

RÚGJ ÉS MÉRJ! – A TIZENEGYES FIZIKÁJA

Stonawski Tamás[®], Beszeda Imre

¹Nyíregyházi Egyetem, Fizika Csoport, Nyíregyháza

[®]E-mail: stonawski@gmail.com

Bevezetés

Milyen fizikai tényezők határozzák meg egy tökéletes tizenegyes sikerességét? A futball világa tele van izgalmas pillanatokkal, de kevés olyan szituáció létezik, amely annyi feszültséget hordoz magában, mint egy tizenegyes-rúgás. A fizika segítségével részletesen elemezhetjük, milyen tényezők befolyásolják a labda mozgását és hogyan használhatjuk ezt a tudást a gyakorlatban.

A tizenegyest William McCrum ír kapus és üzletember javasolta 1890-ben, a labdát az alapvonaltól 12 yardra (kb. 11 méter) helyezik el, innen ered a neve [1].

A futball csapatjáték, a büntetőpárbaj viszont egyéni küzdelem. Egy jól elrúgott tizenegyes fél másodperc alatt ér a kapuba, miközben a kapus reakcióideje ennek

csupán a fele. A tudósok bizonyos szempontok alapján határozták meg az ideális büntetőrúgást. Pl. Tim Cable, a John Moores Egyetem professzora szerint a rúgó öt-hat lépésről, 20–30 fokos szögben indítson, így a labda körülbelül 105 km/h sebességgel repül, s fél méterrel a lécz alatt, a sarokba érkezik. Természetesen a valóságban minden egy kicsit más [2].

Milyen mozgást végez a labda az ellövés után?

A focilabda mozgása összetett, hiszen egy rúgás során nemcsak egyenes vagy görbe vonalú mozgást végez, hanem forog is, és közben hat rá a gravitáció és a légellen-



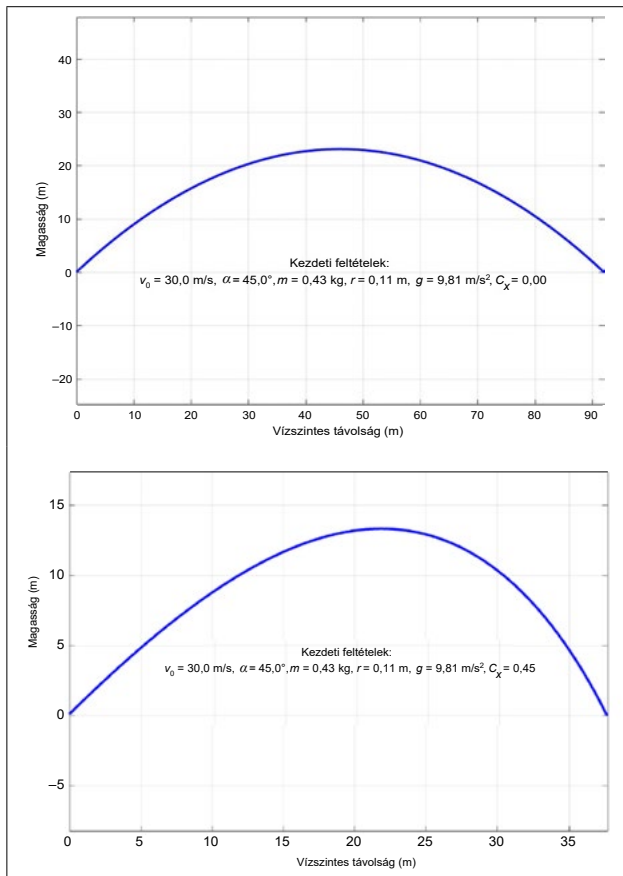
Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai docens. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori programjának keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére az általános és középiskolában.



Beszeda Imre matematika-fizika-számítástechnika szakos középiskolai tanár, anyagtudományi mérnökfizikus, a NyE Műszaki és Agrártudományi Intézet fizikatanára. 2006 óta foglalkozik tudomány- (elsősorban fizika-) népszerűsítéssel és tehetséggondozással. A Kreatív Fizika Tábor megálmodója és szervezője.

állítás. A tanulmányban megjelenő ábrák többségét Matlab programmal készült szimulációkkal készítettük.

Lehet egyenes vonalú egyenletes mozgás, ha elhanyagoljuk az ellenállásokat és laposan rúgjuk el a labdát a pályán (persze csak kis szakaszon igaz, mert a földfelszín nem egyenes vonalú). Ez akkor is teljesül, ha a világűrben rúgjuk el, mindaddig, amíg más kölcsönhatás nem éri – Newton I. törvénye). A labda egyenes vonalú egyenletesen változó (lassuló) mozgással halad, ha laposan rúgjuk, és figyelembe vesszük a közegellenállást; parabolapályán halad, ha a rúgás bizonyos szög alatt történik (1. ábra), és nem vesszük figyelembe a légellenállást. Ballisztikus pályán pedig akkor mozog, ha a rúgás bizonyos szög alatt történik, és nem, vagy csak kis „sebességgel” pörög a labda (1. ábra).



1. ábra. Fent a légellenállás figyelembevétele nélkül haladó labda parabolapályája, lent a légellenállás figyelembevételével haladó labda ballisztikus pályája. Az ábrák szimulációk alapján készültek

A légellenállás figyelembevétele nélkül haladó labda pályája a ferde hajítás pályaegyenlete alapján a következő analitikus képlettel adható meg:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

ahol:

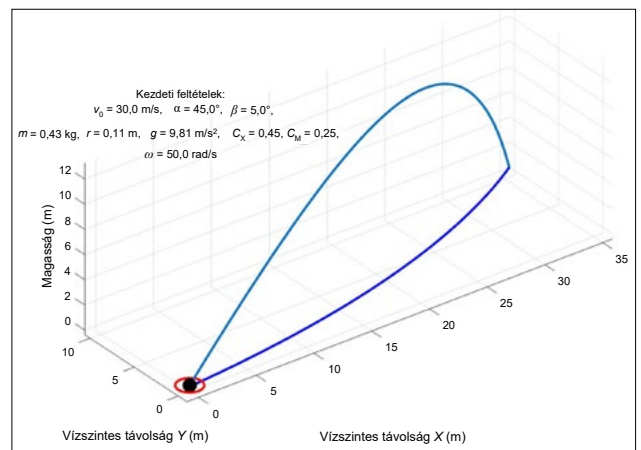
y – a labda magassága az adott x vízszintes távolságban,
 α – a kezdősebesség hajítási szöge,
 g – a nehézségi gyorsulás ($9,81 \text{ m/s}^2$),

v_0 – a kezdősebesség nagysága,

x – a vízszintes távolság a kiindulási ponttól.

Az 1. ábra alapján jól látható, hogy légellenállás nélkül a parabolapályán nagyon messzire repülnének a labdák. A légellenállás figyelembevételével viszont a közegellenállási erő sebességfüggősége miatt a ballisztikus pályát már csak szimulációval, úgynevezett iterációs lépések segítségével lehet kiszámolni. Ha a labda pörgését sem hagyjuk figyelmen kívül, akkor ún. sodródó ballisztikus pályát kapunk, ugyanis a levegő és a labda kölcsönhatása miatt a Magnus-effektus érvényesül.

A csavart labda a mozgása során kilép a kezdősebesség és a nehézségi gyorsulás vektora által meghatározott síkból a Magnus-effektus miatt (2. ábra). Ennek oka, hogy a forgás következtében a levegő sebessége különbözik a labda két oldalán. Ez nyomáskülönbséget eredményez, ami a labdát az alacsonyabb nyomású oldal felé sodorja, így görbíti el annak pályáját.



2. ábra. Az x - h síkban elrúgott csavart labda kilép a síkból. A szimuláció paramétereit alapján készített térbeli ábra. A görbe vízszintes síkra vetett merőleges vetülete mutatja, hogy a labda mozgása nem síkbeli

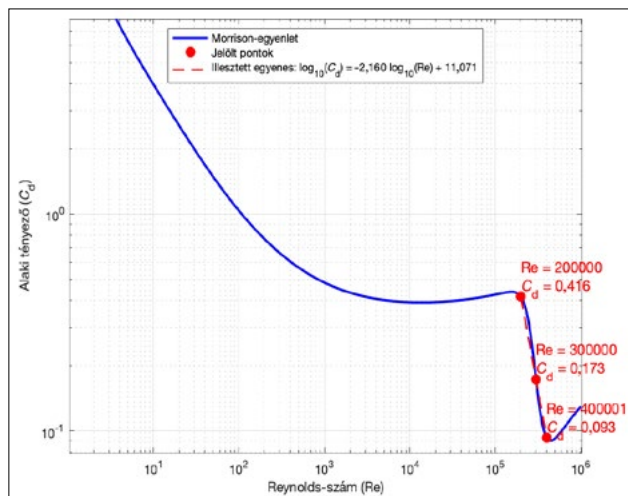
Figyelembe kell még venni a Reynolds-szám [3] alakulását is, hiszen lamináris áramlásból turbulenssé válva megváltozik az alakító tényező értéke is.

$$Re_{v=1,5 \frac{m}{s}} = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{1,22 \frac{kg}{m^3} \cdot 1,5 \frac{m}{s} \cdot 0,22 m}{1,81 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s} \approx 2 \cdot 10^3,$$

míg pl. 20 m/s esetén $Re_{v=20 \text{ m/s}} \approx 3 \cdot 10^5$. Az alakító tényező meghatározása az $1 < Re < 10^6$ tartományon a Morrison-egyenlet alapján lehetséges [4]:

$$C_d \approx \frac{24}{Re} + \frac{2,6 \frac{Re}{5}}{1 + \left(\frac{Re}{5}\right)^{1,52}} + \frac{0,411 \left(\frac{Re}{2,63 \cdot 10^5}\right)^{-7,94}}{1 + \left(\frac{Re}{2,63 \cdot 10^5}\right)^{-8}} + \frac{0,25 \frac{Re}{10^6}}{1 + \frac{Re}{10^6}}.$$

A 3. ábrán a Morrison-egyenlet alapján számított alakító tényező értékét ábrázoltuk egy gömbre a Reynolds-szám függvényében, logaritmus skálán. A kék



3. ábra. A Morrison-egyenlet alapján elkészített grafikon sima felületű, tökéletes gömbre. Az alaki tényező hirtelen csökkenése a $2 \cdot 10^5 < Re < 4 \cdot 10^5$ intervallumban figyelhető meg

görbe az elméleti összefüggést mutatja, míg a piros pontok kiemelt értékeket jelölnek, ahol a Reynolds-szám konkrét értékeihez tartozó C_d értékeket tüntettük fel. A piros szaggatott egyenes a grafikonon egy lineáris illesztést reprezentál a logaritmikus adatokra. Ez a kapcsolat arra utal, hogy a C_d érték logaritmusa közel lineáris összefüggést mutat a Reynolds-szám logaritmusával.

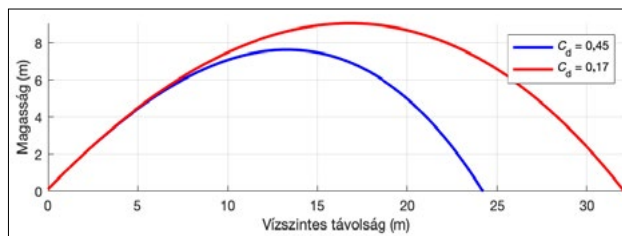
A görbe viselkedése jól tükrözi az áramlástani jellemzőket különböző Reynolds-szám-tartományokban. Alacsony Reynolds-számok ($Re < 10^3$) esetén az alaki tényező nagy, mivel az áramlás lamináris, és a gömb körül kialakuló határréteg leválása viszonylag korán megtörténik, nagy ellenállást eredményezve. Ahogy a Reynolds-szám növekszik (a 10^3 – 10^5 tartományban), a C_d érték fokozatosan csökken, mert az áramlás egyre inkább átmeneti állapotba kerül, és a határréteg instabillabbá válik.

A legérdekesebb jelenség a nagy Reynolds-szám-tartományban figyelhető meg, különösen $2 \cdot 10^5 < Re < 4 \cdot 10^5$ között, ahol a C_d érték hirtelen csökkenése tapasztalható. Ez annak a következménye, hogy a kritikus Reynolds-szám közelében a határréteg átmenetileg turbulenssé válik, ami késlelteti annak leválását. Ennek eredményeként a gömb mögött kisebb kiterjedésű örvénylő zóna alakul ki, ami jelentősen csökkenti az alaki ellenállást.

Ez az éles csökkenés kulcsfontosságú jelenség a gömb alakú testek áramlástani viselkedésének megértésében, és ez nagy gyakorlati jelentőséggel bír például sportlabdák, járművek és repülőgépek aerodinamikai tervezésében. A Morrison-egyenlet által adott görbe pontosan modellezi ezt az átmenetet, míg az illesztett egyenes egy közelítő összefüggést kínál a Reynolds-szám és az alaki tényező közötti kapcsolat egyszerűbb leírására.

A 3. ábra és elemzése jól mutatja, hogy a Reynolds-szám növekedésével az alaki tényező jelentősen csökken, különösen a kritikus tartományban. Laminá-

ris áramlás esetén a labda gömb alakja miatt ez az érték 0,45 lenne, de ez nagyban csökken egy tizenegyesrúgás közben, azaz akár 100 km/h-s relatív sebességek között. Mivel az elrúgás közben a labda sebességváltozása századmásodpercen belül bekövetkezik, a csökkent alaki tényező állandónak tekinthető a mozgás közben, ami igen nagy változást idéz elő a pálya paramétereiben, ahogy azt a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra. A közel 100 km/h-val megrúgott labda pályái a szimuláció alapján 2 különböző alaki tényező (C_d) hatására. A kisebb alaki tényezővel számolva ugyanaz a rúgás magasabbra és messzebbre megy

Rekordok

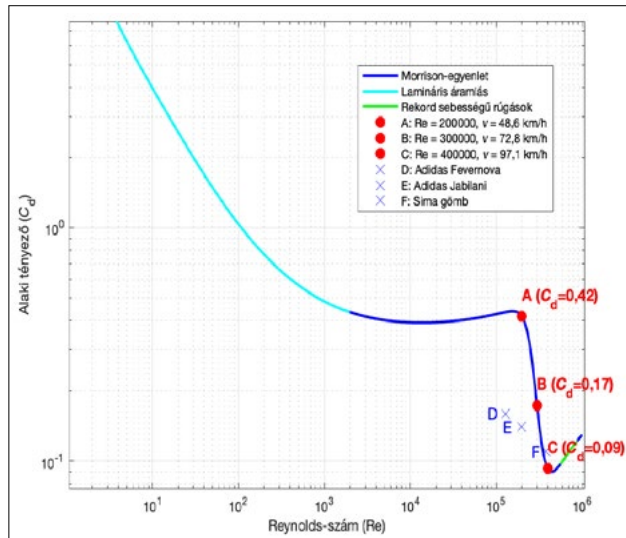
A labdarúgásban a lövések sebességét radarokkal, kamerarendszerekkel és a labdába épített szenzorokkal mérik, amelyek gyorsulást, forgást és mozgást is rögzítenek. A 2022-es világbajnokságon használt Adidas labdák például beépített inerciális mérőrendszert tartalmaztak,

1. táblázat. A futballtörténelem 20 leggyorsabb lövése (2025-ig; nem csak 11-esek)

Játékos	Sebesség (km/h)	Dátum
1. Ronny Heberon	210	2006.11.26.
2. Arjen Robben	190	2009.08.19.
3. Steven Reid	189	2005.12.31.
4. Ronald Koeman	188	1992.05.20.
5. David Hirst	183	1996.09.16.
6. Frank Lampard	177	2005.03.05.
7. Ibrahim Sangare	170	2019.04.21.
8. David Beckham	157,5	1997.02.22.
9. David Trezeguet	154,4	1998.03.18.
10. Ritchie Humphreys	154	1996.08.17.
11. Tony Yeboah	154	1995.09.23.
12. Zlatan Ibrahimovic	150	2013.10.23.
13. Adriano Leite Ribeiro	144	2005.03.20.
14. Matt Le Tissier	140	1997.01.18.
15. Alan Shearer	138	1997.02.02.
16. Roberto Carlos	138	1997.06.03.
17. Tugay Alizade	135,5	2001.11.03.
18. Obafemi Martins	135	2007.01.14.
19. Givanildo Vieira de Sousa (Hulk)	130	2025.07.20.
20. David Beckham	129,6	1996.09.04.

amely valós időben továbbította az adatokat. Ezek a technológiák nemcsak a rekordok hitelesítésében, hanem a játék elemzésében és a VAR rendszer támogatásában is fontos szerepet játszanak.

A leggyorsabb mért focilabda-lövések sebességei 2025-ig az 1. táblázatban láthatóak [5]. Ezek a sebességek a rúgás pillanatában mért legnagyobb értékek.



5. ábra. A Morrison-egyenlet szerinti alaki tényező (C_d) változása a Reynolds-szám (Re) függvényében egy gömb alakú test esetén. A világoskék szakasz a lamináris áramlás tartományát jelöli. Az ábra a labdarúgásban előforduló jellemző sebességtartományokhoz tartozó alaki tényezőket is szemlélteti, különös tekintettel a rekordsebességű lövésekre. Az ábrán szerepel továbbá néhány labdatípusra vonatkozó mért jellemző is: az Adidas Fevenova (D), Adidas Jabulani (E) és egy teljesen sima felületű gömb (F) alaki tényezője, amelyeket kék keresztekkel jelöltünk. Ezek a pontok az alaki tényezők minimumértékét jelölik

A labdafajták hatása a labda pályájára

Az eltérő felületi kialakítások hatással vannak a labda légellenállására és mozgására, ami a labdarúgásban is fontos tényező a lövések pontosságát és stabilitását illetően [6].

Az 5. ábra jól szemlélteti, hogy a nagyobb sebességgel történő lövések során az alaki tényező drasztikusan változik, ami jelentős hatással van a labda aerodinamikai tulajdonságaira és pályájára. Ez magyarázza, hogy miért lehet bizonyos rúgásoknál váratlan és nehezen kiszámítható a labda mozgása.

A Jabulani labda viselkedése, amely a 2010-es FIFA világbajnokság hivatalos labdjaként debütált, tudományos szempontból is érdekes kérdéseket vetett fel. Japán kutatók arra figyeltek fel [7], hogy a labda aerodinamikai jellemzői eltérnek a korábbi modellekétől. A Jabulani szinte tökéletes gömbformájú, ami csökkenti azokat a szabálytalanságokat, amelyek az eddigi labdák felületén megtalálhatóak voltak. A felületi hibák turbulenciát generálnak, amely elősegíti a labda stabil mozgását, különösen nagy sebességeknél. A sima felület azonban nem képes elegendő turbulenciát generálni, ami instabilitást

okozhat (ezt megfigyelhetjük pl. erősen megrúgott sima gumilabda kaotikus mozgásánál).

A kutatások [7, 8] azt mutatták, hogy a Jabulani esetében az úgynevezett „határréteg-leválás” gyorsabban bekövetkezik, mint más labdákénál. A labdák aerodinamikai jellemzőit befolyásoló határréteg és annak leválása kulcsszerepet játszik a mozgás sebességében, és ha a leválás túl korán történik, az fokozhatja a labda kiszámíthatatlanságát. A Japánban végzett kutatások szerint a Jabulani túl hamar válik sima gömbbé, így elveszítve a szükséges aerodinamikai szabálytalanságokat.

Az aszimmetrikus varráskép (a Jabulaniénál) az aszimmetrikus aerodinamikai jellemzőikkel együtt fokozta a labda kiszámíthatatlan viselkedését, amely a játékosok számára komoly nehézséget okozott.

Továbbá, a magasan fekvő Johannesburgban (1750 méter tengerszint felett, a légköri nyomás akár 850 hPa, a levegő sűrűsége akár 1 kg/m³ értékig csökken) a környezet nagyhatással volt a labda viselkedésére. Mivel a magasabban fekvő területeken a levegő ritkább, kisebb a légellenállás, így a labda hosszabb távolságot tehet meg ugyanakkora erővel rúgva. Ez magyarázhatja a világbajnokságon tapasztalt számos hosszú passzt és távoli lövéseket.

A Jabulani tehát olyan aerodinamikai jelenségeket mutatott, amelyek a korábbi labdákhoz képest kiszámíthatatlanabbá tették a játékot. A labda viselkedése komoly kihívást jelentett a profi futballisták számára is [9].

Megjegyezzük, hogy bár a jelen tanulmány terjedelmi okok miatt nem tér ki részletesen ennek vizsgálatára, érdemes figyelembe venni, hogy az elrúgás pillanatában a labda alakja a belépülés következtében – amely a belső nyomástól függő mértékben jelentkezik – eltérhet az ideális gömbformától [10]. Ez a deformáció befolyásolja az alaki tényezőt, ezáltal hatással lehet a labda aerodinamikai tulajdonságaira és mozgására. Az ilyen jellegű torzulások nagy sebességű kamerával pontosan megfigyelhetők. Emellett a labda repülése során fellépő sajátos rezgőmozgás szintén hozzájárulhat a pálya kiszámíthatatlanságához, bár ilyen rövid idő alatt és távolságon ez csupán kisebb perturbációként jelentkezik. A jelenség analóg módon szabad szemmel is megfigyelhető egy részlegesen leeresztett gumilabda elrúgásakor.

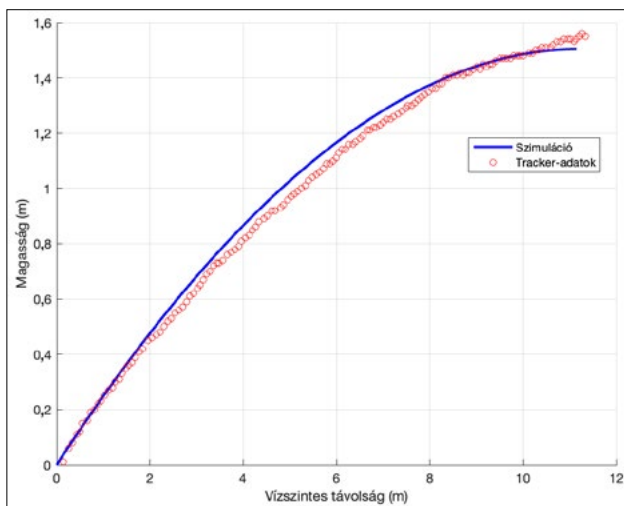
Videóanalízis

A felvételt egy iPhone 8 telefonkészülékkel készítettük 240 kép/másodperc sebességgel. A videóelemzés célja az alaki tényező fent tárgyalt változásainak ellenőrzése volt a megírt szimuláció segítségével. A felvételt a Tracker videóelemző programmal elemeztük, amely lehetővé tette a labda mozgásának pontos nyomon követését (6. ábra). A 11 méteres távolság megtétele során összesen 152 képkockát rögzítettünk. A kísérlet során szélcsend volt, és az Adidas labda lényegesen nem csavarodott. A lövés pontosan a kapu közepénél, a felső kapufa alatt körülbelül 1 méterrel ért célba.



6. ábra. A Tracker videóelemző program az 5. képkocka adataival, a labda pályájával

A videóelemző programból exportált adatokat összehasonlítottuk a szimulációval, ami jó egyezést mutatott (7. ábra), így további vizsgálódásainkat a szimulációval folytathattuk.



7. ábra. A focilabda mozgásáról videóelemző program segítségével rögzített pálya alakja jó egyezést mutat a szimulációval készült pályával

A sebesség változása a mozgás során

A videóelemző program értékei (a sebesség és a gyorsulás) bizonyos ingadozásokat mutattak, ami főleg abból adódott, hogy a labda közepét nem mindig pontosan detektálta a szoftver, így a sebesség és gyorsulásvektorok nagyobb szórást mutattak a deriválások miatt. Jobbnak találtuk a szimuláció használatát a sebesség időbeli változásának leírásához, amit a 8. ábra szemléltet.

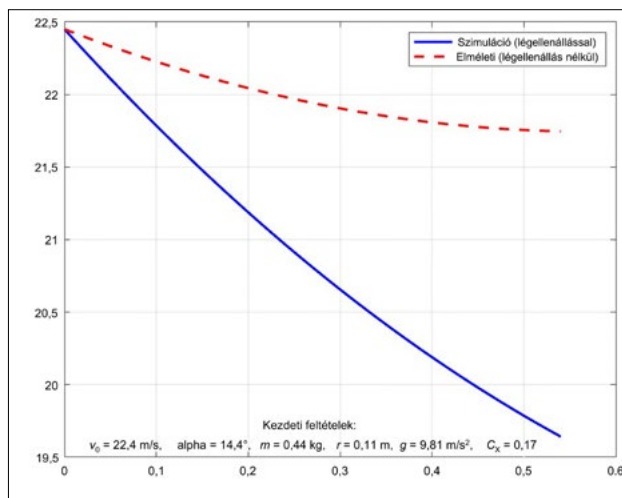
A 8. ábra azt mutatja, hogy a labda sebessége folyamatosan csökken a rúgás után. Kezdetben a sebesség körülbelül 22,5 m/s, majd az idő előrehaladtával fokozatosan csökken, 0,5 másodperc után nagyjából 19,5 m/s-ra.

Ez arra utal, hogy a labda mozgására ható erők – a légellenállás és a nehézségi erő – lassítják a labdát. A görbe alakja nem lineáris, ami arra utal, hogy a sebességváltozás nem egyenletes, hanem egyre csökkenő ütemben lassul. A szaggatott vonallal jelölt légellenállás nélküli sebességcsökkenést egyedül a nehézségi erő okozza.

Az átlagsebességet a 8. ábra alapján az alábbi összefüggés szerint számíthatjuk ki:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{11 \text{ m}}{0,54 \text{ s}} = 20,37 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A kezdősebesség kiszámolására azonban nincs analitikus képlet, hiszen a közegellenállási erő sebességfüggő, így csak iterációs lépésekkel lehet meghatározni. Ha viszont



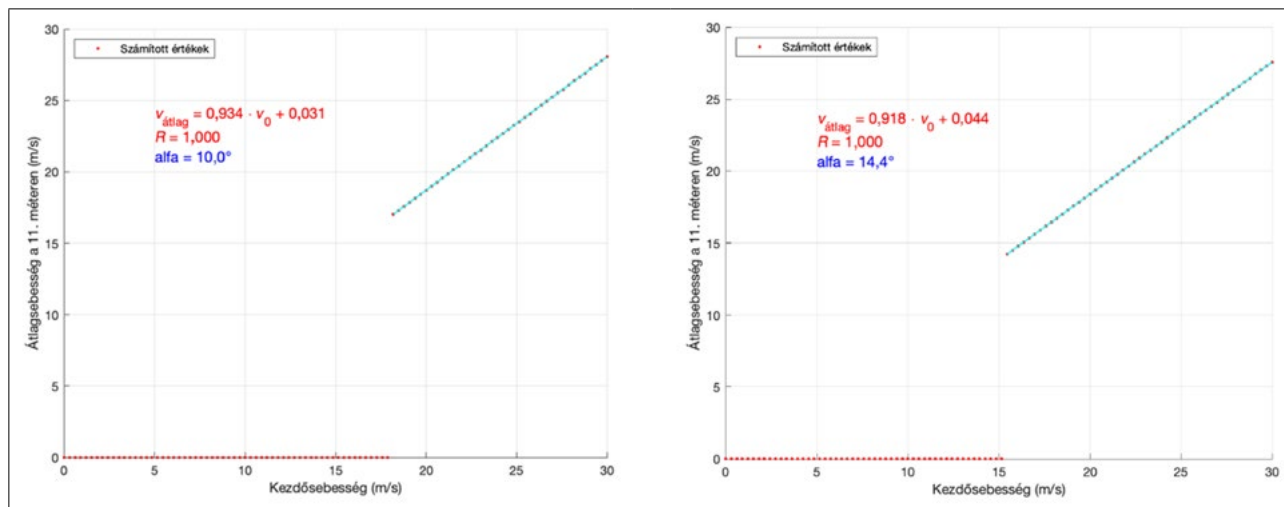
8. ábra. A 11 méteres rúgás során a labda mozgását ábrázoló sebesség-idő grafikon a szimuláció eredményei alapján. A szaggatott vonal a légellenállás nélkül számított sebességcsökkenést ábrázolja

a már elkészített szimulációkat lefuttatjuk több (példánkban 100) különböző kezdősebességgel, akkor a 9. ábrán látható diszkrét függvényt kapunk.

A függvény alapján leolvashatjuk a labda kezdősebességét a kiszámolt átlagsebesség alapján, de pontosabb értéket kapunk, ha egyenest illesztünk a függvény megfelelő szakaszára és az egyenes egyenletéből kifejezzük a kezdősebességet:

$$v_0 = \frac{\bar{v} - 0,044}{0,918} = \frac{20,37 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,044}{0,918} = 22,14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

(Megjegyzés: a 9. ábra jobb oldali szimulációjában 14,4 fokban szögben elrúgott labdával számoltunk, ami 15,3



9. ábra. Két különböző szögben elrúgott labda szimulációjának eredménye 100 különböző kezdősebesség-értékkel

m/s alatti sebességnél még nem éri el a kaput, hanem előtte a földre pattan.)

Mérés

Azért választottuk kísérletünkhöz a 11 méterről történő rúgásokat, hogy belelássunk a 11-es rúgások izalmába: egy jól meglőtt büntető (25–30 m/s, azaz 90–108 km/h sebességgel) kb. 0,4–0,5 másodperc alatt ér a kapuba. A kapus reakcióideje átlagosan 0,2–0,3 másodperc, tehát gyakorlatilag már a rúgás előtt el kell döntenie, merre vetődik. Azaz ilyenkor a rúgónak egyértelmű esélye van gólt szerezni, ezért nagyobb is a felelőssége.

Ha a fenti videóanalízissel történő méréseket egyszerűsíteni szeretnénk, egy egyszerű hangfelvétel alapján is megbecsülhetjük a kezdősebességet. A mérés elvégezhető tornateremben, de szabad téren is. Fontos, hogy a választott hely csendes legyen. Mérjük ki 11 méter tá-

volságot mérőszalaggal egy faltól vagy egy palánktól. A tanuló fusson neki, és rúgja el erősen a labdát úgy, hogy a szemben lévő akadályt eltalálja! A lövésről készítsenek mobiltelefonnal hangfelvételt!

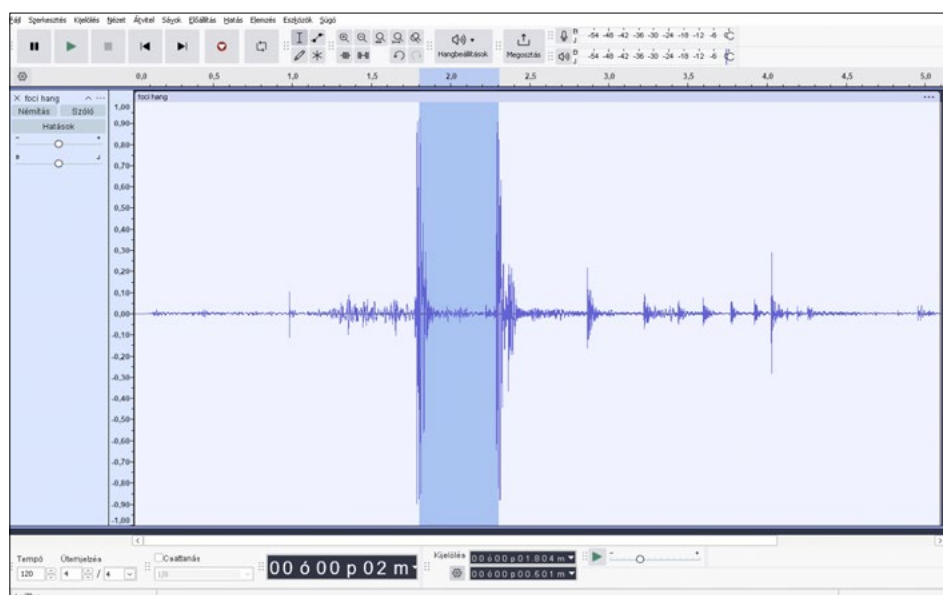
A hangfelvételt vizsgálják meg egy hangelemző programmal, pl. Audacity-vel (10. ábra)! A felvételen jól el kell különülnie a hangerő tekintetében a két eseménynek: a rúgás pillanatának és a becsapódás pillanatának. A két eseményt kijelölve olvassák le az események közötti időtartamot (Δt)!

A program kiírja a kijelölt rész, azaz a két esemény közötti időt: 0,501 s. Ebből az átlagsebesség kiszámítása:

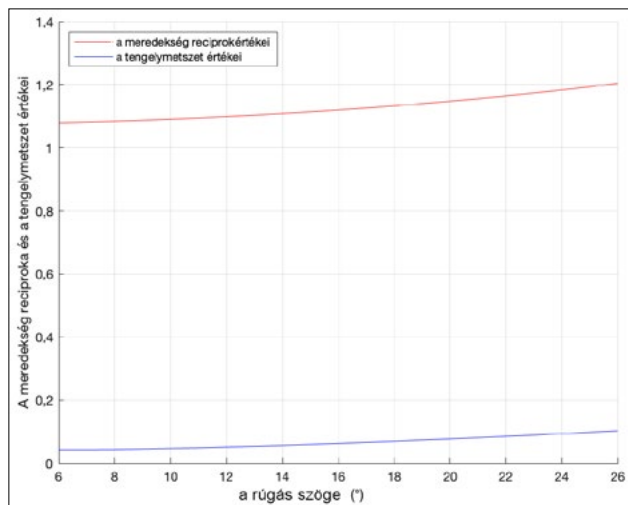
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{11 \text{ m}}{0,501 \text{ s}} = 21,96 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ha a 9. ábrán látható szimulációt kiterjesztjük egy szélesebb szögtartományra (6–26° alatt elrúgott labda), akkor a 11. ábrán látható grafikont kapjuk.

Az elrúgott labda kilövési szöge kis mértékben befolyásolja a kezdősebesség meghatározását, ezért ennek becslése is szükséges a pontos elemzés érdekében. A legmegfelelőbb módszer a labda kapuba érkezési magasságának megfigyelése. A vizsgálatok alapján a felső kapufával egy vonalban történő érkezés körülbelül 26°-os szöget jelent, míg a gólvonalra pattanó labda esetében ez az érték megközelítőleg 6°. A kapu középső tartományába érkező labda tipikusan 12° és 18° közötti szöggel halad. A szög ismeretében a 11. ábra alapján olvassuk



10. ábra. Az Audacity hangelemzővel vizsgált hangfelvétel. A jobb alsó fekete téglalapban be lehet állítani a kijelölt rész időkülönbségét. A felvételen a labda további pattogása is megfigyelhető



11. ábra. A 9. ábrán látható szimuláció kiterjesztve 6–26° alatt elrúgott labdák átlagsebesség-kezdősebesség grafikonjára illesztett egyenesek paramétereivel. (6°-nál kisebb szögek esetében a labda nem éri el a kaput, 26°-nál nagyobb szögek esetében felső kapufát találja el a labda, vagy fölé megy

le a meredekség (m) reciprokát és a tengelymetszetet (b), majd helyettesítsük be az alábbi összefüggésbe:

$$v_0(14^\circ) = \frac{1}{m}(\bar{v} - b) = 1,1(\bar{v} - 0,04) = 24,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Természetesen a pontosabb értékhez a videóanalízis és a szimuláció is szükséges, de ha elméletben ismertjük az eljárást, és egy kis mozgást is akarunk a fizikaórákba vinni, az eljárás megfelelő.

Konklúzió

A tizenegyeselek fizikai vizsgálata kitűnő lehetőséget nyújthat a tanulók számára a kinematika, a dinamika

és az aerodinamika alapelveinek megértésére. Az olyan fogalmak, mint a ferde hajítás, a légellenállás vagy a Magnus-effektus könnyen szemléltethetők egy sporthoz kötött, gyakorlati példán keresztül. A modern technológiák, mint a lassított felvételek és a mozgáselemzés nemcsak a sportolók teljesítményének javítására alkalmasak, hanem didaktikai eszközként is kiválóan alkalmazhatók a fizika tanításában. Ezen megközelítés segítheti a diákok motivációját és a természettudományos gondolkodás fejlesztését, hiszen a mindennapi életben is megfigyelhető, környezetükből merített példákon keresztül sajátíthatják el a fizikát.

* * *

Köszönet *Pachman Istvánnak* és tanítványainak, *Stonawski Benjaminszéknek* és *Borbély Venczelnek* a cikk megírásához nyújtott segítségükért.

Irodalom

- <https://hu.wikipedia.org/wiki/Tizenegyeselek>
- A büntető művészete – 10 gyilkos kérdés a tizenegyeselekről, *FourFourTwo Magazin*, 2010. július
- <https://hu.wikipedia.org/wiki/Reynolds-sz%C3%A1m>
- <https://pages.mtu.edu/~fmorriso/DataCorrelationForSphereDrag2016.pdf>
- <https://www.givemesport.com/fastest-football-shots-ever-recorded/> [Letöltve: 2026. 09. 25.]
- Firoz Alama, Harun Chowdhury, Steven George, Israt Mustary, Gary Zimmer: Aerodynamic drag measurements of FIFA-approved footballs. *Procedia Engineering* 72 (2014) 703–708.
- Takeshi Asai and Sungchan Hong: Sports Fluid Dynamics: Aerodynamics Of Sports Balls. 34rd International Conference on Biomechanics in Sports, Tsukuba, Japan, 2016
- Takeshi Asai, Kazuya Seo. Aerodynamic drag of modern soccer balls. December 2013, *SpringerPlus* 2(1), 171. DOI: 10.1186/2193-1801-2-171
- https://index.hu/tudomany/2010/06/23/mi_a_baj_a_vb-labdaval/
- <https://fizikaiszemle.elft.hu/archivum/fsz0708/juhasz.pdf>