

DIÁKPROJEKT A HOMOKDOMB KRITIKUS VISELKEDÉSÉNEK TANULMÁNYOZÁSÁRA

Szenkovits Ervin¹, Popa Márta¹, Járai-Szabó Ferenc^{2,®}

¹János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár, Románia

²Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Fizika Kar, Magyar Fizika Intézet, Kolozsvár, Románia

[®]E-mail: ferenc.jarai@ubbcluj.ro

Egy egyszerű homokdomb-kísérlet középiskolai megvalósítását mutatjuk be, amely révén a tanulók közvetlenül észlelhetik a lavinajelenségeket. A mért eloszlás statisztikai jellemzőinek vizsgálata után a klasszikus homokdomb-modell és egy sztochasztikus mikrolavina-modell segítségével magyarazzuk a megfigyelt eloszlásokat.

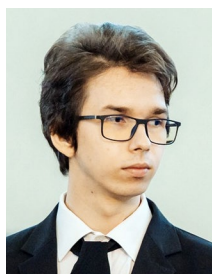
Egyszerű rendszer, bonyolult viselkedés

A lavinák kialakulásának megértése és modellezése az 1980-as években került a fizikai kutatások középpontjába az *önszerveződő kritikus rendszerek* (self-organized criticality, SOC) elméletének megfogalmazásával.

B. P. Bak és munkatársai mutatták be 1987-ben a SOC koncepciót a homokdomb-modell segítségével [1]. A homokdomb-modell lényege, hogy egy diszkrét rácson



Popa Márta címzetes fizikatanár és tehetőség gondozó mentor, a kolozsvári János Zsigmond Unitárius Kollégium igazgatója. Szerepet vállal a fizika módszertani fejlesztésében, versenyek szervezésében és tankönyvek lektorálásában. Számos oktatási segédanyagot publikált, munkájában a kísérletezés és a tanulói aktivitás ösztönzése kiemelt szerepet kap.



Szenkovits Ervin a kolozsvári János Zsigmond Unitárius Kollégiumban érettségizett 2025-ben. Fizika iránti érdeklődése és kitartó munkája eredményeként felvételt nyert a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Fizika Karára. Középiskolai éve alatt aktívan részt vett fizikai kísérletekben és tudományos projekteken.



Járai-Szabó Ferenc, fizikus, egyetemi docens, a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Magyar Fizika Intézetének vezetője. Doktori címét 2007-ben szerezte. Kutatási területe a számítógépes és statisztikus fizika interdiszciplináris alkalmazása, elsősorban a komplex rendszerekben megjelenő önszerveződő folyamatok modellezésére és megértésére.

homokszemeket adunk hozzá véletlenszerű helyeken. Ha egy cellába túl sok szemcse kerül, az a szomszédjaira dől, ami lavinaszerűen továbbterjedő omlásokhoz vezethet, egészen addig, mígnem a rendszer újra stabilizálódik. Így e modell jól érzékelteti, hogyan válhat ki egyetlen szemcse kisebb vagy akár kiterjedt, sok szemcse mozgásával járó omlást (lavinát) is. Ilyen rendszerekben a lavinák méreteloszlása skálafüggetlen, $p(u) \sim u^{-\tau}$ típusú hatványfüggvényt követ. Az u nagyság szerinti eloszlás tehát nem egy csúcs köré csoportosul (mint például a Gauss-eloszlásnál), hanem u növekedésével csak lassan csökken, tehát a nagyon gyakori sok kis esemény mellett ritkábban előfordulhatnak rendkívül nagy omlások is. A skálafüggetlenség azt jelenti, hogy az eloszlásnak nincs jellemző mérete. Ha a rendszert kinagyítjuk vagy lekicsinyítjük, a statisztikai törvényszerűségek változatlanok maradnak.

Számos természeti jelenség kapcsán megfigyelhető ez a fajta statisztikus viselkedés. Például a földrengések magnitúdóeloszlása is hatványtörvényt követ, amit a jól ismert Gutenberg–Richter-féle törvény ír le [2, 3]. Mindezek miatt a lavinadinamika egy izgalmas, modern fizikai téma, amely szemléletes példája annak, hogyan vezethet egyszerű, helyi kölcsönhatás globálisan összetett, előre nem jelezhető viselkedéshez.

A homokdomb-jelenség tanulmányozása középiskolai projektnek kiválóan alkalmas. A diákok hozzáférhető eszközök segítségével láthatják a kritikus homokdomb-lejtő kialakulását, és a kisebb-nagyobb omlásokat, lavinákat. Ha egy szem homokot ejtünk egy kritikus állapotú halom tetejére, a halom oldalán eltérő méretű lavinák indulhatnak el. Bár a lokális szabályrendszer determinisztikus, a kiindulópont véletlenszerűsége és a rendszer sűrű konfigurációja miatt a lavinák mérete jelentős ingadozást mutathat. A téma erősen interdiszciplináris, hiszen a kísérleti megfigyelések mellett a diákok elemi statisztikai adatfeldolgozást végezhetnek, és akár egyszerű számítógépes szimulációt is írhatnak a jelenség modellezésére [4].

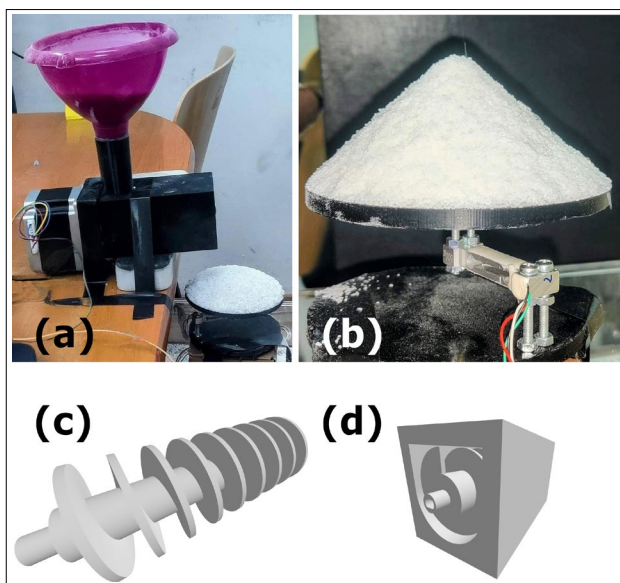
Egy diákprojekt keretében vízszintes korongra lassan adagolt homokkal tanulmányoztuk a homoklavinák jelenségét. A korong közepén folyamatosan növekedő homokkúp előbb-utóbb eléri a kritikus dőlésszöget, és ilyenkor a homok egy része lavinaként legördül, a korong pereménél lehullva. A korong tömegét folyamatosan mértük, és az így nyert *tömeg-idő* sor folyamatosan növekedését hirtelen tömegcsökkenések szakítják meg, ami a lavinák során a korong peremét elhagyó homoknak tulajdonítható. A diákok számára rendkívül izgalmas tapasztalat, hogy a lavinák lejátszódását nehezen lehet előre megjósolni, egy hosszabb idősort elemezve mégis felfedezhetünk statisztikus törvényszerűségeket. A mérési adatok kiértékelésével megvizsgálható például, hogy a lavinák méreteloszlása megfelel-e a hatványfüggvény alakú eloszlásnak, ahogyan azt az önszerveződő kritikus rendszerek elmélete előre jelzi. Hasonló, korongos kísérletet Yoshioka Naoto is végzett, aki kimutatta, hogy

a szemcseméret és a korong átmérőjének aránya függvényében a lavinák nagyságeloszlás görbéje skálafüggetlen lehet, míg más esetben inkább periodikusan ismétlődő, karakterisztikus omlások dominálnak [5].

A feldolgozott kísérleti adatok és egyszerű C++, illetve Python-szimulációk eredményeinek összevetése révén vizsgáljuk, hogy a mért lavinaméret-eloszlás mennyiben követi a hatványfüggvényt.

A jelen cikkünk két fő célkitűzést követ: 1) bemutatjuk a homoklavinás diákkísérlet megvalósítását és tapasztalatait, 2) összefoglaljuk a jelenség elméleti hátterét és egy egyszerű numerikus modellt, majd gyakorlati pedagógiai javaslatokat adunk a téma iskolai feldolgozásához.

Homokdomb a kísérletben



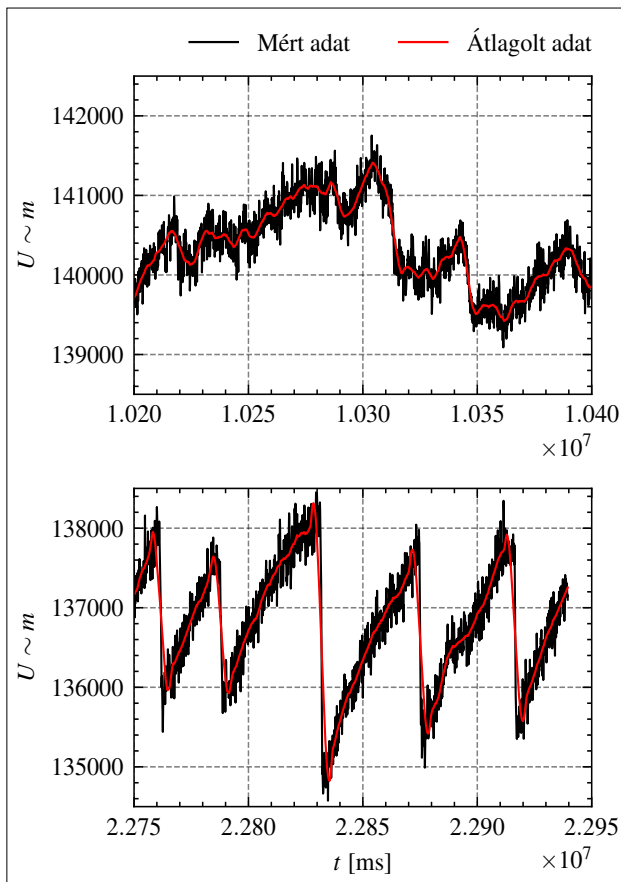
1. ábra. A kísérleti eszköz és a fontosabb 3D nyomtatott alkatrészek tervei: (a) a kísérleti berendezés fotója; (b) a korong és a rajta kialakuló homokdomb, valamint a mérőcella; (c) az Archimédeszi-csavar; (d) a homokszóró berendezés az első zárólap nélkül

A kísérleti berendezés fő része egy vízszintes, 10 cm átmérőjű kör alakú korong, amelyre folyamatosan adagolunk szemcsés anyagot (1a., b. ábra). Az adagolást egy húsdarálóhoz hasonló homokszóró mechanizmus biztosítja, ami nem más, mint egy Arkhimédeszi-csavar, melyet egy léptetőmotor forgat állandó kis sebességgel. A csavart és a homokadagoló alkatrészeit 3D nyomtatással készítettük el (1c., d. ábra). A korongot egy precíziós erőmérő cellára rögzítettük (HX711 A/D átalakítóval ellátott 500 g-os mérlegcella), így folyamatosan mérhető a korongon felhalmozódó anyag tömege. Kísérleteinkben kristálycukrot, illetve nagyobb szemcseméretű homokot használtunk.

A mérés során, amikor a kialakuló homokdomb meredeksége elérte a kritikus értéket, az oldalán lavina következett be. A korong szélét elérő lavinák esetén a korongról szemcsék hullottak le, ami a mért tömeg hirtelen

csökkenésében nyilvánult meg. Ennek alapján a lavina nagyságát a tömeg-idősorban a lavina előtti maximum és az azt követő minimum közti különbségeként definiáltuk.

A mérőcella kimeneti feszültsége (U) folyamatosan követi az időben változó tömeget (m), mivel a korongon található anyag súlyával arányos. A mért görbéken a kis kitérések és növekedési szakaszok mellett időnként jelentős zuhanások láthatók, amelyek lavinajelenségekre utalnak. A 2. ábrán a fekete görbékkel két tipikus mért jelet ábrázolunk. Az alsó grafikon a kb. 0,9 mm szemcseméretű cukorral, a felső pedig a kb. 2,1 mm szemcseméretű homokkal végzett kísérlet eredményeit mutatja. A lavinák könnyebb detektálása érdekében az eredeti jelet mozgóátlagolással simítottuk, vagyis minden időpillanathoz a környező 100 adatpont átlagát rendeltük. A simított görbéket piros vonalakkal mutatjuk az ábrákon.

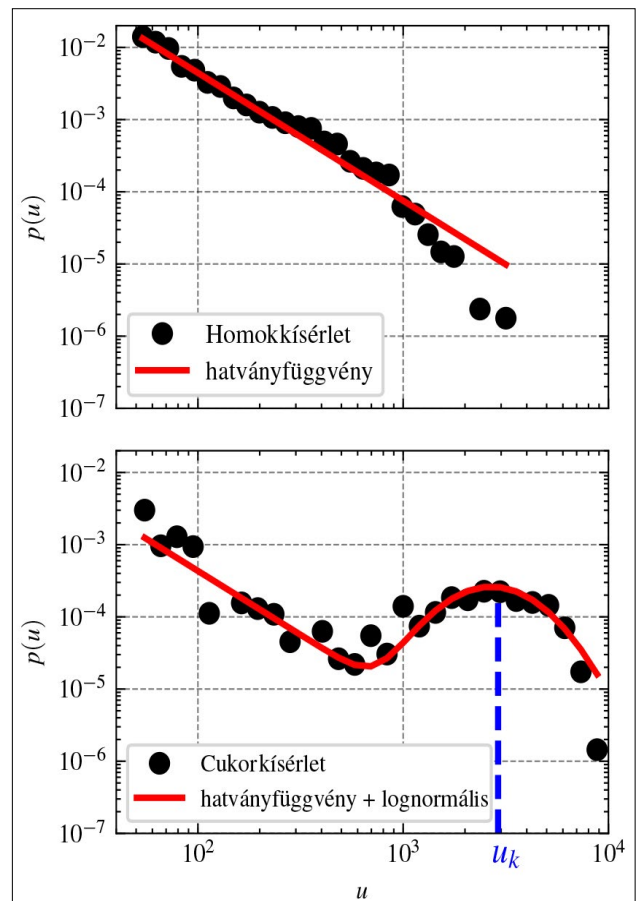


2. ábra. Példák a mért tömeg-idősorokra különböző szemcseméret esetén. Az ábrázolt mennyiségek a mérőcella tömeggel arányos kimenetének az értékei a tömegmérő rendszer kimeneti értékeként kapott önkényes egységekben. Lent a cukorral, fent a homokkal végzett kísérlet tömeg-idősora látható. Az ábrákon a lavinaesemények a tömeg hirtelen eséseiként jelentkeznek

A lavinák nagyságát úgy határoztuk meg, hogy a szűrt tömeg-idősor lokális maximumait és az azokat követő lokális minimumokat párosítottuk, majd minden max-min pár $u^{(i)} = U_{\max}^{(i)} - U_{\min}^{(i)}$ értékkülönbségét tekintettük egy-egy lavina méretének.

Ezután a lavinaméretek statisztikai elemzésével meghatároztuk a lavinák méreteloszlását, vagyis azt a valószínűségi függvényt, amely megadja, hogy egy adott u nagyságú lavina milyen gyakorisággal fordul elő. A két kísérleti esetre kapott eloszlásfüggvényeket a 3. ábrán láthatjuk. Ezek alapján megfigyelhetjük, hogy a különböző szemcseméret befolyásolja a lavinák méreteloszlását.

Egyrészt, a nagyobb homokszemcsékkel a lavinaméret-eloszlás közel skálafüggetlen, hatványfüggvényes viselkedés jegyeit mutatja $\tau = 1,77$ kitevővel. Szeretnénk azonban megjegyezni, hogy ez az eloszlás a mérési eredmények szerint csupán két nagyságrendnyi tartományban érvényes. Ez a skálafüggetlenség kimutatása szempontjából korlátozott jelentőségű, hiszen ahhoz, hogy egyértelműen kimondhassuk a skálafüggetlen jelleget, több nagyságrenden keresztül kellene megfigyelhetőnek lennie a hatványfüggvényes lecsengésnek. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy a jelen munka elsődleges célja nem ennek a szigorú skálafüggetlenségnek a kísérleti igazolása, hanem a klasszikus modell minőségi viselkedésének reprodukciója és szemléltetése egy oktatásban is alkalmazható egyszerű kísérleti elrendezés segítségével.



3. ábra. Lavinaméret-eloszlások cukor (lent) és homok (fent) esetén. A vízszintes tengelyen alkalmazott egységek azonosak a 2. ábra függőleges tengelyein alkalmazott egységekkel. Fontos kiemelni, hogy a grafikonokon logaritmikus tengelyeket alkalmaztunk. A hatványfüggvényes alak, ami logaritmikus skálán egyenesként jelenik meg, a skálafüggetlenség jele, míg a lognormális egy karakterisztikus u_k méret dominanciáját mutatja

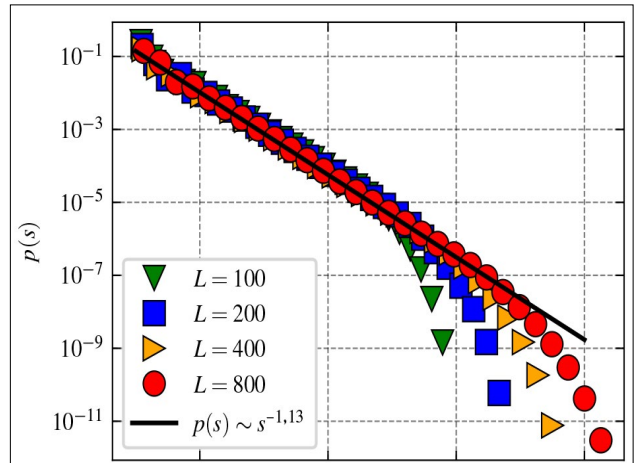
Érzékenyebb és kisebb tehetetlenségű mérőcella alkalmazásával jóval kisebb lavinák is kimérhetők, így a lavinák nagyságeloszlása szélesebb tartományban is meghatározható lenne.

Másrészt, a kisebb szemcseméretű cukor esetén a kis lavinákra érvényes hatványfüggvény-szerű csökkenés után, a nagyobb lavinák eloszlásában egy u_k karakterisztikus méret jelent meg, amelyet lognormális eloszlásként tapasztalunk. Ez olyan eloszlás, amelynek logaritmus normális, vagy Gauss-féle eloszlást követ. Hasonló következtetésre jutott Yoshioka is, aki kísérleti vizsgálata során kimutatta, hogy a lavinák nagyságeloszlása a szemcseméret-korongméret-aránytól függően vagy hatványfüggvényes, vagy karakterisztikus periodicitást mutató, az átmenet a kettő között pedig a kritikus arány (kb. 0,02) körül lép fel [5]. Mivel a mi kísérletünkben a korong átmérője 100 mm, a szemcseméretetek pedig 0,9 mm és 2,1 mm, a két eset a kritikus arány alatti (0,009) és fölötti (0,021) tartományt reprezentálja. Ez is azt mutatja, hogy eredményeink összhangban állnak Yoshioka megfigyeléseivel.

A fenti kísérleti elrendezés viszonylag egyszerűen összeállítható iskolai környezetben is. A szükséges elektronikus eszközök (Arduino mikrokontroller, kis léptetőmotor, HX711 erősítővel ellátott mérlegcella) olcsón beszerezhetők, a mechanikus alkatrészek 3D nyomtatása pedig iskolai eszközzel vagy külső szolgáltatóval megoldható. Az eszköz összeépítése és kalibrálása néhány órát igényelhet. A megfelelő lavinastatisztikához elegendes adatmennyiség begyűjtése ennél hosszabb, több órás mérési időt tesz szükségessé, de a jelenség lényege akár egy rövidebb bemutató keretében is szemléltethető.

Számítógépes modell

A klasszikus homokdomb-modellben [1] egy négyzet-rácsos felületen szórunk homokszemeket egyesével, és ezáltal egyre magasabb homokhalmokat építünk. Ha egy halom oldalán a lejtő meredeksége túl nagyra válik (vagyis egy cellában túl sok homokszem gyűlik össze), a halom oldalából homok kezd leomlani. A számítógépes szimulációban a rendszert egy $L \times L$ méretű rács reprezentálja, amelynek minden cellája a benne lévő homokszemek számát (magasságát) tárolja. Kezdetben minden cella magassága nulla. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy cellát a rácson, és hozzáadunk egy homokszemet (növeljük a cella magasságát eggyel). Ha bármely cella magassága eléri vagy meghaladja a kritikus értéket (négy homokszem), akkor az adott cella instabillá válik, és megindul a leomlás folyamata. Ez azt jelenti, hogy amíg van instabil (túl magas) cella a rácson, addig az összes instabil cella egyszerre leomlik. Ilyenkor az instabil cella magassága néggyel csökken, és a négy szomszédos cella kap egy-egy homokszemet. Ha a cella a rács szélén helyezkedik el, akkor a lehulló homokszemek egy része kijut a rendszerből. A folyamatot addig folytatjuk, amíg a rendszer minden cellája stabil nem lesz (minden-

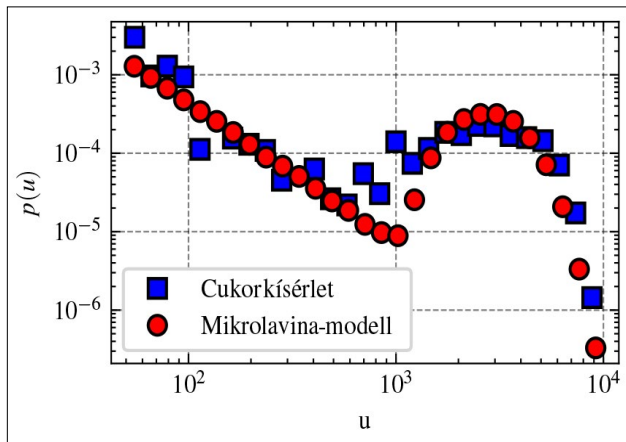


4. ábra. Lavinaméret-eloszlások különböző L rácsméreteket esetén a homokdomb-modell szimulációjában. Itt a vízszintes tengelyen az s lavinaméret a lavina során leomló cellaszámmal van kifejezve

hol négy alatt marad a magasság). Egyetlen hozzáadott homokszem okozta összes leomlás sorozatát egy lavinaeseménynek tekintjük. Feljegyezzük a lavina jellemzőit, például a lavina méretét, ami az adott esemény során összesen lezajlott omlások száma. Gyakran vizsgálják a lavina időtartamát is, de jelenleg ez a mi szempontunkból nem releváns.

Ezt a folyamatot nagyon sokszor megismétljük, így rengeteg lavinaadatot kapunk (mi több mint 4000000 lavinát rögzítettünk). A szimuláció eredményeként azt tapasztaljuk, hogy a lavinák mérete erősen változó: a legtöbb esemény kicsi, de ritkán nagyon nagy lavinák is előfordulnak. A $p(s)$ lavinaméret-eloszlás (ahol s a lavina nagysága, azaz a lavina során leomló cellák száma) skálafüggetlen, tehát megközelítőleg hatványfüggvény alakú, melynek kitevője szimulációink alapján $\tau = 1,13$. Azonban a véges rácsméret behatárolja a maximális lavinaméretet. A 4. ábra szemlélteti a szimulációval kapott lavinaméret-eloszlásokat különböző L rendszerméretekre. Látható, hogy minél nagyobb a rendszer, annál tovább nyúlik a hatványfüggvény-szerű eloszlás egyenes szakasza, vagyis annál nagyobb lavinák fordulhatnak elő. A homokdomb-modell így jól példázza az önszerveződő kritikus rendszereket, ahol a lavinák méreteloszlása nem Gauss-görbe szerint, hanem egy lassan lecsengő hatványfüggvény-eloszlás szerint alakul.

A továbbiakban, a korábban ismertetett kísérleti eredmények értelmezéséhez és különösen a tipikus lavinaméret megjelenésének magyarázatához bevezettünk egy egyszerű mikrolavina-modellt. Ennek célja egyrészt megmutatni, hogy a mért tömegingadozások nem mindig feleltethetők meg egyetlen lavinának. Előfordulhat, hogy a mérés során több kisebb lavina egymás utáni vagy egyidejű lezajlása eredményez egyetlen, összegzett eseményt a mérőeszköz kimenetén. Másrészt a modell lehetőséget ad annak szemléltetésére, hogy egy kísérlet során mit is mérünk valójában. A szakmódszertani jelentőség e modell esetében abban rejlik, hogy saját tapasztalaton keresztül mutatja meg a tanulóknak, hogy a valós fizikai



5. ábra. A mikrolavina-modell által szimulált lavinaméret-eloszlás (piros körök) log-log skálán, összevetve a cukorral végzett kísérletből kapott nagyságeloszlással (kék négyzetek). A vízszintes tengelyen alkalmazott egységek egyeznek azonosak a 3. ábra vízszintes tengelyein alkalmazott egységekkel

mérések gyakran csak közvetett módon tükrözik az alrendszerek viselkedését. A klasszikus homokdomb-modell lokális, kritikusan önszerveződő folyamatai a kísérleti rendszerünkben is jelen lehetnek, azonban a mért jel (például a korongról lehullott homok vagy cukor tömege) nem egyetlen lavina nagyságát, hanem azok esetleges összeolvadását is tartalmazhatja. Ebben a rendszerben fontos paraméter a szemcseméret és a korong méretének aránya. Adott korongméretnél a durvább szemcsék esetén szinte minden lavina egyedileg mérhető, viszont finomabb anyag használatakor egyetlen mérési adat több, különálló esemény összegződése lehet. Ez a felismerés nemcsak a kísérleti eredmények értelmezését segíti, hanem a tanulók természettudományos gondolkodását is fejleszti, hiszen megmutatja, hogy az adatok mögötti fizikai folyamatok megértése nélkül a mérés félrevezető lehet.

A mikrolavina-modellben azt feltételezzük, hogy az egyéni mikrolavinák mellett egy nagyobb lavina sok apró mikroesemény összegeként is létrejöhet. Éppen ezért, a klasszikus homokdomb-modell alapján kapott hatványfüggvény nagyságeloszlással generáljuk a lavina-események bizonyos hányadát, míg a maradékot N_m számú mikrolavina összegeként hozzuk létre. A modell szimulációjára egy interaktív szimulációt készítettünk, amelyben a diákok állíthatják a hatványfüggvény-eloszlás paramétereit ($s_{\min}$ legkisebb lavinaméret, $s_{\max}$ legnagyobb lavinaméret, τ kitevő), a mikro- és összeglavinák η arányát, valamint az N_m értéket [6]. Érdekes módon, megfelelő paramétereket választva ($s_{\min} = 50$, $s_{\max} = 2000$, $\tau = 1,77$, $\eta = 0,9$ és $N_m = 14$) az 5. ábrán látható mikrolavina-modellel előállított eloszlás nagyon hasonló jellegű, mint a cukorral végzett homokdomb-kísérlet eloszlása. Kék négyzetekkel ábrázoltuk a cukorral végzett kísérlet eloszlását, ami egy hatványfüggvény és egy lognormális eloszlás összege. Jól látható, hogy a piros körökkel áb-

rázolt mikrolavina-modell eredménye kiválóan követi a szimulált pontokat.

Összességében elmondhatjuk, hogy számítógépes szimulációk segítségével szemléletesen bemutattuk a kísérletileg megvalósított lavinajelenség néhány statisztikus sajátosságát és jellemző eloszlását, és a kapott eredményeink egybevágóak korábbi kísérletek megfigyeléseivel.

Összefoglalás

A bemutatott homokdombkísérlet hozzájárul ahhoz, hogy a tanulók jobban megértsék a fizikai jelenségek ok-okozati összefüggéseit, és felismerjék a természet törvényszerűségeinek érvényesülését a valóságban. Például, mechanika témakörben szemléltethető egy homokdomb lejtőszögének kialakulása a súrlódási erő és az egyensúly bemutatására. Később, a felsőbb évfolyamokon ugyanennek a jelenségnek a bonyolultabb, nehezen előre jelezhető viselkedése is megvizsgálható, kitekintésként a komplex fizikai rendszerek felé. Összességében az ilyen tanórai feldolgozás segíti, hogy a tanulók a tanterv szándékainak megfelelően aktívan, érdeklődéssel sajátítsák el a tananyagot, miközben fejlődnek kulcskompetenciáik (megfigyelés, kísérletezés, problémamegoldás, természettudományos gondolkodás).

Magasabb évfolyamokon a modellek szerepe, a mérés és adatelemzés, valamint a statisztikai jelenségek értelmezése (például valószínűségi eloszlások, nem determinisztikus viselkedés) már hangsúlyosabban jelennek meg a fizikaoktatásban. A homoklavina-jelenség lehetőséget kínál arra is, hogy a diákok saját tapasztalataikból induljanak ki és empirikus úton ismerkedjenek meg a komplex rendszerek jellemzőivel. Ily módon az egyszerűen reprodukálható kísérlet, valamint a hozzá kapcsolódó numerikus szimuláció a projektalapú tanulás és a tanulói önállóság fejlesztésének hatékony eszköze lehet.

Irodalom

1. P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld (1988): Self-organized criticality. *Phys. Rev. A* 38, 364–374.
2. A. Kuki, S. Lipcsei, I. Gere, F. Járai-Szabó, A. Gergely, D. Ugi, P. D. Ispánovity, Z. Dankházi, I. Groma, Z. Nédá (2023): Statistical analogies between earthquakes, micro-quakes in metals and avalanches in the 1D Burridge-Knopoff model. *Geofizika*, 40(1), 1–27.
3. Nédá Z., Antal D., Gergely A. (2023): Földrendésmo- dell a futószalagon. *Fizikai Szemle*, 2023/10, 353–357.
4. K. Baranyai (2015): Nem hagyományos értelemben vett modern fizika a középiskolában. Doktori értekezés, Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, Fizika Doktori Iskola, <https://fiztan.phd.elte.hu/kozkincs/doktorik/ertekezesek/bk.pdf>
5. N. Yoshioka (2003): A sandpile experiment and its implications for self-organized criticality and characteristic earthquake. *Earth Planets Space*, 55, 283–289.
6. <https://atom.ubbcluj.ro/mikrolavina>