

GRAVITÁCIÓELMÉLETEK TESZTELÉSE GRAVITÁCIÓS HULLÁMOKKAL

Karácsonyi Kata¹, Cirok Balázs¹, Keresztes Zoltán¹, Gergely Árpád László^{1,2,*}

¹Szegedi Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged

²HUN-REN Wigner FK, Részecske- és Magfizikai Intézet, Elméleti Fizika Osztály, Budapest

*E-mail: laszlo.arpad.gergely@gmail.com

Az emberiség egyik legősbibb törekvése az Univerzum megértése. A természeti jelenségeket modellezzük, matematikailag pontos logikai rendszerbe foglaljuk, és posztulátumokon nyugvó elméleteket alkotunk. Ha jóslataik egyeznek a tapasztalatokkal, az növeli a beléjük vetett bizalmat, ha pedig eltérést tapasztalunk, akkor az új, általánosabb fizikai elmélet megalkotására ösztönöz. Ennek határesetként természetesen tartalmaznia kell a korábban sikeresen bevált elméletet, így jutunk a természet egyre pontosabb leírásához.

Az egyik legsikeresebb elmélet Albert Einstein 111 éve publikált általános relativitáselmélete, mely gyökeresen új módon tárgyalja a gravitációt: a newtoni elképzeléssel szemben nem erőhatásként, hanem a téridő görbületeként értelmezi azt. A téridő fogalma egyesíti a három térbeli és az egy időbeli koordinátát, így az anyag és a téridő kölcsönhatását új perspektívába helyezi. Matematikailag az

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \quad (1)$$

Einstein-egyenletek mondják meg a téridőnek, hogy az energia-impulzus hatására hogyan görbüljön. Az adott téridőgörbületen a

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0 \quad (2)$$

geodetikus egyenlet határozza meg az anyag mozgását. Az egyenletekben a latin indexek téridő-koordinátákat jelölnek, c a fénysebesség, Γ_{bc}^a a Christoffel-szimbólumok, G a gravitációs állandó, T_{ab} az energia-impulzus tenzor, G_{ab} pedig az Einstein-tenzor, amely

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R, \quad (3)$$

ahol R_{ab} a Ricci-tenzor, g_{ab} a metrikus tenzor, R pedig a görbületi skalár.

Az általános relativitáselmélet megszületése óta eltelt évszázadban számos bizonyíték igazolta annak helyességét. Ilyen a Merkúr perihéliumának (napközelségének) vándorlása, amelynek pontos értékét a Newton-féle gravitáció nem, de az általános relativitáselmélet teljes pontossággal megadta; a gravitációs vöröseltolódás, a Nap közelében haladó fény elhajlása vagy a radarviszhang Shapiro-késése.

Az általános relativitáselmélet egyik legérdekesebb jóslata a gravitációs hullámok létezése, amelyek a fény vákuumbeli sebességével terjednek. Az univerzum energetikailag leghevesebb asztrofizikai eseményei, például fekete lyukak, neutroncsillagok vagy egyéb kompakt égitestek összeolvadásai keltik őket. A Hulse–Taylor-féle kettőspulzár megfigyelése rendkívül pontosan igazolta, hogy a rendszer energiát veszít az eltávozó gravitációs



Karácsonyi Kata fizikusi tanulmányait a Szegedi Tudományegyetemen végezte. Tudományos érdeklődése az égi mechanika, kozmológia és a gravitációelmélet. A LIGO Tudományos Kollaboráció tagja 2025 óta. Jelenlegi kutatási területe a skalár-tenzor gravitációelméletek által jósolt új polarizációs módusok vizsgálata gravitációs hullámformákban, valamint detektálhatóságuk elemzése a LIGO–Virgo észlelésekben.



Keresztes Zoltán a Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizika Tanszékének docense. Kutatási területe a mezőelmélet, valamint az einsteini és alternatív gravitációelméletek. Jelentős eredményeket ért el a sötétenergia-modellek, a bránvilágok, skalár-tenzor elméletek, valamint a kompakt kettős rendszerek pálya- és spindinamikájának, valamint gravitációs sugárzásának elméleti tanulmányozásában.



Cirok Balázs fizikusi tanulmányait a Szegedi Tudományegyetemen végezte. Tudományos érdeklődése a gravitációshullám-észlelések elemzése. A LIGO Tudományos Kollaborációnak 2022 óta tagja. Jelenlegi kutatási területe a módosított gravitációelméletek által jósolt diszperzió, valamint a nem tenzori polarizációs módusok detektálhatóságának vizsgálata a LIGO–Virgo észlelésekben.



Gergely Árpád László a Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Tanszékének egyetemi tanára, a HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont Gravitációfizikai Kutatócsoportjának vezetője. Kutatásait Magyarországon, az Amerikai Egyesült Államokban, Franciaországban, az Egyesült Királyságban és Japánban végezte. Kutatási területe az általános relativitáselmélet és módosításai, a kozmológia, fekete lyukak, gravitációs hullámok, valamint a gravitáció kvantálása.

hullámokon keresztül. A gravitációs hullámok első közvetlen megfigyelése 2015. szeptember 14-én történt [1], a két LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) detektorban. Az esemény forrása két fekete lyuk összeolvadása volt.

Tíz évvel később az eddig észlelt 218 gravitációs hullám-jelenséget a GWTC-4 katalógus tartalmazza [2]. Ezzel a gravitációs hullámok kutatása a modern fizika és csillagászat legizgalmasabb kutatási területei közé lépett. Nemcsak az asztrofizikai források felfedezését és megismerését segíti, hanem lehetőséget ad az általános relativitáselmélet helyességének további tesztelésére is. Erre több okból is szükség van: a kozmológiai megfigyelések alapján a világegyetem összetételének 94%-a csak gravitációsan megnyilvánuló sötét energia és sötét anyag formájában jelenik meg [3]. Ezek a sötét komponensek sem az elektromágneses, sem az erős kölcsönhatásban nem vesznek részt. A gyenge kölcsönhatásban való esetleges részvételükre alapozott megfigyelési kísérletek eddig eredménytelenek voltak. A megoldás az einsteini gravitáció kiegészítése, módosítása lehet. A gravitáció és a természet kvantumos leírásának összeegyeztethetlensége szintén arra utal, hogy egyiket vagy mindkettőt meg kell változtatni egy majdani kvantumgravitációt is magába foglaló mindenségelmélet megalkotásához.

A Lovelock-tétel a négydimenziós téridőben az (1) Einstein-egyenletek unicitását mondja ki, amennyiben a gravitáció olyan divergenciamentes dinamikai egyenletek szerint fejlődik, melyek a metrikában legfeljebb másodrendű, lokális hatásból vezethetők le, és szabadsági fokait kizárólag a metrikus tenzor hordozza [4]. Így a módosított gravitációelmélet hatása vagy négytől különböző dimenziószámában értelmezett, vagy új mezőket (skalár, vektor vagy új tenzor, vagy nemlokális operátorokat, például a d'Alembert-operátor inverzét) tartalmazza, vagy sértik a diffeomorfizmus-invarianciát. A módosított gravitációelméletek közös vonása, hogy legalább egy új szabadsági fokot tartalmaznak az általános relativitáselmülethez képest.

A kvantumgravitáció alacsony energiás határeseteként is felfogható módosított gravitációelméletek napjainkban már nemcsak elméleti megfontolások alapján vizsgálhatók, hanem többek között a gravitációs hullámok megfigyelésével tesztelhetőkké is váltak [5]. A gravitációs hullámokat jelenleg a földfelszínre telepített lézerinterferométerek hálózata detektálja. A hálózatot a LIGO (Hanford és Livingston, Amerikai Egyesült Államok), a Virgo (Pisa, Olaszország) és a KAGRA (Kamioka, Japán) detektorok alkotják, megfigyeléseik feldolgozását pedig a LIGO–Virgo–KAGRA (LVK) Kollaboráció végzi. A szegedi LIGO-csoport több mint egy évtizede tagja a LIGO Tudományos Kollaborációnak. Kutatásainak központjában a kompakt kettősök spinjének és tömegmultipólusainak a pályafejlődésükre és a gravitációs sugárzásukra gyakorolt hatása, valamint a szóba jöhető gravitációs elméletek gravitációshullám-megfigyelésekkel történő tesztelése áll.

A gravitációs hullámok diszperziója

A gravitációs hullámok detektálásul szolgáló, földfelszínen megépített interferométerek az emberi fül érzékenységi tartományába eső frekvenciájú hullámokat képesek detektálni. Az optikai vagy más frekvenciájú elektromágneses hullámok detektálására alkalmas távcsövekkel ellentétben szinte minden irányból érkező gravitációs sugárzásra érzékenyek, néhány vakfolt kivételével. Amikor 2017-ben mindkét LIGO-detektor egy két neutroncsillag összeolvadásából keletkezett gravitációs hullámot mutatott ki [6], a Virgo detektor nem jelzett hasonló, így – működési hibára utaló ok hiányában – joggal tették fel, hogy a GW170817 gravitációs hullámjel érkezési iránya épp annak a vakfoltján belül helyezkedett el, drasztikusan javítva a forrás égi helyzetének behatárolását. A Fermi és az INTEGRAL gammadetektorok ugyanabból az irányból mindössze 1,7 másodperccel később észlelték a GRB170817A gammakitörést. A térbeli és időbeli egybeesés alapján ez ugyanazon forrásból származik, mint a gravitációs hullám, és egy kilonóvát eredményező összeolvadást kísért. E felfedezés tudománytörténelmi jelentőségét az elkövetkezendő órák, napok, hetek alatt lefolytatott, az elektromágneses spektrum egészét lefedő, pozitív eredményekkel záruló megfigyelések sorra támasztották alá [7].

A GW170817/GRB170817A esemény tizenöt tizedesnyi pontossággal igazolta, hogy a gravitációs hullámok a fénysebességgel megegyező sebességgel terjednek, ahogy az általános relativitáselmélet jóslta [8]. Egy $m_g > 0$ tömegű graviton diszperzióját az $E^2 = (pc)^2 + m_g^2 c^4$ adná meg, ahol E és p rendre annak energiája és hármassimpulzusának nagysága, így a tömeges graviton lassabban terjedne, nevezetesen $v_g = c[1 - m_g^2 c^4/E^2]^{1/2}$ csoportsebességgel. Az esemény a graviton tömegére a szigorú $m_g \leq 1,68 \times 10^{-21}$ eV/ c^2 korlátot adta [9]. Az elektromágneses kísérősugárzással rendelkező gravitációs hullámjelek azonban rendkívül ritkának bizonyultak: az eddigi 218 detektálás között nem volt rá más példa. A gravitációs sugárzás terjedési sebességének (illetve a graviton tömegének) további pontosítását a források asztrofizikai modellezése is bonyolítja.

Felmerül a kérdés, hogy a gravitációs hullámok diszperziójának tanulmányozásából lehet-e következtetni a gravitáció helyes elméletére. A válaszhoz tekintsük a gravitációs hullám módosított diszperziós relációjának (MDR) elméletfüggetlen, általánosabb alakját, mely a standard kozmológiai modellben

$$E^2 = (pc)^2 + A_\alpha (pc)^\alpha \quad (4)$$

alakú [10], ahol α és A_α fenomenológiai paraméterek (az α szerint nincs összegzés). A tömeges graviton esetét $\alpha = 0$ és $A_0 = m_g^2 c^4$ adja (ahol $m_g = 0$ az általános relati-

¹ Az irodalomban az MDR anizotrop, azaz irányfüggő alakja is fellelhető [11]. Az MDR-analízis nem csak kompakt kettősök esetében alkalmazható; megfelelő modell alkalmazásával érvényes marad tetszőleges tranzienst (pl. szupernóva-robbanások okozta) jeleknél is.

tásmélet), a többi hatvány egyéb módosított gravitációelméletek vezető rendű korrekcióinak felel meg, az 1. táblázat szerint. A gravitációs hullám $v_g \equiv dE/dp$ csoportsebességére tehát a vákuumbeli fénysebességtől való kis eltérés vezető rendjében felírható a

$$\left(\frac{v_g}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha)A_\alpha(hf)^{\alpha-2} \quad (5)$$

összefüggés, ahol h a Planck-állandót, f pedig a hullám frekvenciáját jelöli (az energia $E = hf$, a de Broglie-reláció értelmében).

1. táblázat. Módosított gravitációelméletek és a megfelelő α paraméterek

α	Gravitációelmélet
4	extradimenziós elméletek [12], Hořava–Lifshitz-gravitáció [13, 14], nem kommutatív téridő-geometriák [15]
3	deformált speciális relativitáselmélet [16]
2,5	multifraktál téridő [17]
0	tömeges graviton
< 0	dinamikus sötét energia [18]

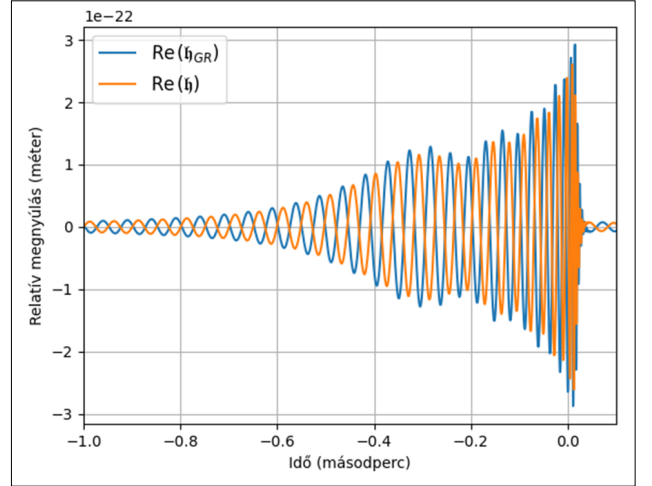
A gravitációs hullám terjedési sebessége az (5) eredmény szerint frekvenciafüggő. Egy kvázikörpályán mozgó kompakt kettős rendszer tagjainak összeolvadása során a (poszt-newtoni sorfejtésben) vezető rendű gravitációs sugárzás frekvenciája a keringési frekvencia kétszerese, az utóbbi viszont növekszik a gravitációs hullámok által elvitt energia miatt. Így a változó frekvenciájú vezető rendű sugárzás terjedési sebessége időfüggő. Másrészt a korrekcióként megjelenő magasabb frekvenciájú felharmonikusok sebessége is eltér a vezető rendű sugárzásétól. Már a legelső, GW150914 gravitációs hullám diszperziójának fenti módszerrel történt elemzéséből is az igen szigorú $m_g \leq 1,2 \times 10^{-22}$ eV/c² felső korlátot sikerült kiróni a graviton tömegére [19]. Az első 90 gravitációs hullám-észlelést tartalmazó GWTC-3 katalógus alapján pedig az LVK Kollaboráció ezt $m_g \leq 2,42 \times 10^{-23}$ eV/c² értékre pontosította [5].

Elvben a $h(f; \theta; \alpha, A_\alpha)$ gravitációs hullámforma eltérhet az általános relativitáselméletben érvényes $h_{\text{GR}}(f; \theta)$ hullámformától. Itt θ a forrást jellemző paraméterek halmazát jelöli, mint például a tömegek, spinek, pályaelemek, detektortól számított távolság, relatív orientáció. A módosult hullámformát az (Ω kozmológiai paraméterektől és z vöröseltolódástól is függő) $\delta\Psi_\alpha \sim A_\alpha f^{1-\alpha}$ fáziseltolódás jellemzi [20], azaz

$$h(f; \theta; \alpha, A_\alpha) = h_{\text{GR}}(f; \theta) e^{i\delta\Psi_\alpha(f; \Omega, z; \alpha, A_\alpha)}. \quad (6)$$

A módosított gravitációelméletekben a jel keletkezésében is eltérések lehetnek az általános relativitáselmélet-hez képest, a terjedési sebességben megjelenő kis eltérések viszont, mivel összeadódnak, az igen távolról érkező hullámok esetén sokkal jelentősebbek. Ez az oka annak,

hogy a (6) egyenletben a módosulás csak a fázisban jelenik meg. Az itt leírtakat az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. Az ábrán h_{GR} jelöli azt az általános relativitáselméleti IMR-PhenomXPHM hullámformát, amelyet a LIGO–Livingston-detektor mérne zajmentes esetben a GWTC-4 katalógusbeli GW230811_032116 esemény forrásának medián paramétereit feltételezve. A módosított diszperziós reláció miatt frekvenciafüggő fáziseltolást tartalmazó h hullámforma $\alpha = 4$ és $A_4 = 10^{-21}$ peV⁻² paraméterekre készült (Az esemény MDR-analízisét és az ábra előállítását Cirok Balázs végezte)

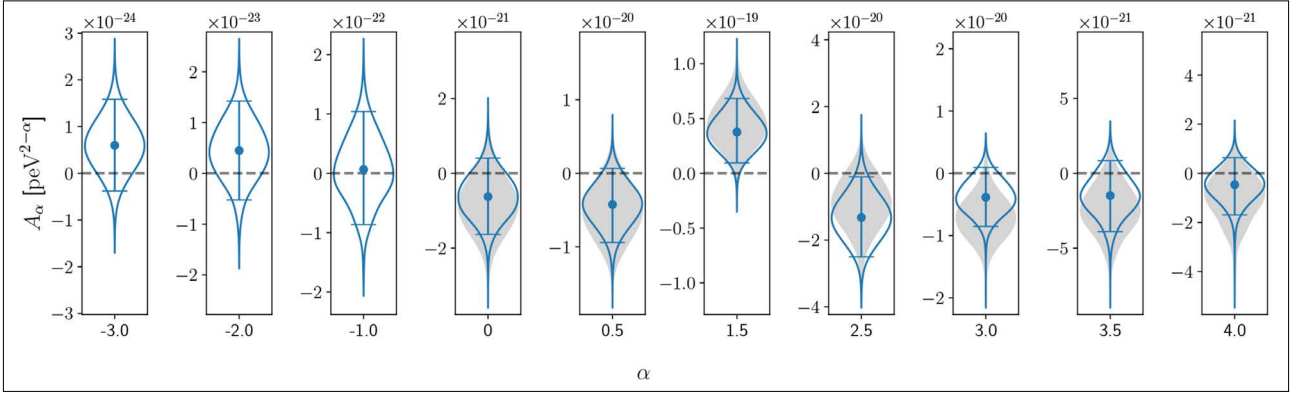
A szegedi LIGO csoport részvételével újabb MDR-analízis készült, a GWTC-3 katalógus feketelyuk-kettősök által keltett gravitációs hullám-jelei közül a 43 leghangosabb elemzésével [21]. Ez az IMRPhenomXPHM hullámforma-modellt [22] veszi alapul, amely kompakt kettősök által keltett gravitációs hullámjeleket modellez az általános relativitáselmélet szerint. Figyelembe veszi a komponens égitestek spinjei okozta pályaprecessziót, valamint a magasabb rendű módusokat is. A bespiralizálás és lecsengés fázisának analitikus modellezése mellett a köztes összeolvadási fázist numerikusan kezeli, a különböző tartományokat pedig illeszti egymással.

A módosított (6) hullámforma alkalmazásakor az α paramétert rögzítjük, különböző értékeire keressük azon paraméterhalmazt, amelyekkel a mért jelet legjobban közelíteni tudjuk. Ehhez a Bayes-tételre alapuló becslést alkalmazunk, miszerint

$$\mathcal{P}(\theta, A_\alpha | d_i) \sim \pi(\theta, A_\alpha) \mathcal{L}(d_i | \theta, A_\alpha). \quad (7)$$

Itt $\pi(\theta, A_\alpha)$ és $\mathcal{P}(\theta, A_\alpha | d_i)$ rendre az i -edik kettős paramétereiről alkotott *a priori* és *a posteriori* (azaz *tapasztalatot megelőző*, illetve *abból származó*) tudásunkat jellemző valószínűségi sűrűségfüggvények. Előbbi megválasztása szimmetriaelvek (pl. nincs okunk feltételezni, hogy az ég adott pontjából nagyobb valószínűséggel várunk jelet, mint egy másiktól) és fizikai érvelések (pl. nincs negatív tömeg) alapján történik.

A $\mathcal{P}(\theta, A_\alpha | d_i)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy a mért d_i adatsorban lévő hullámforma a θ, A_α paraméterekkel rendelkezik. Az $\mathcal{L}(d_i | \theta, A_\alpha)$ likelihood pedig annak a valószínűségét adja meg, hogy ha a forrásból jövő hullámformát a θ, A_α paraméterek jellemzik, akkor a d_i



2. ábra. Az általános relativitáselméleti jóslat, vagyis $A_\alpha = 0$ az $\alpha \in \{1,5; 2,5\}$ esetek kivételével a vízszintes kék szakaszokkal jelzett 90%-os kredibilitási intervallumon belül esik [21]. A két kivételes α értéknél az $A_\alpha = 0$ rendre a 0,009 és 0,971 kvantilisoknak felelnek meg. Bár ezekben az esetekben a módosított diszperziót adó elmélet jóslata jobban illeszkedik az adatokra, mint az einsteini gravitációé, ez statisztikailag nem szignifikáns. Az eddigi adatok alapján mind az általános relativitáselmélet, mind annak kis módosulásai megengedettek

adatsort mérjük. Az $\mathcal{L}(d_i|\theta_i, A_\alpha)$ kifejezi azt is, hogy ha a d_i adatsorból levonjuk a modellezett jelet, az így kapott reziduum mennyire konzisztens a zajjal. Az említett zaj korrelálatlan a különböző interferométerek között, továbbá stacionárius, Gauss-eloszlást követő valószínűségi vektorváltozó. A mérési ciklusok során ez természetesen nem mindig teljesül: ezeket az eseteket szokás glitcheknek nevezni. Számos módszer létezik felismerésükre, kategorizálásukra, illetve az érintett adatsorokból való eltávolításukra, melyet követően a zaj modellezésére felsorolt hipotézisek újra érvényessé válnak. (Így történt például a már említett GW170817 esetén is, amikor ugyanis a LIGO–Livingston-detektor által mért adatsorból kellett egy glitchet eltávolítani [6].) Amennyiben az A_α paraméter értékét szeretnénk becsülni az egymástól kauzális értelemben független N darab esemény alapján, megmutatható, hogy a (7) által adott $\mathcal{P}(\theta_i, A_\alpha | d_i)$ értékek a következőképpen adják meg annak a valószínűségét, hogy a gravitációs hullám diszperziója A_α az összes mérési adatsorban [21]:

$$\mathcal{P}(A_\alpha | \{d_i\}_{i=1}^N) \sim \pi(A_\alpha)^{1-N} \prod_{i=1}^N \int \mathcal{P}(\theta_i, A_\alpha | d_i) d\theta_i. \quad (8)$$

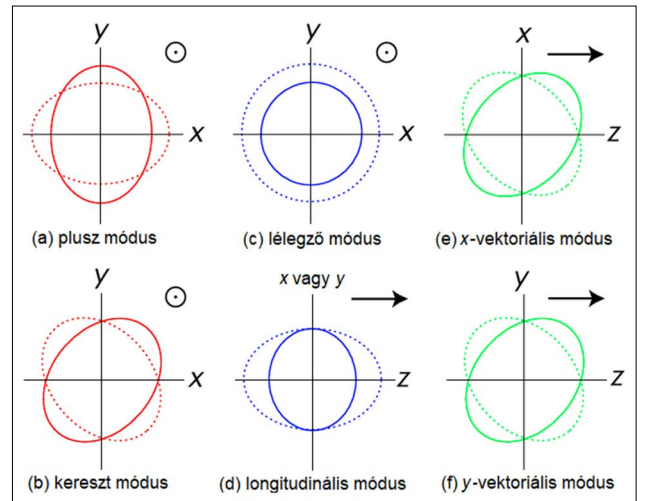
A 2. ábra a GWTC-3 katalógus kiválasztott gravitációs hullám-jeleiből származtatott (8) sűrűségfüggvényeket kék görbeként, míg a korábbi elemzés [5] megfelelő eredményeit szürke kontúrokként mutatja be. Az $\alpha \in \{1; 2\}$ exponensek elemzése azért maradt ki, mert az előbbi esetén a hullámforma csak frekvenciafüggetlen fáziseltolódást szenved (6) alapján; míg az utóbbi esetben a gravitációs hullámok csoportsebessége frekvenciafüggetlen (de a vákuumbeli fénysebességtől első rendben eltér). Az exponensek elegendően sűrűn változnak ahhoz, hogy az általános relativitáselmélet által implicált $A_\alpha = 0$ értéktől való szignifikáns eltérés akkor is szembe szökjön, ha valamely köztes α esetén jelenne meg. Az általános relativitáselmélet az összes exponens esetén konzisztens az adatsorokkal, azonban az exponensek által lefedett módosított gravitációelméletek is azok.

Az elemzés a graviton tömegének felső korlátját tovább csökkentette az $m_g \leq 2,24 \times 10^{-23}$ eV/c² értékre [21].

A gravitációs hullámok polarizációi

A gravitációs hullámok polarizációi a gravitációs elméletek másféle tesztelését teszik lehetővé. Az elektromágneses sugárzáshoz hasonlóan a gravitációs sugárzás is polarizált, azonban amíg az előbbi polarizációs vektorral, addig utóbbi polarizációs tenzorral jellemezhető. A $\square x^a = 0$ hullámegyenletet teljesítő harmonikus koordináták a $g^{cd}\Gamma_{cd}^b = 0$ feltételhez vezetnek, melynek alkalmazásával az (1) Einstein-egyenlet hullámegyenletté válik. Az anyagmentes régiókban ennek megoldásai a

$$h_{ab} = \epsilon_{ab} e^{ik_c x^c} + \epsilon_{ab}^* e^{-ik_c x^c} \quad (9)$$



3. ábra. A gravitációs hullámok hat lehetséges polarizációja, a [23] forrás alapján. Piros jelöli az összes gravitációelméletben megjelenő módusokat. Kék és zöld jelöli a skalár-tenzor, illetve a vektor-tenzor elméletekben szereplő módusokat. A síkhullám z irányban terjed. A folytonos és szaggatott kontúrok időben egymást követik. Például a plusz módus esetén, míg a sajtáthossz az egyik tengely mentén periodikusan növekszik, addig a másik mentén csökken, majd ugyanígy fordítva

síkhullámok, ahol k_c a négyes hullámvektor, x_c a téridő-koordináták, ϵ_{ab} a polarizációs tenzor, ϵ_{ab}^* pedig annak komplex konjugáltja. Ezek az elektromágneses síkhullámok analógiái. A polarizációs tenzor eredetileg tíz független komponenséből a harmonikus koordináták választása az $\epsilon_{ab}k^b = 0$ feltétel miatt csak hat független komponenset hagy meg. Mivel a harmonikus koordináták nem egyértelműek, megfelelő mértékválasztással (terjedési irányra transzverzális, spúrmentes) a polarizációs tenzor független komponenseinek száma kettőre csökken, vagyis a síkhullám polarizációs tenzora csak két polarizációs módust tartalmaz. Ha egy terjedési irányra merőleges síkban elhelyezkedő részecskegyűrűn haladna át a hullám, az periodikusan oszcillálna a polarizációs módusnak megfelelően. Bár az általános relativitáselmélet szerint csak kétféle módus létezhet, a módosított gravitációelméletekben hat módus is megjelenhet, amelyeket a 3. ábra mutat be.

Egy z irányban terjedő gravitációs hullám esetén a hat önálló polarizációs módus: plusz (+), kereszt (×), x -vektoriális (x), y -vektoriális (y), lélegző (b) és a longitudinális (l) skalár. A módusok térbeli polarizációs mátrixai [24]:

$$\epsilon_{ab}^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \epsilon_{ab}^{(\times)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \epsilon_{ab}^{(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

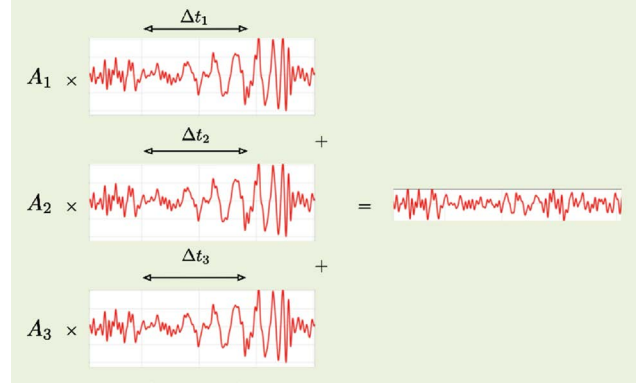
$$\epsilon_{ab}^{(y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \epsilon_{ab}^{(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \epsilon_{ab}^{(l)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Skalár-tenzor elméletekben (pl. Horndeski-elmélet-család) a skalármező skalár módust gerjeszt a + és × tenzoriális módusok mellett. A skalármódus szétválasztható lélegző és longitudinális módusokra. Az előbbi az x és y tengely mentén egyszerre okoz ugyanakkora megváltozást, míg az utóbbi a z irányban terjedve a z tengely mentén okoz longitudinális deformációkat. A vektor-tenzor elméletekben a gravitáció közvetítője a metrikus tenzor és egy vektormező, ezekben x -vektoriális vagy y -vektoriális módusok gerjesztődhetnek. A vektormódusok az x és az y irányban okoznak transzverzális deformációkat.

A gravitációs hullám a felsorolt polarizációk lineáris kombinációit tartalmazhatja. Az LVK interferométerhálózat egymástól különböző detektorkonfigurációi és elhelyezkedései a polarizációs módusok észlelhetőségét teszik lehetővé. A nem tenzoriális polarizációk kimutatása vagy kizárása kulcsfontosságú tesztje az általános relativitáselméletnek, bár megemlítendő, hogy észleléskor esetenként a detektor karjai pont úgy állhatnak a beérkező gravitációs hullámhoz képest, hogy bizonyos polarizációs módusok nem észlelhetők [25].

A gravitációs hullámok polarizációjának vizsgálatához a szegedi LIGO-csoport a modellfüggetlen null adatfolyam („null stream”) módszerének alkalmazásával

járul hozzá. A null adatfolyamot – egyféle értelmezés szerint – úgy foghatjuk fel, mint a detektorhálózat jeleiből képzett olyan lineáris kombinációt, amellyel a tenzoriális módusok kioltják egymást (4. ábra). Ez esetben a maradék jel csupán zajból és nem tenzoriális polarizációból állhat.



4. ábra. A null adatfolyam szemléltetése. A Δt_i , A_i paraméterek időkétségek, illetve kombinációs együtthatók (Az ábra szerzője: Peter T. H. Pang)

A null adatfolyamot két statisztikai eljárás, a frekventista és a Bayes-módszer is felhasználja. A polarizációk kutatásának szempontjából máig a Bayes-módszer bizonyult előnyösebbnek, mivel ezen statisztikai következtetésnek nem előfeltétele a gravitációshullámforrás pontos égi koordinátáinak ismerete. A frekventista módszer, amely esetén szükséges a forrás pontos lokalizációja, csak az említett GW170817 eseményre alkalmazható. Ez az esemény egymagában nem szolgáltat elegendő információt a módosított gravitációelméletekben megjelenő polarizációk létezéséről. Amikor több olyan észlelésünk lesz, ahol elektromágneses sugárzás kíséri a gravitációs hullámot, a frekventista módszer eredményesebbé válik [26].

Mind a frekventista, mind a Bayes-módszerben feltételezhetjük, hogy csak tenzoriális polarizációval rendelkező gravitációs hullámot észlelünk, majd az attól való eltérést kereshetjük a módszernek megfelelően. A frekventista esetben az eltérést a

$$p = \int_{E_{\text{null}}}^{\infty} \chi_k^2(x) dx \quad (11)$$

p értékkel jellemezzük, ahol x integrálási változó (annak a valószínűségi változónak a lehetséges értékeit jelöli, amely χ^2 eloszlású), χ_k^2 pedig a χ^2 -eloszlás sűrűségfüggvénye k szabadsági fokkal, amely k darab egymástól független standard normális valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlása. Az

$$E_{\text{null}} = \sum |z|^2 \quad (12)$$

menyiség a nullenergia, amely a z null adatfolyamból számolt mennyiség. A null adatfolyam meghatározott diszkrét idő-frekvencia pixelek² felett van összegezve.

² A gravitációshullám-jeleket spektrogramokon detektálják. Az idő- és frekvenciatengelyek mentén az adatok diszkrétizáltak.

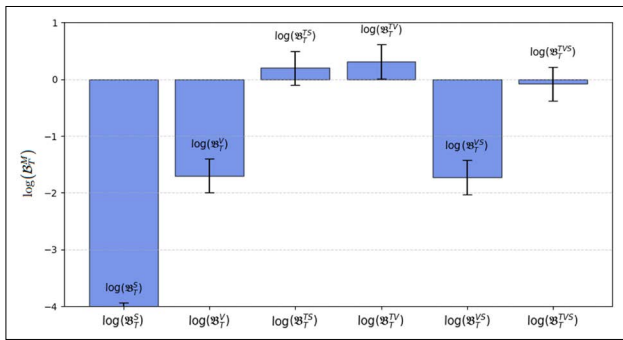
Abban az esetben, amikor a nullenergia értéke nagy, kis p értékhez jutunk. Ha a p érték egy adott határon aluli, a null adatfolyam a zajon kívül tartalmazhat olyan gravitációs hullám-járulékokat, amelyek nem tenzoriális polarizációkhoz tartoznak. A Bayes-módszer másféle megközelítést használ. A tiszta és kevert módusú eseteket az $M = T, S, V, TS, TV, VS, TSV$ betűkombinációkkal jelöljük, ahol T, S, V a tisztán tenzoriális, skaláris és vektoriális polarizáció, TS, TV, VS, TSV pedig az ezekből kevert polarizációk. A Bayes-módszerben összehasonlítjuk az alap $\mathcal{H}_T$ hipotézist (csak tenzoriális módus szerepel) a $\mathcal{H}_M$ tetszőleges polarizációjú hipotézissel. A módszerben a likelihood χ^2_k eloszlást követ. A forrás égi koordinátái ismeretének hiányában az esemény θ_M paraméterei felett marginalizálást végzünk, amelynek lényege, hogy teszünk egy *a priori* feltételezést azokra a paraméterekre, amelyeket nem ismerünk³, majd integrálást végzünk a feltételezett tartományon. Ezáltal egy becslést kapunk a korábban ismeretlen paraméterértékekre, és akkor is vizsgálhatjuk a gravitációs hullámok polarizációját, amikor nincs elektromágneses megfelelő [27].

A Bayes-módszer kulcsfontosságú paramétere a Bayes-faktor, amely adott hipotézis alatt számolt valószínűség arányát adja meg:

$$\mathcal{B}_T^M = \frac{p(d_i | \mathcal{H}_M)}{p(d_i | \mathcal{H}_T)}. \quad (13)$$

Mivel a Bayes-faktor értéke széles intervallumon változhat, az adatelemzés során szokás a logaritmusát venni. A (13) képlet alapján $\log(\mathcal{B}_T^M)$ pozitív értéke a nem tenzoriális polarizációkat tartalmazó, kevert állapotok preferenciáját sugallja.

A GWTC-3 katalógus az O1, O2, O3 észlelési szakaszokban talált összes gravitációs hullám-észlelést tartalmazza, összesen kilencvenet [5]. Valamennyi gravitációs hullám kompakt kettősök összeolvadásából született.



5. ábra. A GWTC-3 katalógus eseményeiből számolt Bayes-faktorértékek [5] a különböző polarizációs esetekre, 90% kredibilis intervallumokkal. Ahol a $\log(\mathcal{B}_T^M)$ érték közel nulla vagy negatív, az általános relativitáselméletet a preferált gravitációelmélet (az ábra szerzője: Karácsonyi Kata)

Ezek túlnyomó része feketelyuk-kettős, de köztük van az egyetlen neutroncsillag-kettős, valamint néhány feketelyuk-neutroncsillag-kettős is.

³ Például a forrás égi koordinátáit az égbolton egyenletes eloszlásúnak feltételezzük.

A GWTC-3 katalóguson végzett elemzés eredményeit az 5. ábra mutatja be. Ezen észlelésekből számolt Bayes-faktor logaritmusértékek szerepelnek tiszta, illetve kevert polarizációk esetén. A $\log(\mathcal{B}_T^M)$ értékek alapján az O4 előtti adatok szerint vagy az általános relativitáselméletet a preferált, vagy egyelőre nem mutathatók ki a nem tenzoriális módusok. Habár $\log(\mathcal{B}_T^{TS})$ és $\log(\mathcal{B}_T^{TV})$ esetén pozitív értékek jelentek meg, ezek nullához igen közeliek, így nem szolgáltatnak egyértelmű bizonyítékot a kevert módusok létezésére.

Kitekintés

A közeljövő gravitációs hullám-csillagászata jelentős előrelépéseket ígér a módosított gravitációelméletek tesztelésében. A jelenlegi földi detektorhálózat érzékenységeinek további növelése, valamint a detektorok számának bővítése lehetőséget teremt a gravitációs hullámok diszperziójának és polarizációjának sokkal pontosabb vizsgálatára, így szigorúbb korlátok állíthatók majd fel a lehetséges eltérésekre az általános relativitáselmélettől. A megfigyelésekre épülő statisztikai elemzések egyre nagyobb adathalmazokon lesznek elvégezhetőek, ami növeli a nem einsteini jellegű hatások kimutatásának esélyét. Emellett a jövőbeni űrdetektorok (például a tervezett LISA) a jelenleginél alacsonyabb frekvenciájú források megfigyelésével a gravitáció nagyobb időskálán való tesztelését teszik lehetővé, hozzájárulva a sötét energia, a sötét anyag, a módosított gravitációelméletek és egy esetleges kvantumgravitációs elmélet jobb megértéséhez. Mindezek együtt biztosítják, hogy a gravitációs hullámok a következő évtizedekben a fundamentális fizika egyik legfontosabb kutatási eszközévé váljanak.

Irodalom

1. The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration (2016): Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116, 061102.
2. The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, and the KAGRA Collaboration (2025): GWTC-4.0: Updating the gravitational-wave transient catalog with observations from the first part of the fourth LIGO-Virgo-KAGRA Observing Run, LIGO Document P2400386.
3. DESI Collaboration, DESI DR2 Results II (2025): Measurements of baryon acoustic oscillations and cosmological constraints. *Phys. Rev. D* 112, 083515.
4. D. Lovelock (1972): The four dimensionality of space and the Einstein tensor. *J. Math. Phys.*, 13, 874.
5. The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, and the KAGRA Collaboration (2025): Tests of general relativity with GWTC-3. *Phys. Rev. D* 112, 084080.
6. The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration (2017): GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119, 161101.
7. The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, Fermi Gamma-Ray Burst Monitor, INTEGRAL, IceCube Collaboration, and other collaborations (2017): Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *Astrophys. J. Lett.*, 848, L12.
8. The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, Fermi Gamma-Ray Burst Monitor, and INTEGRAL (2017): Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A. *Astrophys. J. Lett.*, 848, L13.

9. Shoom A. A., Kumar S., Krishnendu N. V. (2022): Constraining mass of the graviton with GW170817. arXiv:2205.15432.
10. Mirshekari S., Yunes N., Will C. M. (2012): Constraining Lorentz-violating, modified dispersion relations with gravitational waves. *Phys. Rev. D* 85, 024041.
11. Kostelecký V. A., Mewes M. (2016): Testing local Lorentz invariance with gravitational waves. *Phys. Lett. B* 757, 510.
12. Sefiedgar A. S., Nozari K., Sepangi H. R. (2011): Modified dispersion relations in extra dimensions. *Phys. Lett. B* 696, 119.
13. Hořava P. (2009): Membranes at quantum criticality. *J. High Energy Phys.* 03, 020.
14. Hořava P. (2009): Quantum gravity at a Lifshitz point. *Phys. Rev. D* 79, 084008.
15. Garattini R., Mandanici G. (2011): Modified dispersion relations lead to a finite zero point gravitational energy. *Phys. Rev. D* 83, 084021.
16. Amelino-Camelia G. (2010): Doubly-special relativity: Facts, myths and some key open issues. *Symmetry*, 2, 230.
17. Calcagni G. (2017): Lorentz violations in multifractal spacetimes. *Eur. Phys. J. C* 77, 291.
18. Baker T., Barausse E., Chen A., de Rham C., Pieroni M. (2023): Testing gravitational wave propagation with multiband detections. *JCAP*, 2023, 044.
19. The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration (2016): Tests of general relativity with GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, 116.
20. Ezquiaga J. M., Hu W., Lagos M., Lin M. X., Xu F. (2022): Modified gravitational wave propagation with higher modes and its degeneracies with lensing. *JCAP*, 2022, 016.
21. Baka T., Cirok B., Haris K., Noller J., Krishnendu N. V. (2025): Testing general relativity with gravitational waves – improving and extending modified dispersion relation tests. arXiv:2511.00497.
22. Pratten G., García-Quirós C., Ramos-Buades A., Héctor E., Mateu-Lucena M. (2021): Computationally efficient models for the dominant and subdominant harmonic modes of precessing binary black holes. *Phys. Rev. D* 103, 104056.
23. Nishizawa A., Taruya A., Hayama K., Kawamura S., Sakagami M. (2009): Probing nontensorial polarizations of stochastic gravitational-wave backgrounds with ground-based laser interferometers. *Phys. Rev. D* 79, 082002.11
24. Capozziello S., Faraoni V. (2011): Beyond Einstein Gravity. Springer.
25. Dong Y.-Q., Liu Y.-Q., Liu Y.-X. (2024): Polarization modes of gravitational waves in general modified gravity: General metric theory and general scalar-tensor theory. *Phys. Rev. D* 189, 044013.
26. Pang P. T. H., Lo R. K. L., Wong I. C. F., Li T. G. F., Van Den Broeck C. (2020): Generic searches for alternative gravitational wave polarizations with networks of interferometric detectors. *Phys. Rev. D* 101, 104055.
27. Wong I. C. F., Pang P. T. H., Lo R. K. L., Li T. G. F., Van Den Broeck C. (2021): Null-stream-based Bayesian unmodeled framework to probe generic gravitational-wave polarizations. arXiv:2105.09485.

