesültek azzal, hogy az Euler-módszer nem ad pontos megoldást, csak közelítést, így maguk is eljutottak arra a megállapításra, hogy a probléma komolyabb körültekintést igényel a numerikus megoldás során.

Irodalom

1. Érdi Bálint (2003): Égi mechanika, Nemzeti Tankönyvkiadó
2. Jaloveczki József (2015): Nemlineáris jelenségek vizsgálata diákköri-szakköri munkában
3. http://theorphys.elte.hu/fiztan/numH
4. http://www.mgds.eu/exo/lejtoOK.xlsx
5. Ballantyne H. A., et al. (2021): Long-term stability of planets in and around binary stars. MNRAS 507, 4507.
6. Horváth Zsuzsa (2017): Exobolygók minden szinten. *Fizikai Szemle,* 2017/3, 93–99.
7. https://glowscript.org/#/user/Hajni/folder/MyPrograms/program/khtp/edit
8. https://www.glowscript.org/docs/VPythonDocs/index.html
9. https://vpython.org
10. https://www.glowscript.org/#/user/GlowScriptDemos/folder/Examples/