

## Kárpát József

### Időtől független Schrödinger-féle hullámegyenlet

Ha a részecske x irányba mozog u sebességgel akkor a hozzárendelhető sík anyaghullám

$$\Psi = \psi_0 \cdot \sin(\omega t - kx) \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = \text{fázissebesség}$$

k = hullámszám

A  $\Psi$  komplex alakban vesszük fel

$$\Psi = \psi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} = \psi_0 \cdot e^{-ikx} \cdot e^{i\omega t} \quad (\mathbf{A})$$

A  $\Psi$  helytől függő részét amplitúdó függvénynek nevezzük  $\psi(x) = \psi_0 \cdot e^{-ikx}$  így

$$\Psi = \psi(x) \cdot e^{i\omega t}$$

Képezzük az x és a t szerinti második parciális differenciál hányadost:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \psi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ikx} \cdot (-ik)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \psi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ikx} \cdot (-ik)^2 \quad (-ik)^2 = -i^2 \cdot k^2 = \sqrt{-1}^2 \cdot k^2 = -k^2 = -\frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \psi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ikx} \cdot \left(-\frac{\omega^2}{v^2}\right) \quad (\mathbf{1})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi_0 \cdot e^{-ikx} \cdot e^{i\omega t} \cdot (i\omega)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \psi_0 \cdot e^{-ikx} \cdot e^{i\omega t} \cdot i^2 \cdot \omega^2 \quad i^2 \cdot \omega^2 = \sqrt{-1}^2 \cdot \omega^2 = -\omega^2$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \psi_0 \cdot e^{-ikx} \cdot e^{i\omega t} \cdot (-\omega^2) \quad (\mathbf{2})$$

Az **(1)** egyenletből

$$\psi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ikx} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \frac{v^2}{-\omega^2}$$

a **(2)** egyenletből

$$\psi_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-ikx} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{-\omega^2}$$

A két egyenletet egyenlővé téve

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \frac{v^2}{-\omega^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{-\omega^2} \quad -\omega^2 \text{ -tel egyszerűsítve és } v^2 \text{ -tel osztva}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{v^2} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \text{ behelyettesítéssel}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \psi_0 \cdot e^{-ikx} \cdot e^{i\omega t} \cdot (-\omega)^2 \cdot \frac{1}{v^2} \quad \text{a kivastagított rész egyenlő } \Psi \text{ -vel lásd } (\mathbf{A})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi \cdot \left(-\frac{\omega^2}{v^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi \cdot \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \qquad \frac{\omega^2}{v^2} = \left(\frac{2\pi f}{\lambda}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\Psi \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \qquad \text{de Broigle alapján } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot u} \qquad (u = \text{a részecske sebessége})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\Psi \cdot \frac{4\pi^2 m^2 u^2}{h^2} \qquad \mathbf{(3)}$$

A mozgási energia  $\frac{1}{2} m u^2 = E - V$   $E =$  a részecske össz energiája,  $V =$  a potenciális energiája.

$$m \cdot u^2 = 2 \cdot (E - V) \quad / \cdot m$$

$$m^2 \cdot u^2 = 2m(E - V)$$

Behelyettesítve a **(3)** egyenletbe

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\Psi \cdot \frac{4\pi^2 m^2 u^2}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{4\pi^2 m^2} = -\Psi (E - V) \qquad \frac{h}{2\pi} = \hbar \qquad \hbar^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\Psi (E - V)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi (E - V) = 0 \qquad \text{szorozzunk } \frac{2m}{\hbar^2} \text{ -tel}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \cdot \Psi = 0$$

Ezt az egyenletet, ha  $\Psi$  harmonikus hullám, elosztva  $e^{i\omega t}$  – vel, **lásd (A)** az amplitúdó függvényre felírt Schrödinger egyenletet kapjuk:

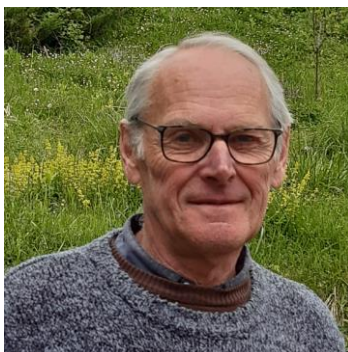
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \cdot \Psi = 0$$

Born szerint  $|\psi|^2$  annak a valószínűségét adja meg, hogy a részecske a  $dx$  térfogatban található.

Irodalom: 1. Holics L Fizika 2 Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986

2. Geszti T Kvantummechanika Typotex, 2014

## *A Szerzőről*



*Kárpát József fizika és mérnöktanári képesítéssel rendelkezik. Pécssett, a Zipernowsky Károly Műszaki Technikumban tanított és tanulmányi igazgatóhelyettesként is dolgozott. A technikus képzésben mechanika és elektrotechnika szakmai angol nyelvet tanított. A lehetőségekhez képest sokat használt digitális tananyagokat, animációkat. Rendszeresen részt vett konferenciákon.*

*Részt vett a kanadai-magyar szervezésű életpálya építési és élethosszig tartó tanulási programban. A magyar csoport vezetője volt.*

*Érdeklődési köre az atomfizika, kvantummechanika.*

*A szakmai nyelvoktatás részére angol nyelven elektrotechnika és nyomtatott áramkörök gyártása témában nyelvkönyvet írt.*